

# **ЛЕКЦИЯ 3**

**Проецирование**

*(или как изумить Скотта и Амундсена)*

**Теорема Эйлера**

*(и ее наглядное доказательство с помощью машины времени и геологических практик).*

***(Если успеем)***

# Проецирование кристаллов и элементов симметрии

Для получения полной характеристики огранки кристалла необходимо **найти** и **зафиксировать в пространстве элементы его симметрии**, но и, используя основной закон постоянства углов между соответствующими гранями, **зафиксировать положения граней относительно элементов симметрии**.

Для этого следует прибегнуть к различным способам проецирования кристаллов:

- 1) *Мысленно* построить *сферическую проекцию*
- 2) Построить *стереографическую проекцию* (плоский образ *сферической проекции*) элементов симметрии кристалла
- 3) Нанести *гномотереографические* проекции граней.

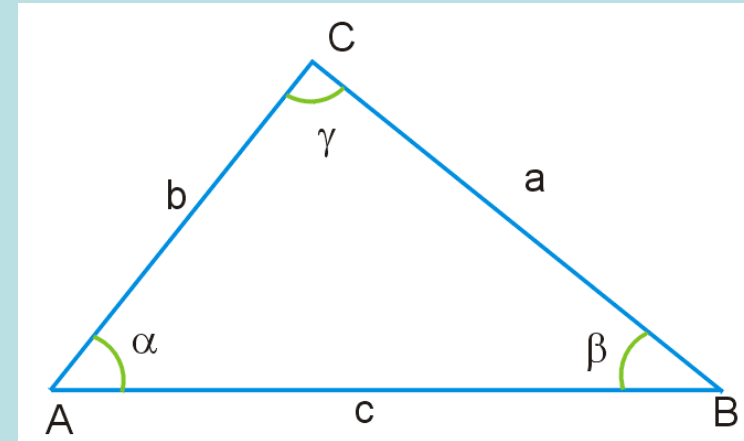
**Важно!**

Геометрия на плоскости и на поверхности сферы разительно отличаются друг от друга

*Например.*

На плоскости сумма внутренних углов треугольника всегда равна 180 градусам

А на сфере – не совсем.....



# Проецирование кристаллов и элементов симметрии

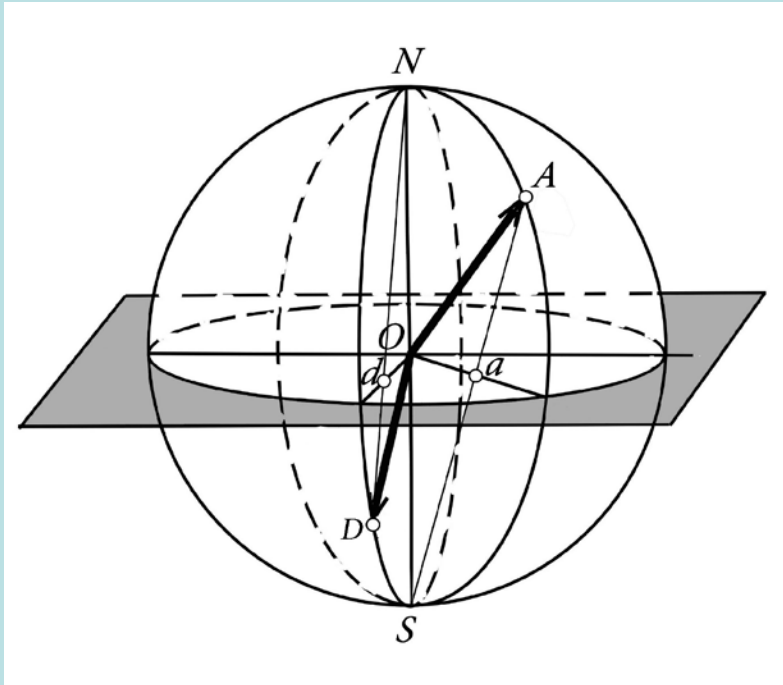
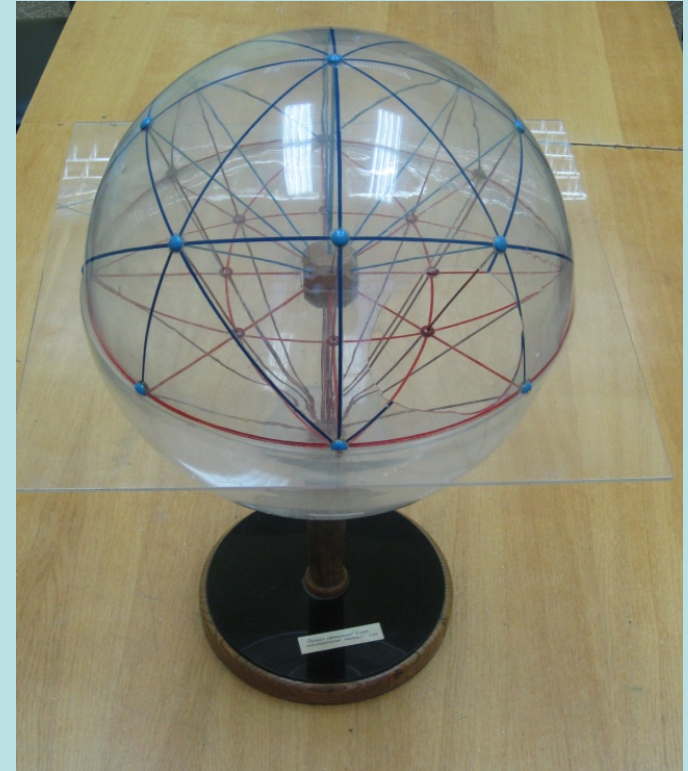
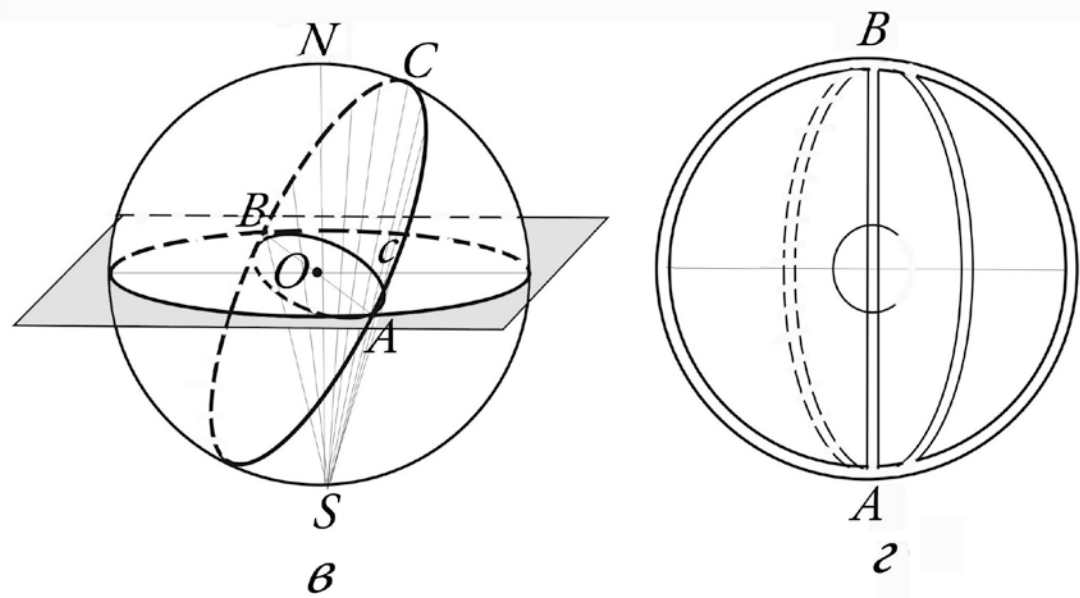
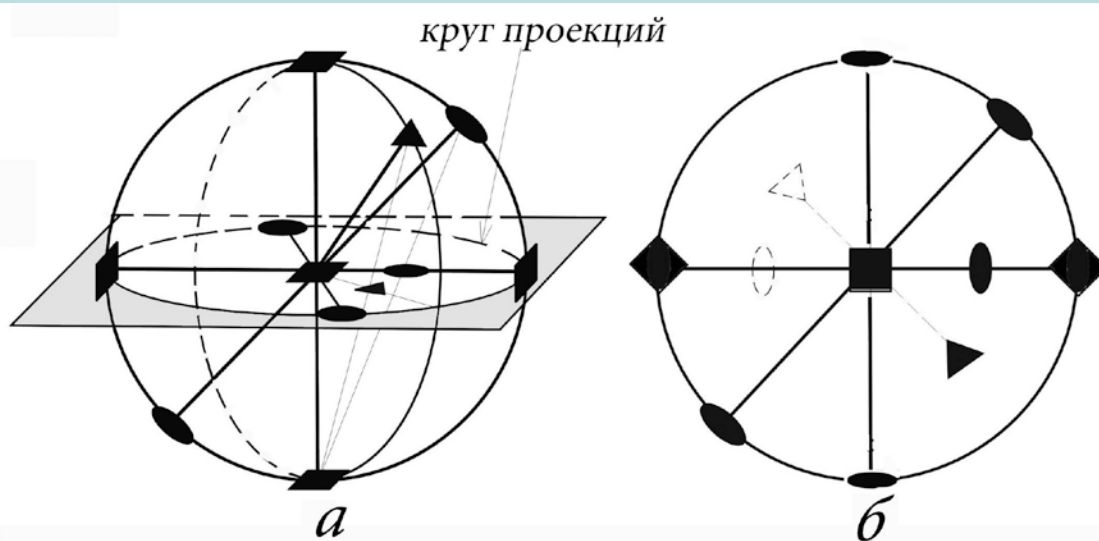


иллюстрация взаимосвязи  
положения точек  $A$  и  $D$  на сфере  
проекции и их  
стереографических образов  $a$  и  $d$   
на экваториальной плоскости

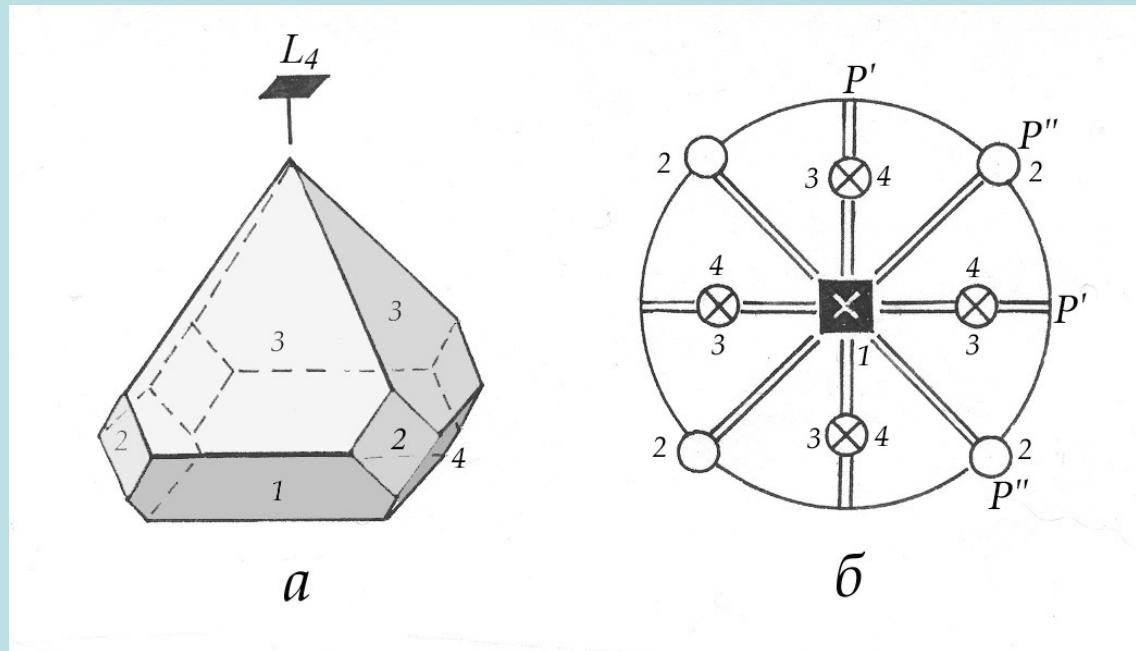


модель для изучения  
основ стереографического  
проецирования

# Стереографические проекции элементов симметрии



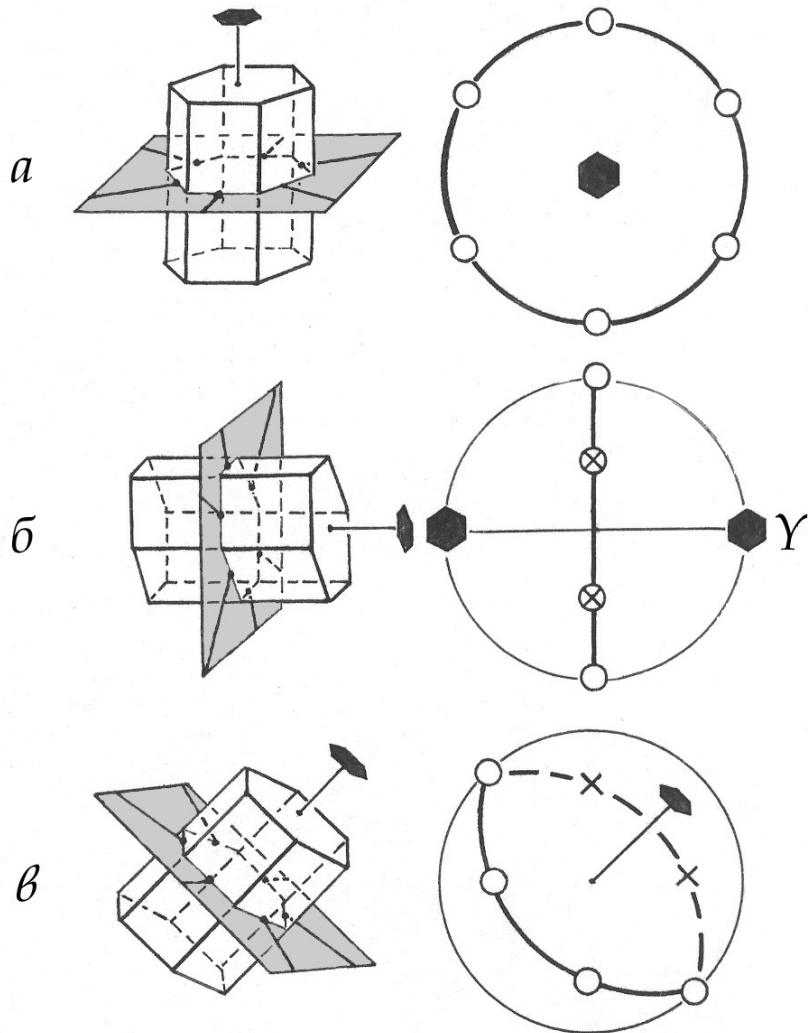
# Гномостереографическая проекция граней



**Простая форма** – это совокупность (семейство) граней, связанных между собой симметрическими операциями.

Отметим, что грани, принадлежащие одной простой форме, равны по своим физическим свойствам. Для идеальных кристаллов они равны также и геометрически - т.е. обладают одинаковой формой и площадью поверхности.

# Таутозональные грани - грани, пересекающимся по параллельным ребрам



Проецирование таутозональных граней, связанных между собой осью 6-го порядка ( $L_6$ ) и расположенных на горизонтальной ( $a$ ), вертикальной ( $б$ ) наклонной ( $в$ ) зонах.

При этом в каждом случае осью зоны является ось  $L_6$

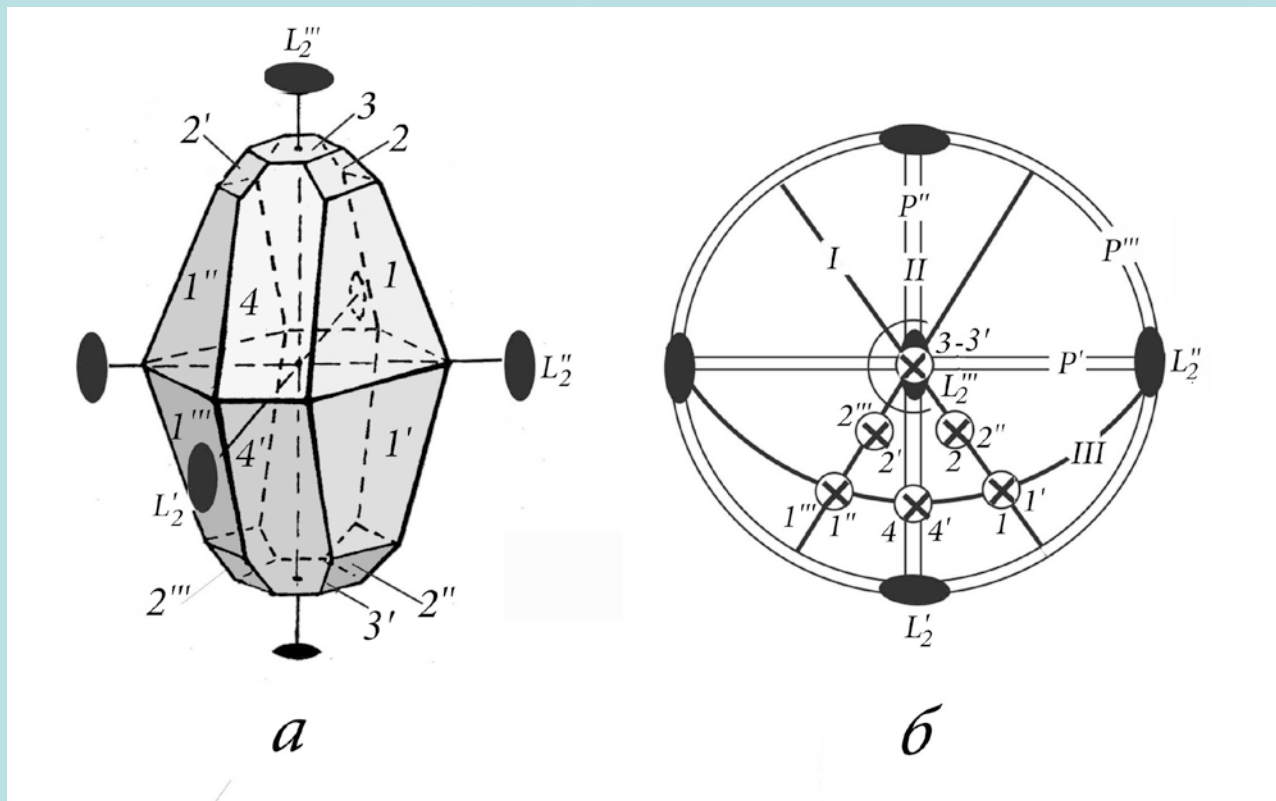
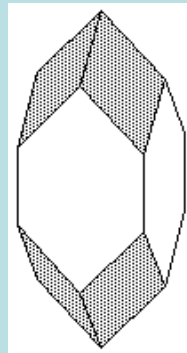
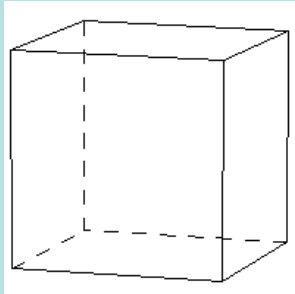


Иллюстрация закона зон (поясов) на кристалле ромбической серы (а), в котором можно выделить несколько семейств таутозональных граней (т. е. граней, пересекающихся по параллельным ребрам, а следовательно, принадлежащих одной зоне): зона I проходит через грани 3 – 2 – 1 – 1' – 2'' – 3', зона II – содержит грани 3 – 4 – 4' – 3', зона III – грани 1'' – 4 – 1. На стереограмме кристалла (б) зоны выделены жирными линиями



# Комбинационные многогранники



шестигранный кристалл  
огранен одной простой  
формой;

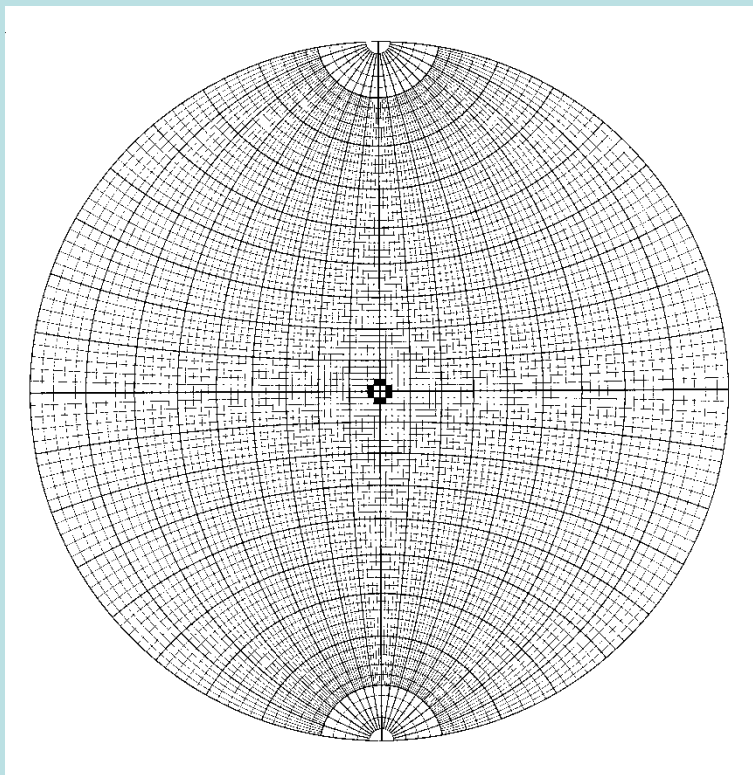
двенадцатигранный кристалл  
огранен двумя простыми  
формами (четыре грани  
принадлежат одной простой  
форме, а восемь других – к  
другой)

Сколько простых форм может  
быть в одном кристалле?

Формально – сколько угодно, на  
практике – не больше десятка, а  
чаще всего меньше.

Минимальное число простых  
форм равно одному (если форма  
закрытая - способна оконтурить  
собой трехмерное пространство).  
Чаще в огранке кристалла могут  
участвуют грани нескольких  
простых форм, при этом  
образуются *комбинационные  
многогранники*.

# Трафареты для рисования



Принято пользоваться сеткой Вульфа диаметром 20 см. В таком разрешении с системой маркированных через  $2^\circ$  меридианов и параллелей погрешность работы будет составлять всего  $1^\circ$ . С помощью сетки Вульфа используя сферические координаты  $\varphi^\circ$  и  $\rho^\circ$  (результат гониометрических исследований), можно строить стереограммы кристаллов, наносить проекции граней и ребер, определять между ними углы и решать другие задачи.

[http://cryst.geol.msu.ru/yaroslav/Wulff\\_nets/Wulff10sm.zip](http://cryst.geol.msu.ru/yaroslav/Wulff_nets/Wulff10sm.zip)

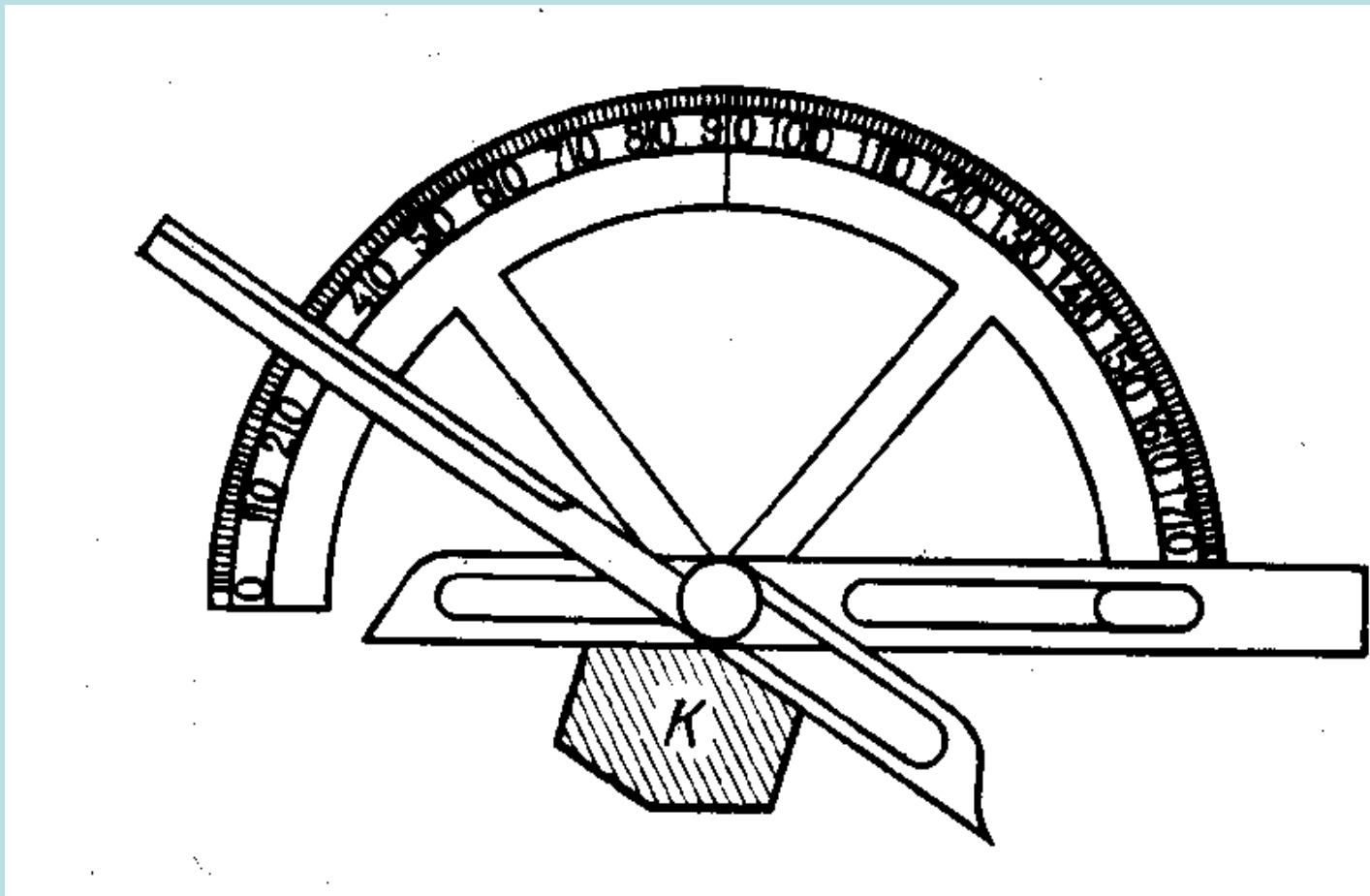


**Георгий Викторович  
Вульф**  
(1863—1925)  
российский учёный-  
кристаллограф.

Автор около 150 работ по кристаллографии, кристаллофизике, кристаллооптике, рентгеноструктурному анализу. Предложил способ вывода всех видов симметрии кристаллов, разработал графический метод обработки результатов измерения кристаллов с помощью стереографической сетки (сетка Вульфа). Установил закон процесса роста кристаллов.

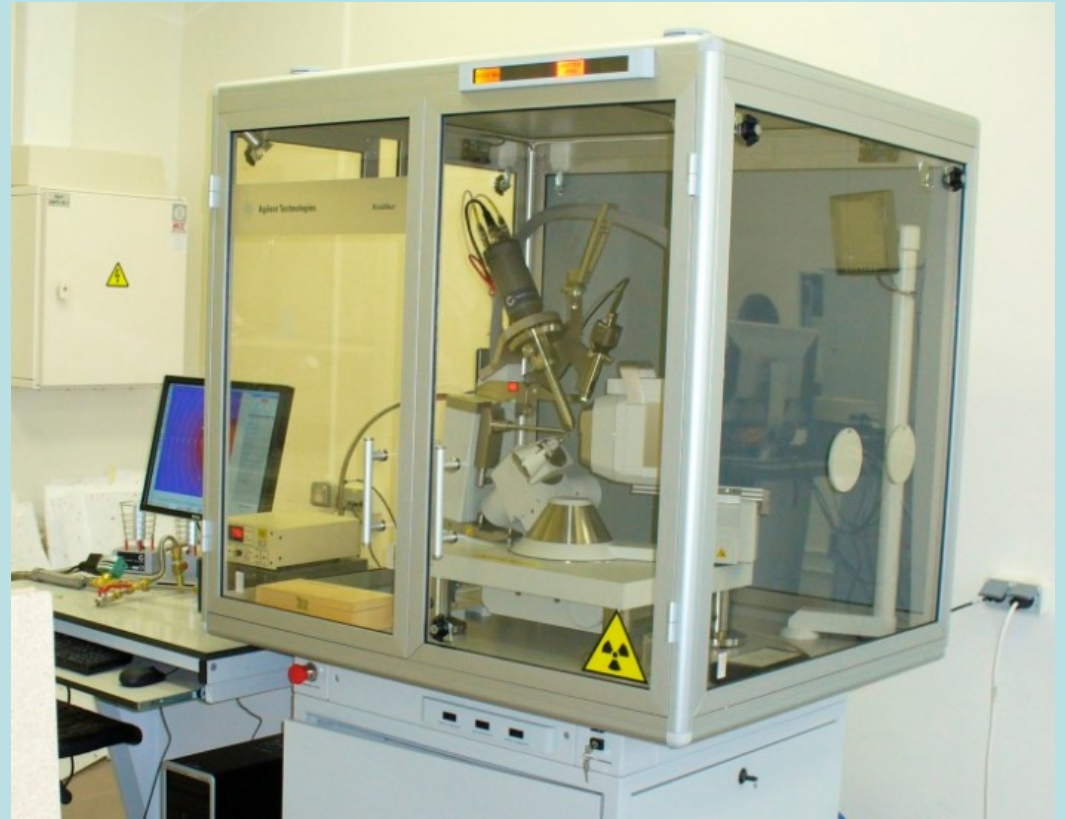
В 1913 году независимо от Л. Брэгга вывел условия интерференционного отражения рентгеновских лучей от кристаллов (*формула Брэгга — Вульфа*), положенные в основу рентгеновской спектроскопии. Первый в России начал рентгеноструктурные исследования.

Внешняя среда достаточно искусно маскирует собственную симметрию кристалла. Это приводит к тому, что грани одной простой формы, равные по своим физическим характеристикам геометрически могут сильно отличаться в реальном кристалле друг от друга, что может привести к ошибкам в определении симметрии кристалла. В этой связи визуального осмотра образца может оказаться недостаточно, исследователю приходится определять положения граней, группировать их по простым формам более строгим образом, а не «на глазок»



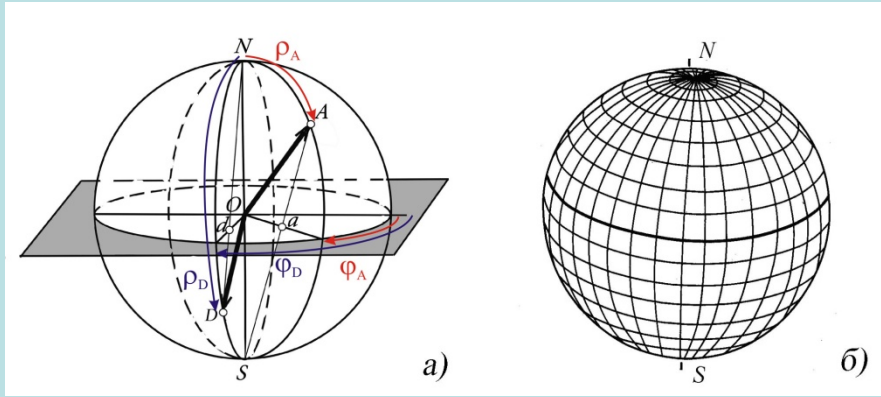
Прикладной гониометр времен Роме де Лиля

Современные гониометры позволяют не только определять углы между гранями, но и определять их сферические координаты. Таким образом, нормаль к каждой грани получает свои координаты (аналог GPS отметки), что строго ее фиксирует положение, но не на местности, а на сфере проекций. Это помогает определять симметрию даже очень небольших кристаллов (гониометры, входящие в состав современных приборов, позволяют определять координаты граней образцов размером в десятые и сотые доли миллиметра), а также кристаллов с неравномерно развитыми гранями, группировать грани по принадлежности к разным простым формам и так далее.



Слева - учебный гониометр второй половины 20-ого века, справа - гониометрический блок современного монокристалльного рентгеновского дифрактометра

# Проецирование



Каждая точка на сфере проекций имеет две координаты (как в географии) – **широта** (обозначается греческой буквой  $\rho$ ) и **долгота** (обозначается греческой буквой  $\varphi$ ).

В кристаллографии и географии эти координаты снимаются различными способами: в кристаллографии широта отсчитывается не от Гринвича, а от меридиана, совпадающего с положительным выходом оси  $y$ . Этот меридиан выбирается в качестве 0-ого ( $\varphi = 0^\circ$ , он же имеет  $\varphi = 360^\circ$ ). Таким образом, каждая точка на сфере имеет долготу от 0 до  $360^\circ$ . Широта (координата  $\rho$ ) отсчитывается по меридиану, проведенному через исследуемую точку «А» в направлении от северного полюса  $N$  к южному полюсу ( $S$ ).  $\rho$  на северном полюсе  $N=0^\circ$ , на экваторе  $\rho = 90^\circ$ , а на южном полюсе  $S \rho = 180^\circ$  (Скотт и Амундсен были бы слегка удивлены).



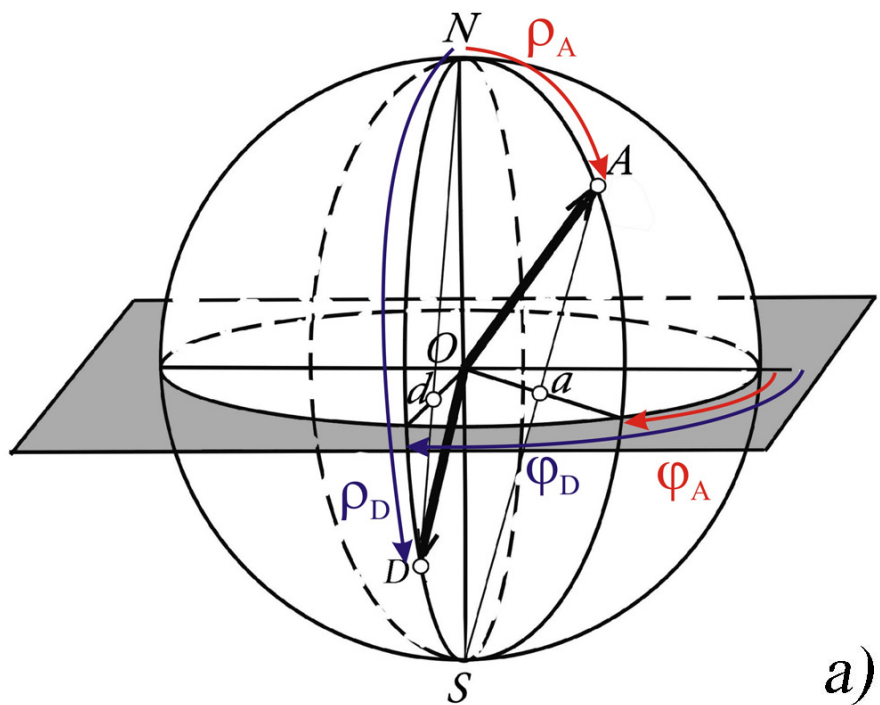
Роберт Фалкон Скотт  
Достиг точки с  $\rho = 180^\circ$   
17 января 1912 года,  
погиб на обратном пути



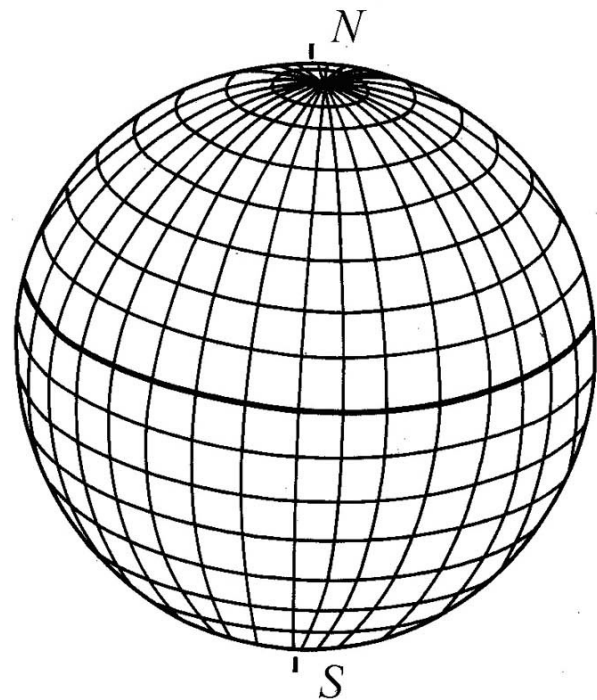
Руаль Амундсен  
Достиг точки  $\rho = 180^\circ$   
14 декабря 1911 года.  
Погиб позже (1928 г.)







a)



б)

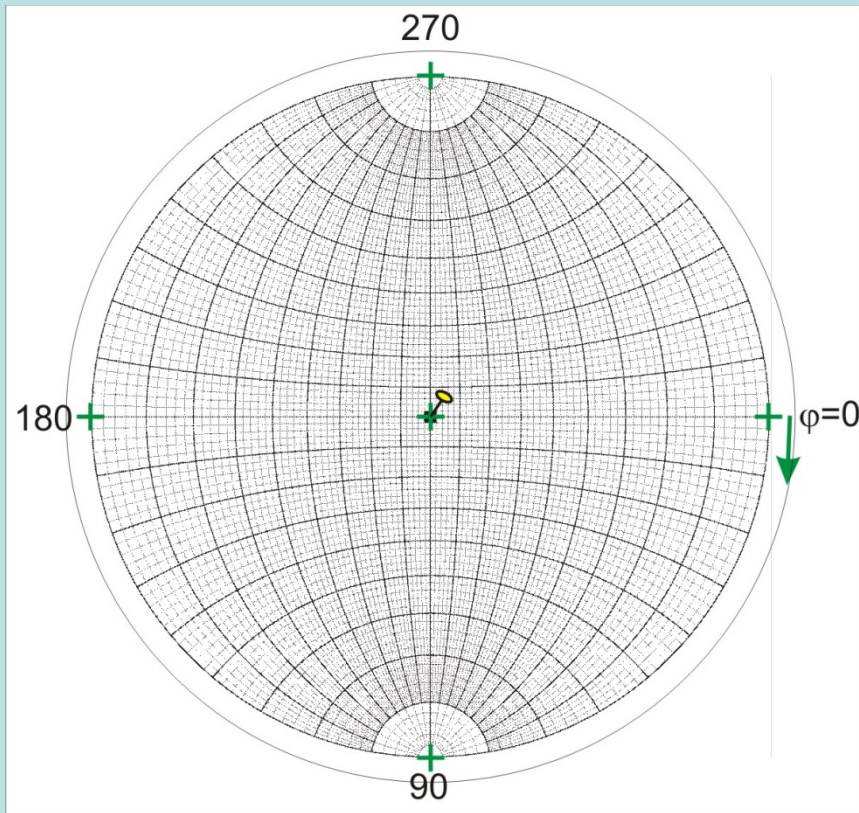
a) измерение сферических координат точек  $A$  и  $D$  в верхней и нижней полусфере; б) градуировка сферы проекций системой меридианов и параллелей

## Задача 1.

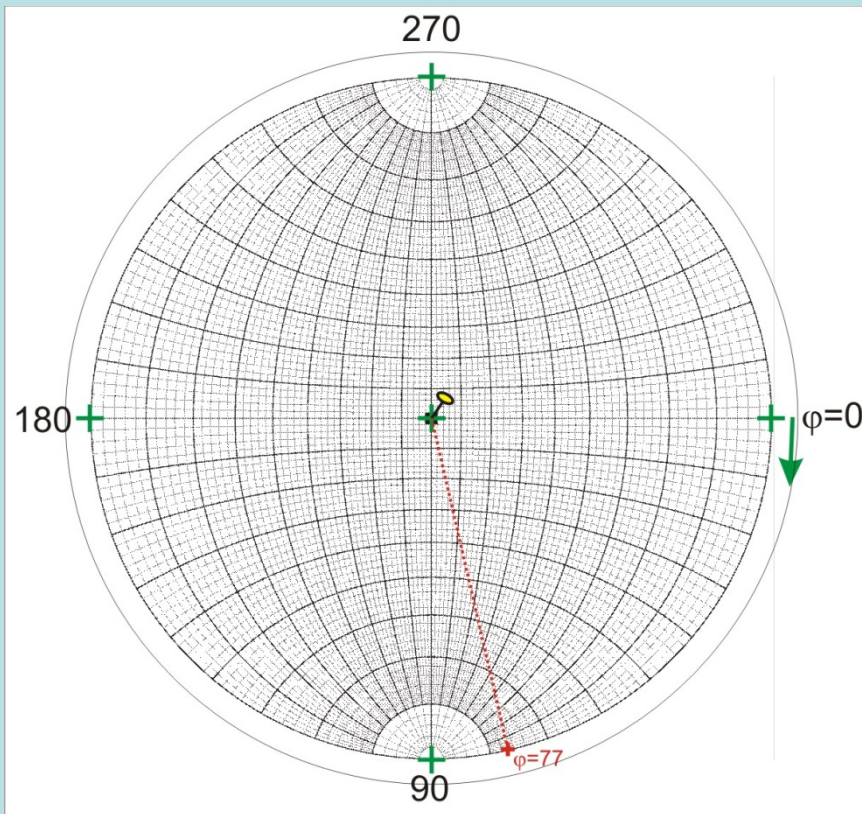
Построение проекций точек,  
заданных своими сферическими  
координатами:

$$A (\varphi = 77^\circ, \rho = 33^\circ,$$

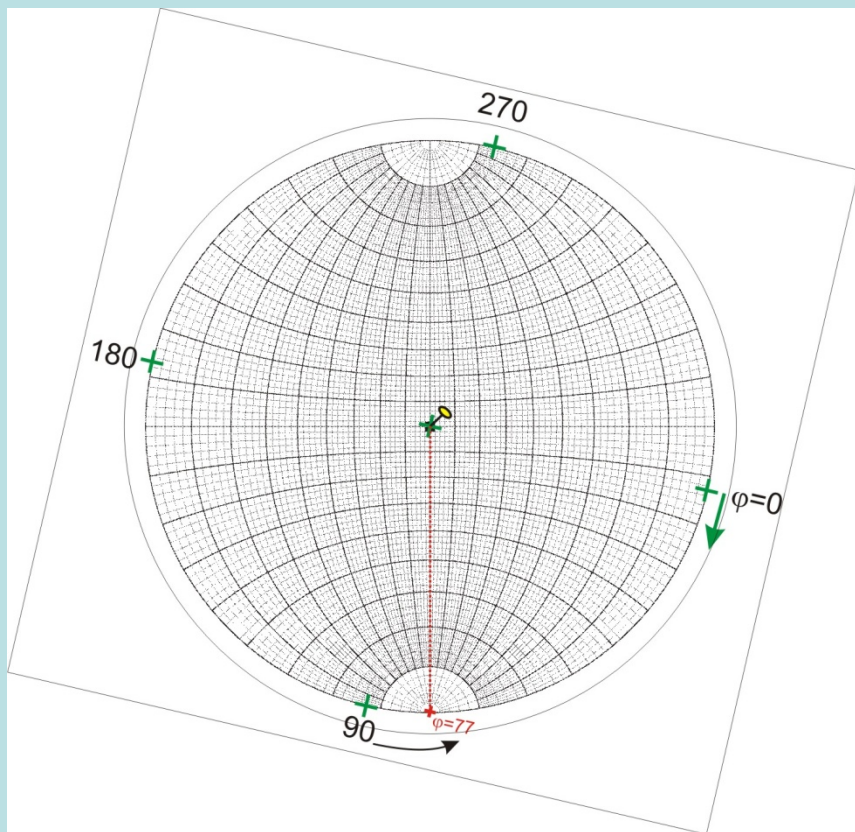
$$B (\varphi = 77^\circ, \rho = 113^\circ).$$



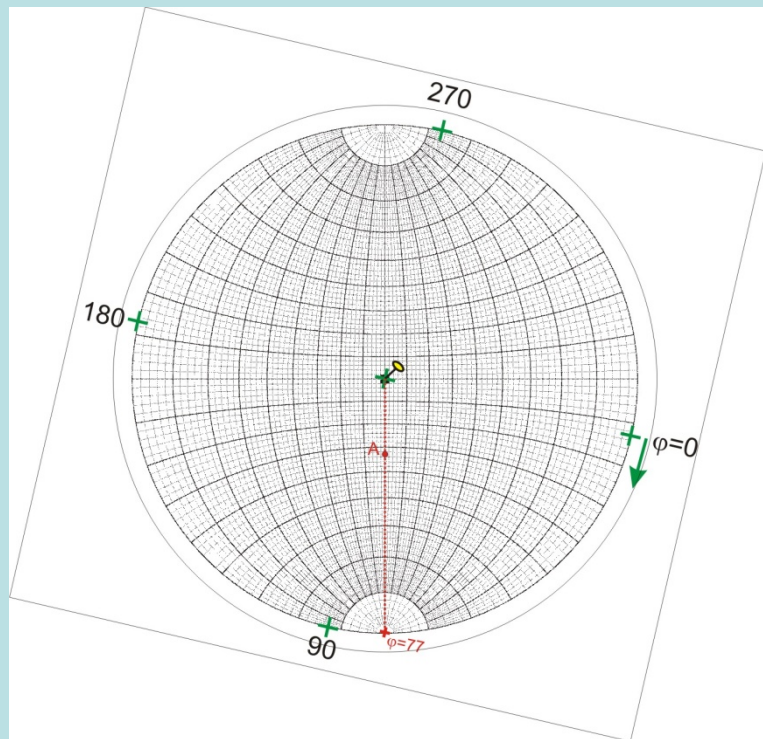
Помещаем сверху на трафарет лист кальки и фиксируем центр круга иголкой. Рисками на кальке обозначаем пересечения прямых меридианов ( $\varphi = 0^\circ$ ,  $\varphi = 90^\circ$ ,  $\varphi = 180^\circ$  и  $\varphi = 270^\circ$ ) с экватором ( $\rho = 90^\circ$ ). Риски лучше подписать. Они помогут нам всегда точно вернуть кальку в исходное положение.



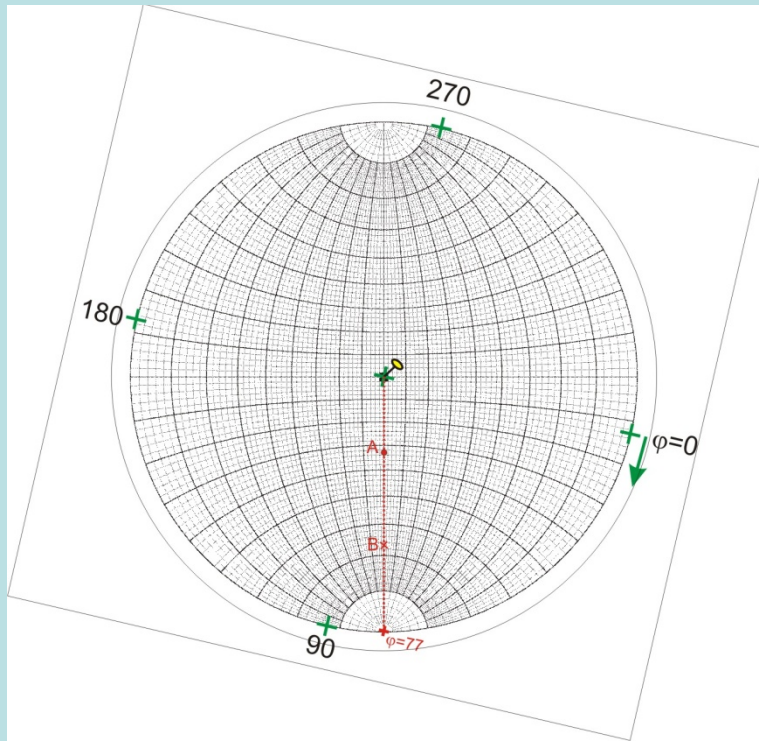
Отсчитываем значение долготы, которая в данной задаче для точек  $A$  и  $B$  одинакова, ( $\varphi = 77^\circ$ ) по окружности сетки Вульфа в направлении часовой стрелки. После чего делаем засечку на окружности, соответствующую  $\varphi_A = \varphi_B$ .



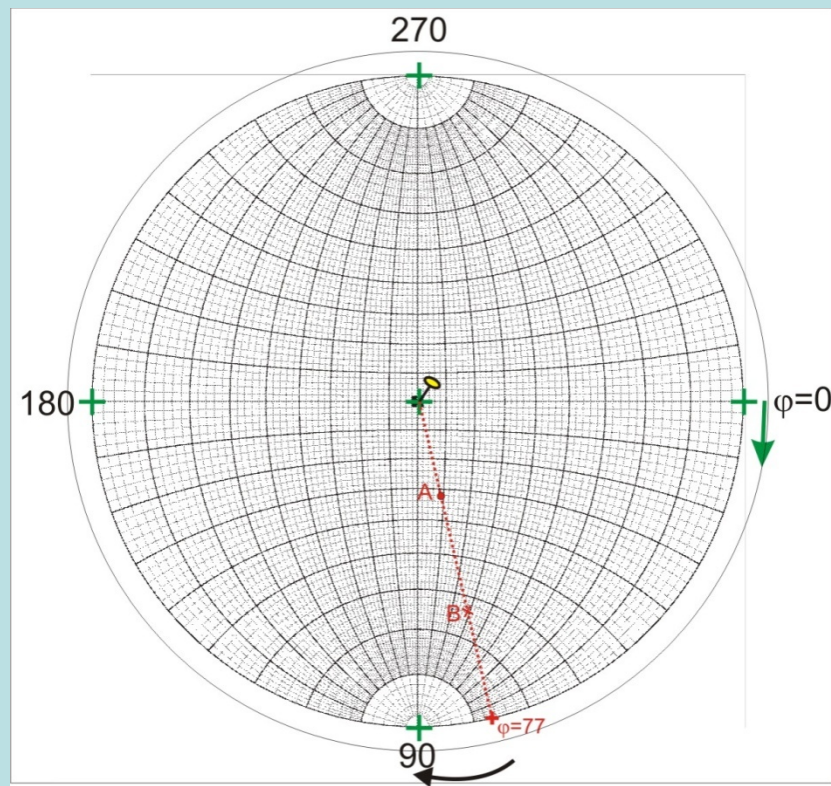
Вращением кальки (не нарушая при этом центрировки) совмещаем нанесенную засечку с любым (лучше ближайшим) из прямых меридианов сетки, имеющих ( $\varphi = 0^\circ$ ,  $\varphi = 90^\circ$ ,  $\varphi = 180^\circ$  и  $\varphi = 270^\circ$ ). В данном случае быстрее всего воспользоваться прямой линией с  $\varphi = 90^\circ$ .



Откладываем координату  $\rho_A = 33^\circ$  от центра сетки по диаметру в сторону засечки. Помним, что линии проведены через  $2^\circ$ , следовательно, искомая точка будет между линиями. Помним, что грани верхней полусферы ( $\rho < 90^\circ$ ) и вертикальных граней ( $\rho = 90^\circ$ ) обозначаются кружками. Наносим небольшой кружок, который является гномостереографической проекцией грани  $A$ , заданной своими сферическими координатами.



Откладываем координату  $\rho_B = 113^\circ$  от центра сетки по диаметру в сторону засечки. Помним, что линии проведены через  $2^\circ$ , следовательно, искомая точка будет также между линиями. Так как координата  $\rho > 90^\circ$ , то величина угла, превышающая  $90^\circ$  ( $113^\circ - 90^\circ = 23^\circ$ ), откладывается по этому диаметру, но уже в обратном направлении – от окружности к центру круга. Грань обозначается крестиком, так как принадлежит нижней полусфере.



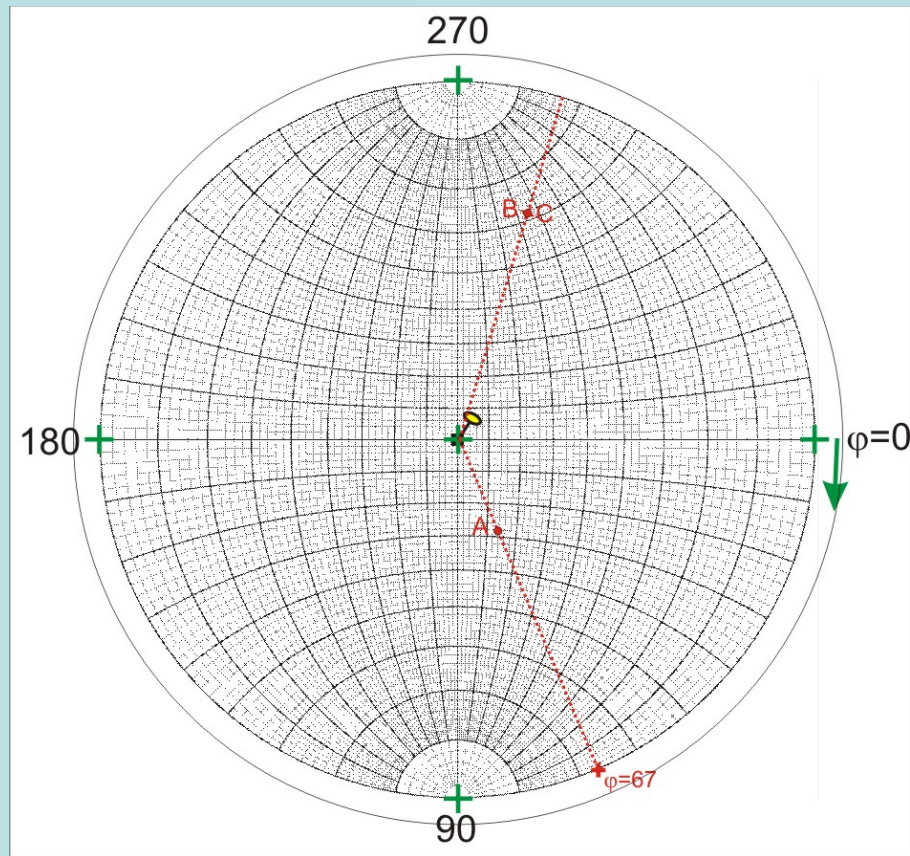
Каждой нанесенной точке (границы) присваивается номер или буквенное обозначение. После этого не забываем вернуть кальку в исходное положение, используя опорные риски. Задача решена.



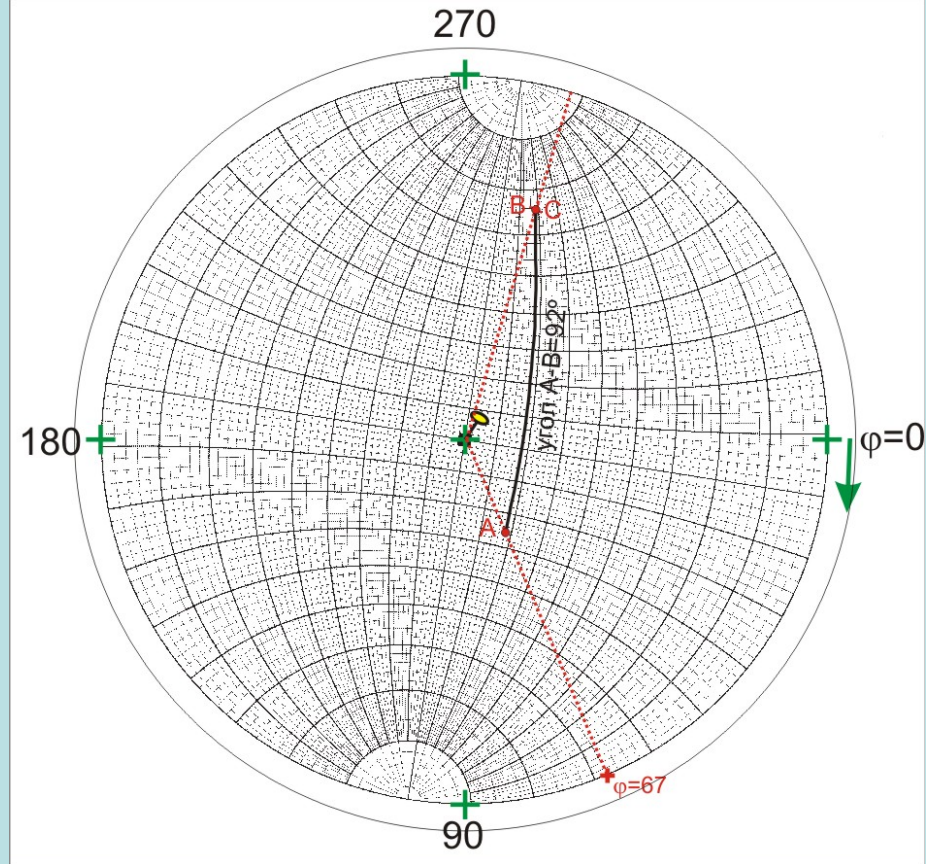
## Задача 2.

Измерение угла между точками,  
заданными своими сферическими  
координатами  $\varphi^\circ$  и  $\rho^\circ$ :

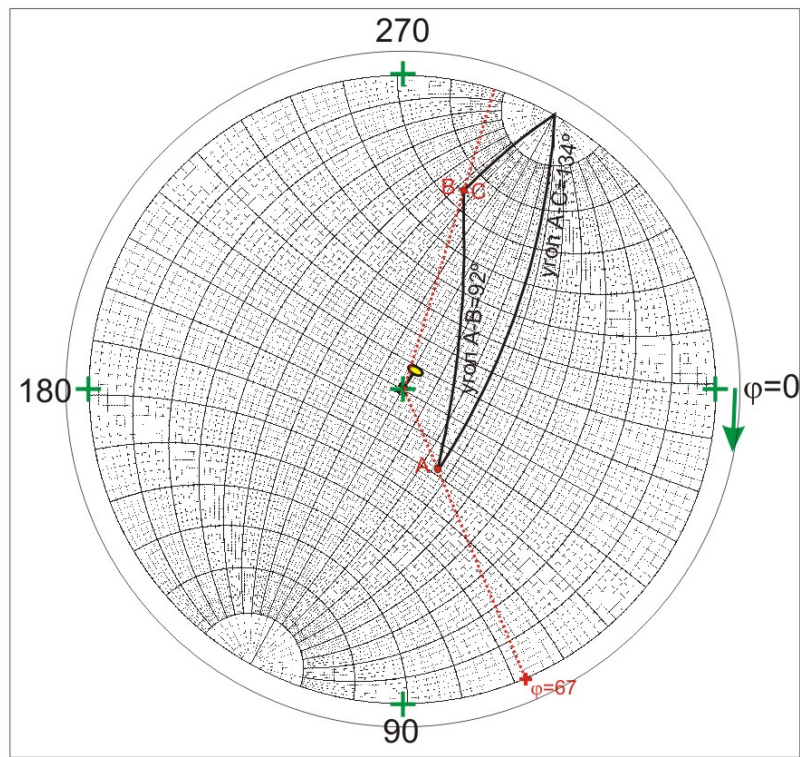
$A (67^\circ, 31^\circ), B (287^\circ, 67^\circ)$   
и  $A (67^\circ, 31^\circ), C(287^\circ, 113^\circ)$ .



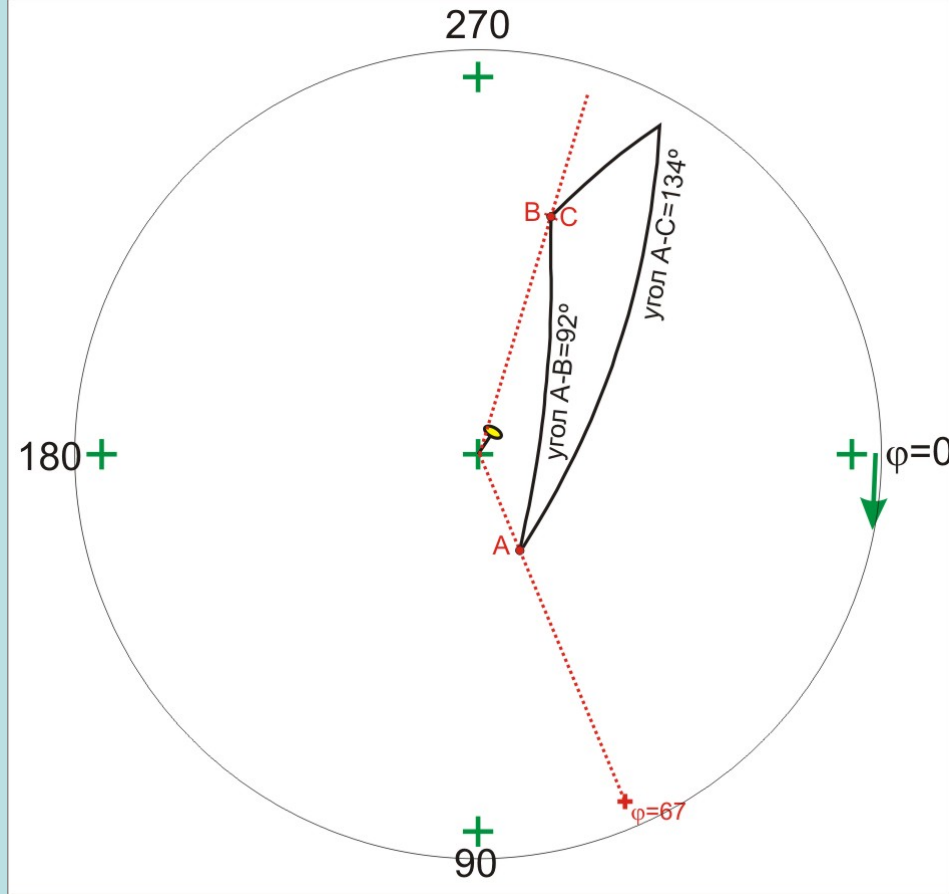
Помещаем сверху на трафарет лист кальки и фиксируем центр круга иголкой. Рисками на кальке обозначаем пересечения прямых меридианов ( $\varphi = 0^\circ$ ,  $\varphi = 90^\circ$ ,  $\varphi = 180^\circ$  и  $\varphi = 270^\circ$ ) с экватором ( $\rho = 90^\circ$ ). По схеме, приведенной ранее, наносим положения точек  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Возвращаем кальку в исходное положение.



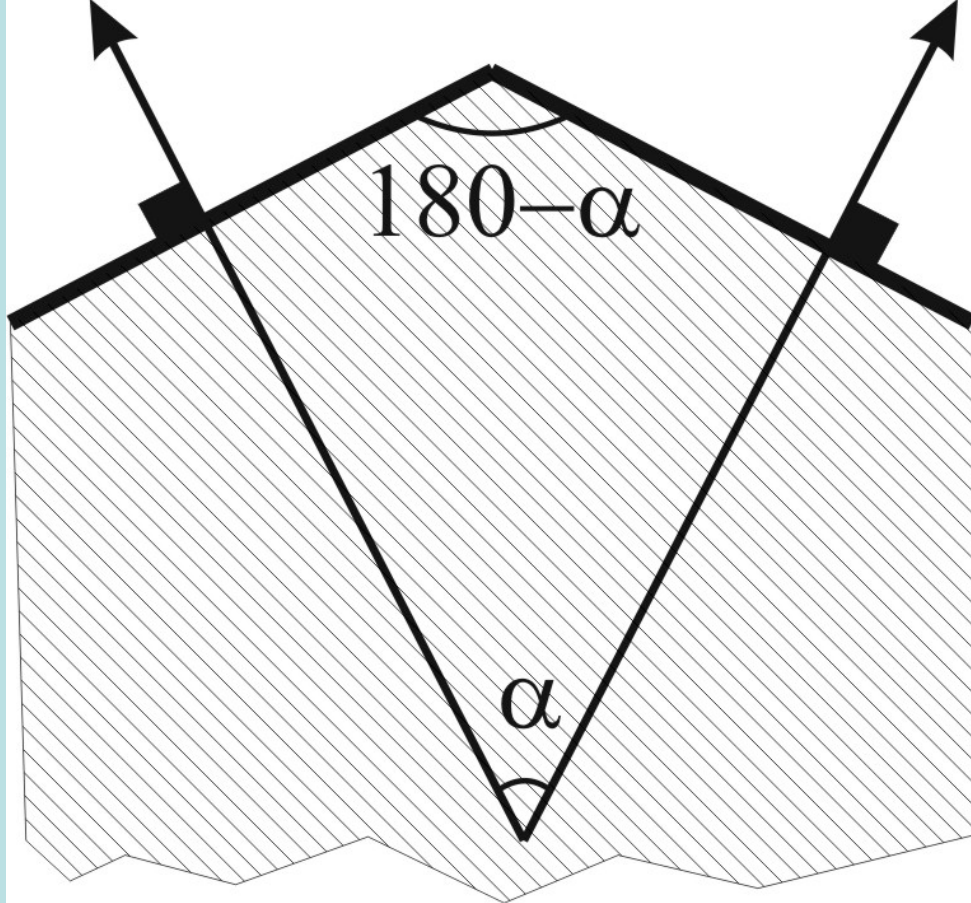
Вращением кальки точки  $A$  и  $B$  выводятся на один меридиан. Поскольку значения координат  $\rho^\circ$  для обеих точек будут меньше  $90^\circ$ , то точки принадлежат одной (верхней) полусфере. Отсчет угла между точками производится по отрезку меридиана сетки Вульфа, заключенного между ними. Рисуем карандашом эту дугу.



Поскольку точки  $A$  и  $C$  принадлежат разным полусферам, то их необходимо вращением кальки вывести на два симметричных меридиана сетки. Из двух возможных углов (дающих в сумме  $360^\circ$ ) выбирают, естественно меньший, который равен в данном случае  $134^\circ$ . Рисуем карандашом эту дугу.



Возвращаем кальку в исходное положение, используя опорные риски. Подписываем на дугах величины углов. Смотрим на наше творчество на кальке, убрав сетку Вульфа.



**Важно!** Следует иметь в виду, что если две точки (например, *A* и *B*) являются гномостереографически проекциями граней, то угол  $\alpha = 134^\circ$  между ними не что иное, как угол между нормальями к этим граням.

Угол же между самими гранями соответствует дополнительному углу, т. е.  $180^\circ - \alpha$  (рис). В нашем случае угол между гранями (измеренный прикладным гониометром) *A* и *B* составит  $180^\circ - 134^\circ = 46^\circ$ .

## Задание на дом

Используя сетку Вульфа, как стереографическую проекцию Земли, отметьте на ней положение **любых** 4 географических объектов из следующего списка (убедительная просьба брать разные):

Город	Широта	Долгота	Город	Широта	Долгота
Лондон	51,51° с.ш.	0°	Душанбе	38,57° с.ш.	68,79° в.д.
Мехико	19,49° с.ш.	99,14° з.д.	Москва	55,76° с.ш.	37,62° в.д.
Дели	28,67° с.ш.	77,22° в.д.	Пекин	39,91° с.ш.	116,40° в.д.
Сидней	33,86° ю.ш.	151,21° в.д.	Мирный (Антарктида)	66,93° ю.ш.	93,01° в.д.
Южный полюс	90° ю.ш.	-	Северный полюс	90° с.ш.	-
Буэнос-Айрес	34,60° ю.ш.	58,38° з.д.	Санкт-Петербург	59,95° с.ш.	30,32° в.д.
Токио	35,69° с.ш.	139,69° в.д.	Мельбурн	37,82° ю.ш.	144,96° в.д.
Сан-Франциско	37,77° с.ш.	122,43° з.д.	Кейптаун	33,92 ю.ш.	18,48° в.д.

При помощи сетки Вульфа определите расстояния по поверхности Земного шара между тремя возможными пунктами, считая радиус Земли равным 6350 км.

## ***Что надо иметь в виду***

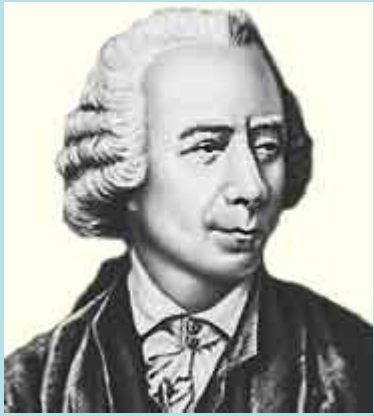
***1) Аккуратно преобразовать географические координаты в кристаллографические***

***2) Выполнить страшный математический расчет по определению длины в километрах 1 градуса по поверхности Земного шара***



**Теорема Эйлера**  
**(и ее наглядное доказательство**  
**с помощью машины времени)**





## *Леонард Эйлер (1707-1783 гг.)*

Современный вид сферической тригонометрии придал Эйлер - математик, физик, астроном. Швейцарец по происхождению он с 1727 г. работал в России, а с 1741 г. – в Берлине ( а с 1766 г. – опять в России). Автор более 800 работ, оказавших значительное влияние на развитие науки.

# Теория групп

*Группой* называется множество объектов ( $G$ ) любой природы с заданной бинарной операцией ( $*$ ), если для любой пары элементов ( $a$  и  $b$ ) этого множества  $G$  определен третий результирующий элемент  $c = a * b$  того же множества.

При этом группой будет лишь такое множество с заданной бинарной операцией, для которого выполняются следующие условия:

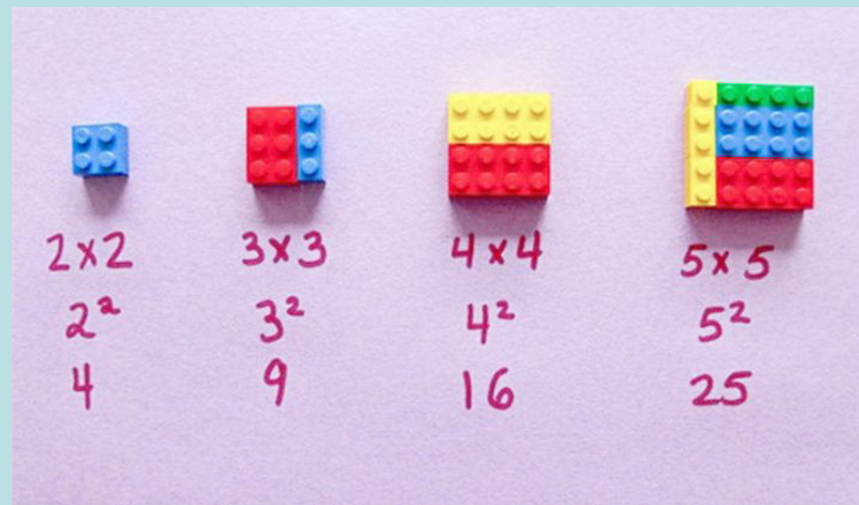
1) ассоциативности :  $(a * b) * c = a * (b * c)$

2) существования единичного члена ( $e$ ) - такого единичного элемента, что для любого элемента группы будет выполняться равенство  $e * a = a * e = a$

3) обратимости – для любого элемента  $a$  существует элемент  $a^{-1}$  из того же множества, называемый обратным элементом к элементу  $a$ , такой, что  $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ .

Главной особенностью симметрических операций является то, что полная их совокупность для любого объекта *всегда образует группу*. Это позволяет теорию симметрии кристаллов рассматривать как раздел математической теории множеств и **использовать математический аппарат теории абстрактных групп** при изучении законов симметрии кристаллов, придавая им конкретное геометрическое или физическое содержание.

И наоборот:  
ПОЗВОЛЯЕТ ПОНЯТЬ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ АБСТРАКЦИИ

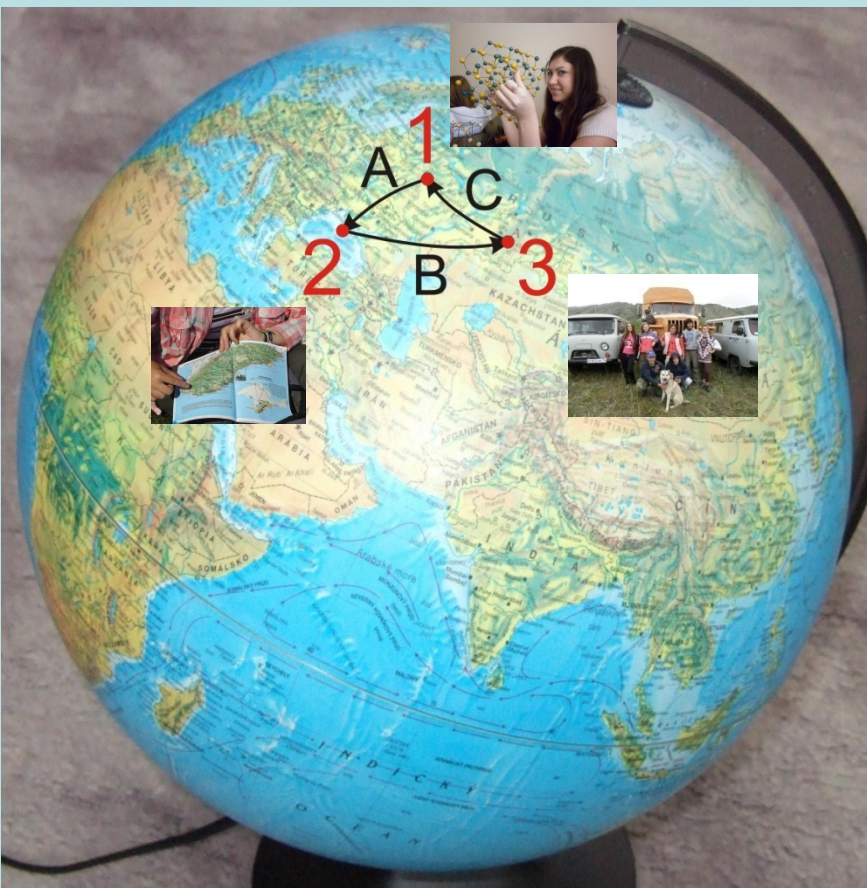


С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЖИВЫХ  
КРИСТАЛЛОГРАФИЧЕСКИХ  
ПРИМЕРОВ

Итак, мы живем в мире волшебных и обычных осей, осуществляющих операцию поворота. При этом объект наблюдения, допустим, точка выхода на сферу линии нормали к грани совершает некоторое путешествие по сфере проекций из точки 1 в точку 2 вокруг некоторой воображаемой оси, проходящей через начало координат.

Для наглядности сядем в машину времени, перенесемся в лето и ощутим себя студентами геохимиками второго курса геологического факультета МГУ. Мы сдали 3-юю весеннюю сессию и отправляемся первого июня на геологическую практику из Москвы в Симферополь (*на поезде страшно, так что летим*).





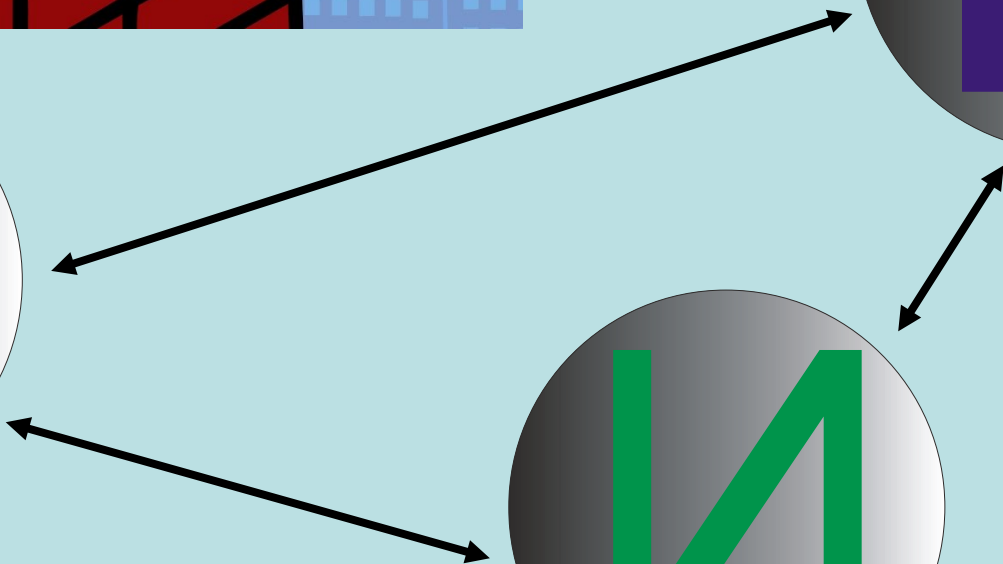
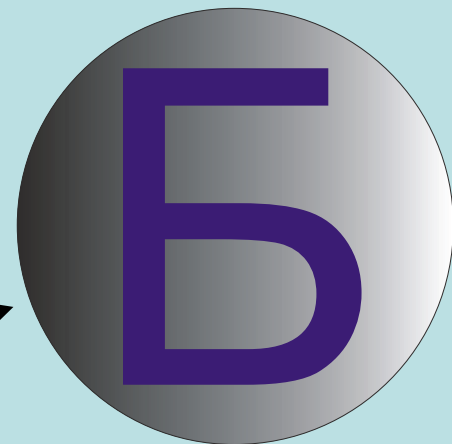
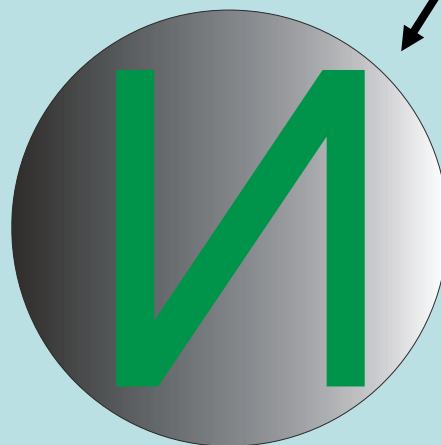
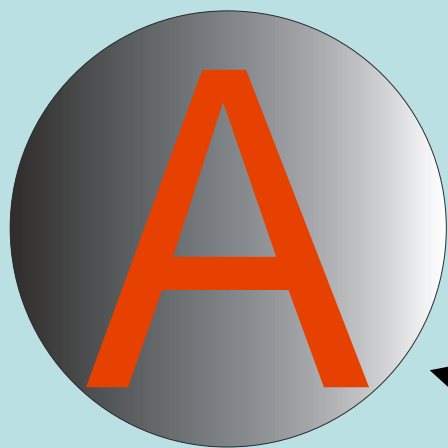
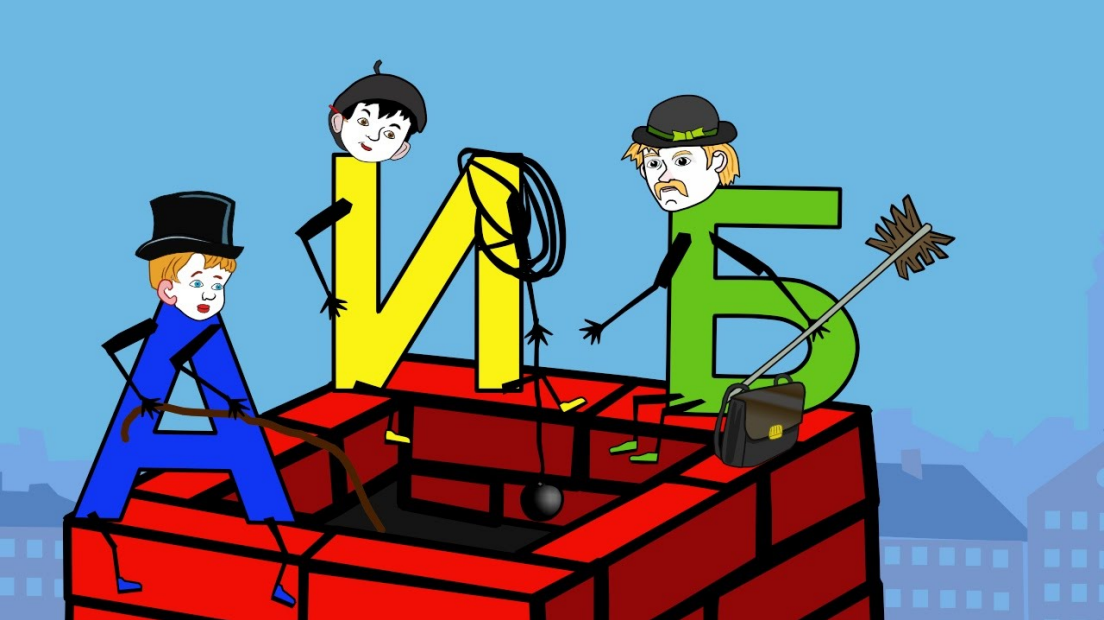
Стрелками показано перемещение студентов при последовательном вращении вокруг пересекающихся в центре Земли поворотных осей симметрии. А, В и С – путь по поверхности Земли:  
А – Москва - Симферополь,  
В – Симферополь - Миасс,  
С – Миасс – Москва.

Сформулируем это в виде правила: *две операции симметрии (А и В), встретившись вместе, всегда порождают третью (С). При этом они равноправны: А и С порождают В, В и С → А. Более того,  $A+B+C=1$  (возникает операция идентичности: студенты изначально были в Москве, в ней в итоге и оказались, правда, уже в августе).*



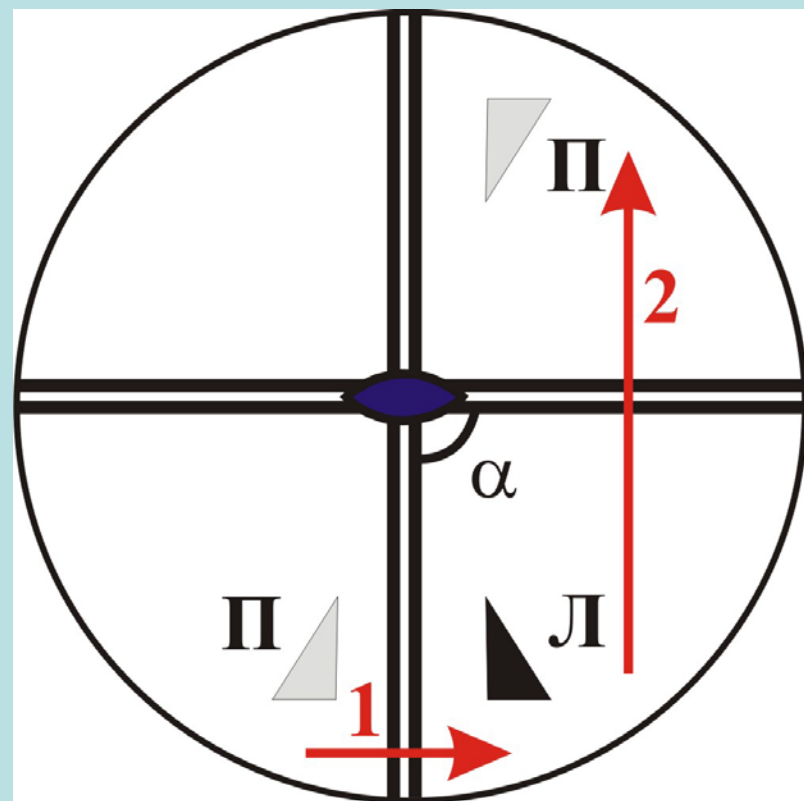
*Эти правила теории групп приводят к знаменитой теореме взаимодействия элементов симметрии – осевой теореме Эйлера (Правило **А И Б**).*

*Взаимодействие двух осей симметрии  $n$ -го порядка, поворотных или инверсионных, приводит к возникновению проходящей через точку их пересечения третьей оси симметрии. При этом результирующая ось окажется поворотной, если исходными будут две одинаковые оси (обе поворотные или обе инверсионные), и инверсионной, если исходные оси будут разного типа.*



## Частные случаи

**Случай 1.** ( $A = P$ ,  $B = P$ ). Две плоскости пересекаются под определенным углом, например 90 градусов.

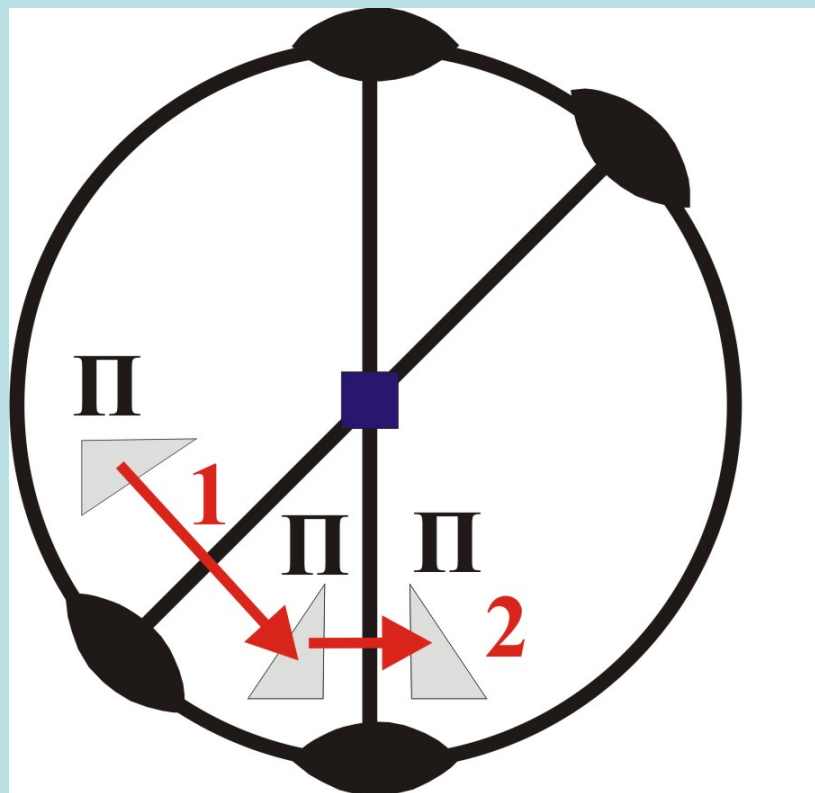


Если рассмотреть этот пример в общем виде, то получится следующее правило:

*Если встречаются под углом  $\alpha$  две инверсионные оси 2 порядка, то результатом их взаимодействия будет поворотная ось порядка  $360/2\alpha$ .*

## Частные случаи

Случай 2. ( $A = L_2$ ,  $B = L_2$ ). Две оси второго порядка пересекаются под определенным углом, например,  $45^\circ$

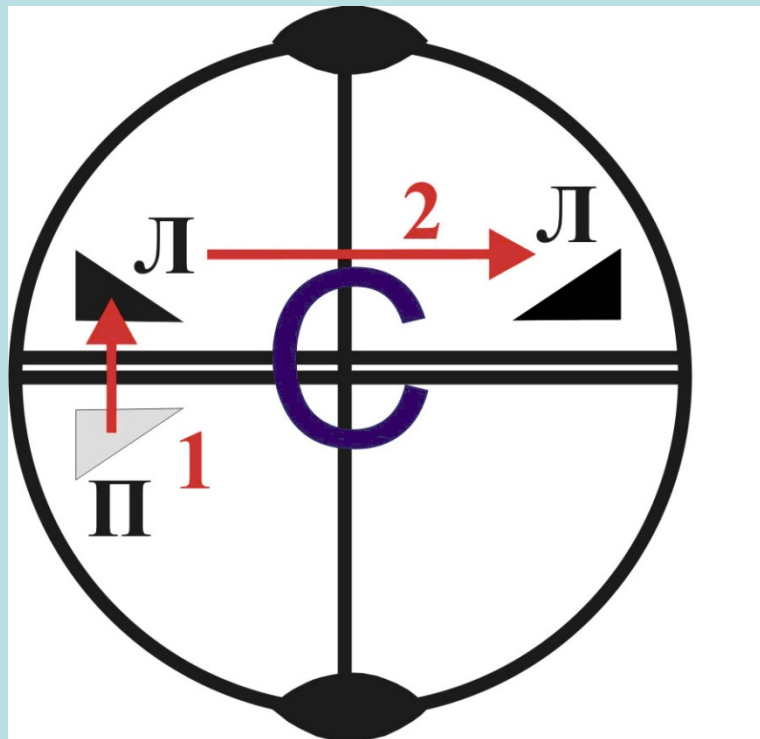


Если рассмотреть этот пример в общем виде, то получится следующее правило:

*Если встречаются под углом  $\alpha$  две поворотные оси второго порядка, то результатом их взаимодействия будет поворотная ось порядка  $360/2\alpha$ .*

## Частные случаи

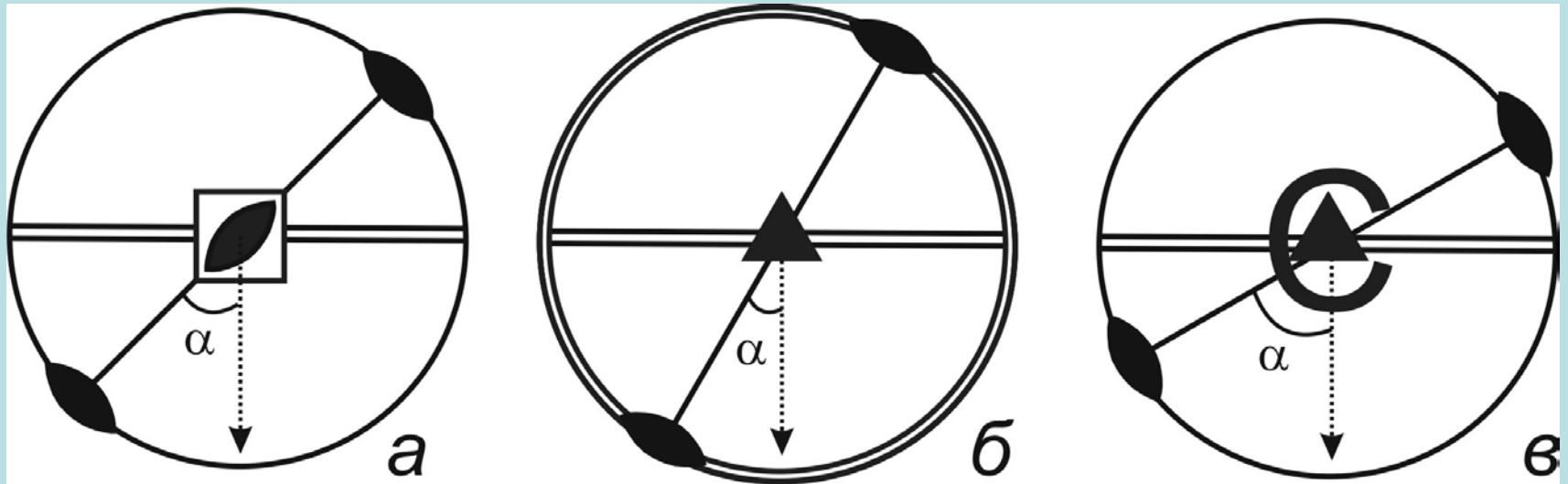
### Случай 3. ( $A = P, B = L_2$ )



Операция отражения в зеркальной плоскости с последующим поворотом вокруг вертикальной оси 2-го порядка, перпендикулярной этой плоскости, приводит к появлению нового элемента симметрии – центра инверсии  $C = \langle C \rangle$ .

Это сочетание ( $L_2-P-C$ ) очень важно и часто встречается в кристаллах. Обратим внимание, что при наличии центра и плоскости возникнет ось второго порядка, а при наличии центра и оси второго порядка – плоскость. А если рассмотреть этот пример в общем виде?

*Если встречаются под углом  $\alpha$  поворотная и инверсионная ось второго порядка, то результатом их взаимодействия будет инверсионная ось порядка  $360/2\alpha$ .*



В результате взаимодействия инверсионной и поворотной оси

- а) под 45 градусов возникнет –
- под 30 градусов  $-(= L_3P)$
- под 60 градусов  $-(= L_3C)$

***В следующий раз***

***Некоторые основы  
сферической тригонометрии.  
Вывод всех классов симметрии***

***А также: некоторые кристаллографические аспекты  
войны 1854-1855г. (применительно к кампании на Белом  
море)***



***!*** **Материал думательно-веселый**