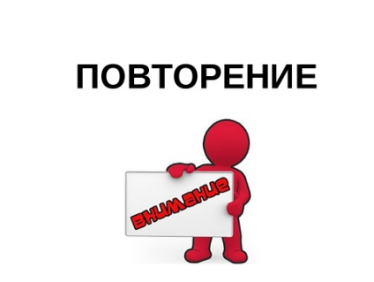
ЛЕКЦИЯ 4

Некоторые основы сферической тригонометрии.

Вывод классов симметрии

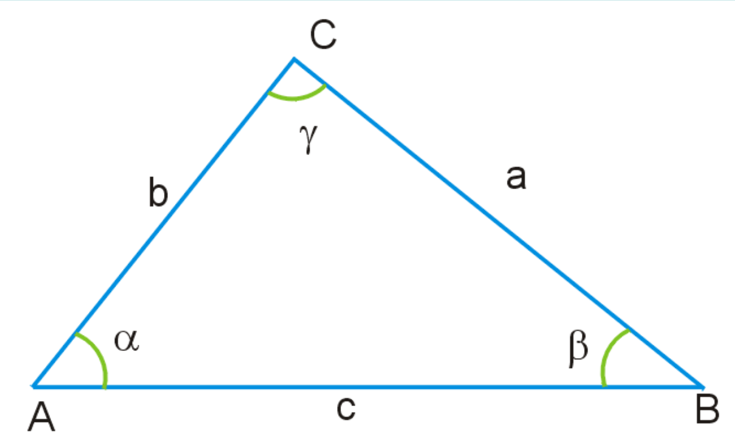
***А также**: некоторые кристаллографические аспекты войны 1854-1855г. (применительно к кампании на Белом море)*

Геометрия на плоскости и на поверхности сферы разительно отличаются друг от друга



Например.

На плоскости сумма внутренних углов треугольника всегда равна 180 градусам

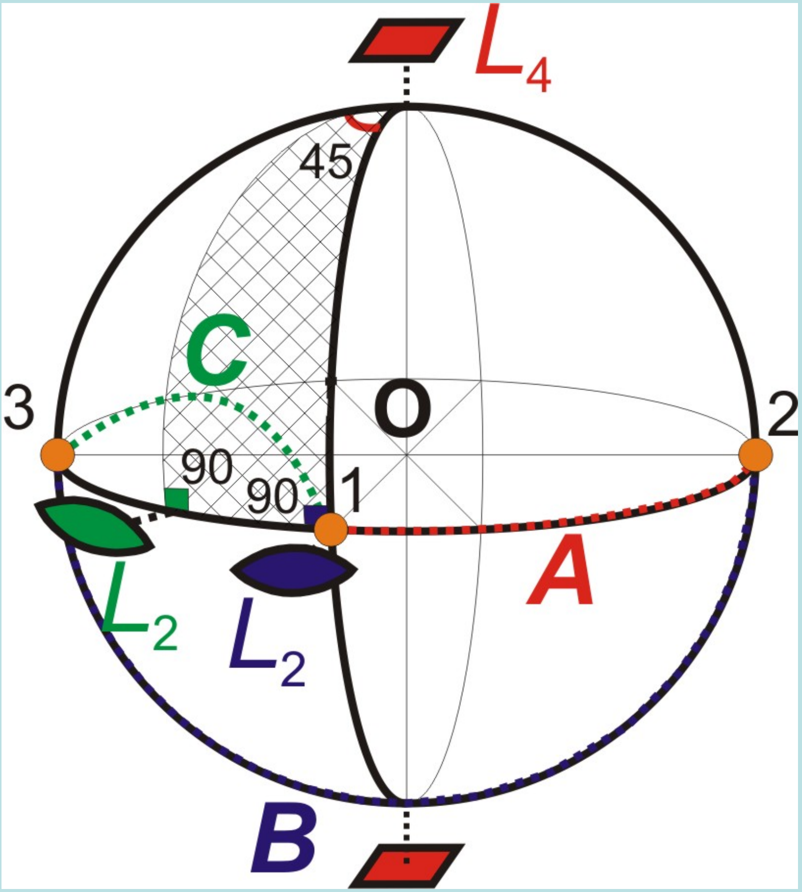


А на сфере – не совсем…..

Выполняя домашнее задание (домашнее задание все сделали, не так ли?) мы не задумывались о величине дуги перемещения *A*, *B* и *C* по поверхности Земли.

Однако, для наличия осей вращения (поворотных или инверсионных) **с целым *n*** на сферический треугольник 1-2-3, символизирующий перелет на самолете между тремя городами Земли

накладываются определенные дополнительные условия существования.

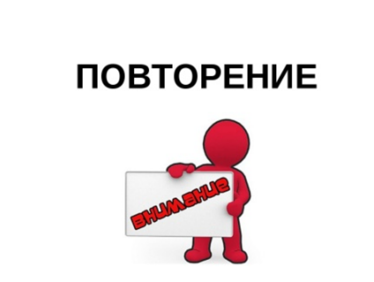


К взаимосвязи углов поворота осей и перемещения точки по поверхности сферы. *A*, *B* и *C* – путь, пройденный точкой в результате последовательного поворота вокруг осей L_4, L_2 и L_2, соответственно.

Сферический треугольник с углами 45˚, 90˚ и 90˚ (сумма внутренних углов 225˚) выделен штриховкой.

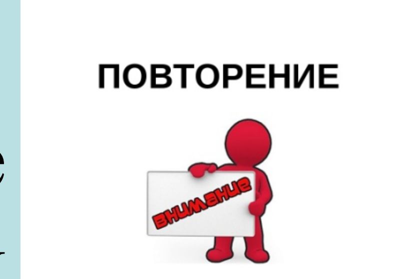
Таким образом:

В сферическом треугольнике АВС, углы А, В и С при вершинах равны **ПОЛОВИНАМ** элементарных углов поворота осей, осуществляющих повороты, т. е. А = α/2, В = β/2 и С = γ/2.



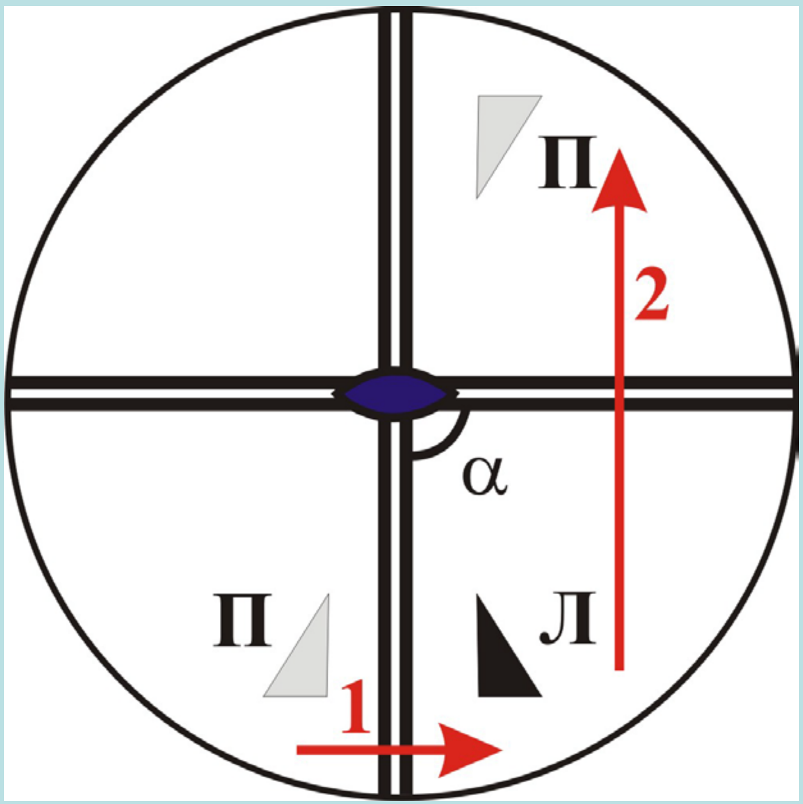
Правила теории групп приводят к знаменитой теореме взаимодействия элементов симметрии – осевой теореме Эйлера.

Взаимодействие двух осей симметрии n-го порядка, поворотных или инверсионных, приводит к возникновению проходящей через точку их пересечения третьей оси симметрии. При этом результирующая ось окажется поворотной, если исходными будут две одинаковые оси (обе поворотные или обе инверсионные), и инверсионной, если исходные оси будут разного типа.



Частные случаи

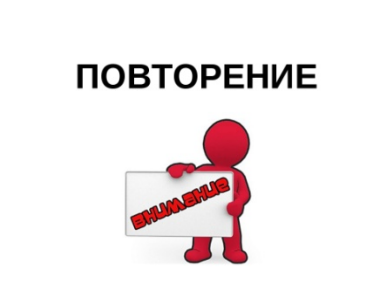
Случай 1. (А = *Р*, В = *Р*). Две плоскости пересекаются под определенным углом, например 90 градусов.



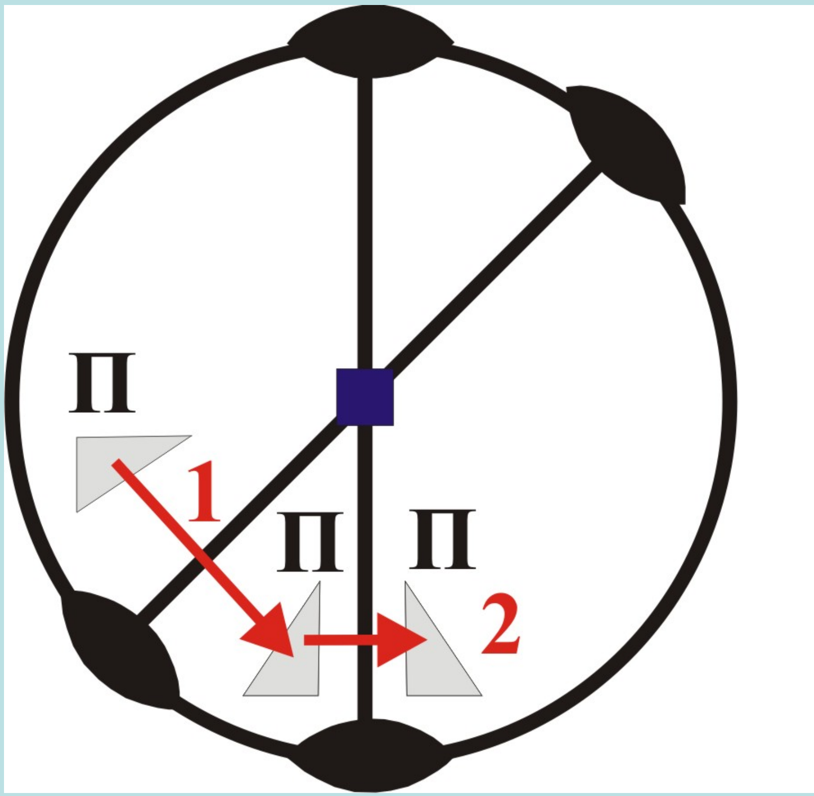
Если рассмотреть этот пример в общем виде, то получится следующее правило:

Если встречаются под углом α *две* ***инверсионные*** *оси 2 порядка, то результатом их взаимодействия будет* ***поворотная*** *ось порядка 360/2*α*.*

Частные случаи



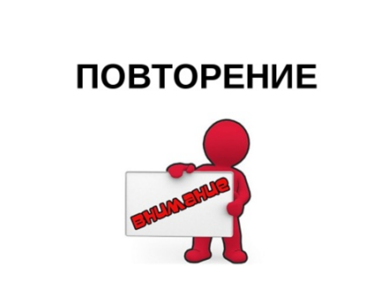
Случай 2. (A = L_2, B = L_2). Две оси второго порядка пересекаются под определенным углом, например, 45°



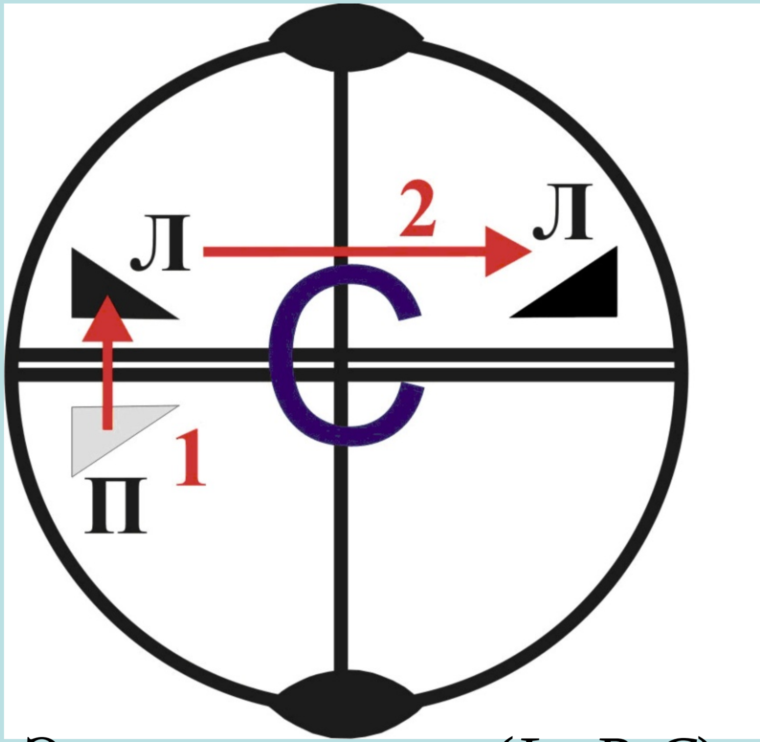
Если рассмотреть этот пример в общем виде, то получится следующее правило:

Если встречаются под углом α *две* ***поворотные*** *оси второго порядка, то результатом их взаимодействия будет* ***поворотная*** *ось порядка 360/2а.*

Частные случаи

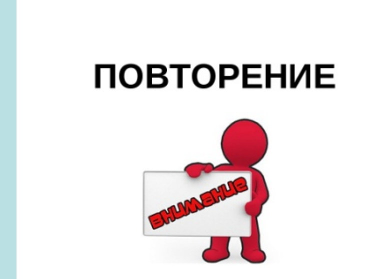


Случай 3. (А = P, В = L_2)

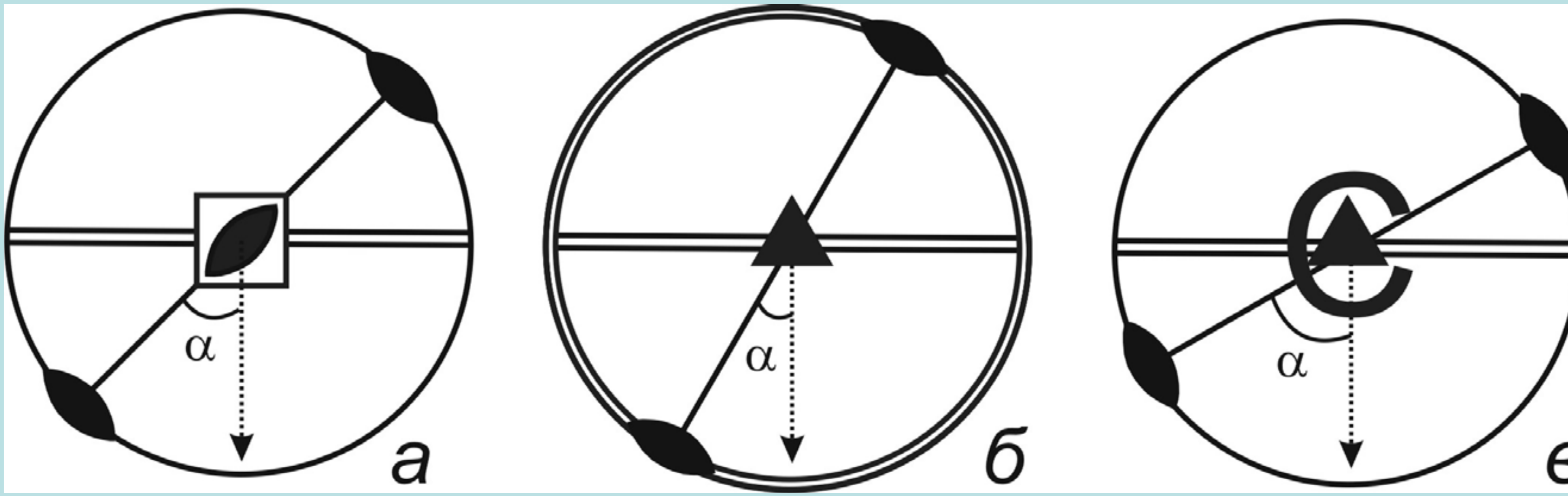


Операция отражения в зеркальной плоскости с последующим поворотом вокруг вертикальной оси 2-го порядка, перпендикулярной этой плоскости, приводит к появлению нового элемента симметрии – центра инверсии С = «С».

Это сочетание (L_2-P-C) очень важно и часто встречается в кристаллах. Обратим внимание, что при наличии центра и плоскости возникнет ось второго порядка, а при наличии центра и оси второго порядка – плоскость. А если рассмотреть этот пример в общем виде?



*Если встречаются под углом α **поворотная** и **инверсионная** ось второго порядка, то результатом их взаимодействия будет **инверсионная** ось порядка $360/2\alpha$.*



В результате взаимодействия инверсионной и поворотной оси

а) под 45 градусов возникнет –

под 30 градусов –(= L_3P)

под 60 градусов – (= L_3C)

Работая с кристаллами, исследователи обратили внимание на то, что элементы симметрии располагаются в них не случайно, а закономерным образом. Напомним, что полный набор элементов симметрии строго определенным образом располагающихся по отношению друг к другу называется ***классом симметрии***.

Число классов симметрии бесконечно (узнаем позже), но в кристаллах, где могут существовать только оси определенных целочисленных порядков, число классов закономерно сокращается до **тридцати двух.**

Эйлер также показал, что для сферических треугольников

Сумма углов (S) не должна превышать 540° и должна быть больше 180°

$$(180^\circ < S < 540^\circ)$$

+ А так как возможными для кристаллов могут быть лишь оси симметрии порядков 1, 2, 3, 4, 6 т.е. углы между сторонами сферического треугольника могут быть равны соответственно ***половинам элементарных углов поворотов этих осей***:

180°, 90°, 60°, 45° и 30° соответственно.

Допустимые сочетания углов:

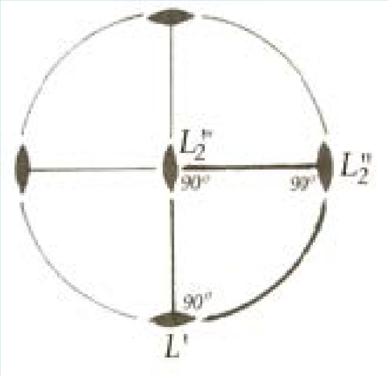
Сочетания осей	Сумма углов
$L_1\ L_1\ L_1$	540° совсем грустно… одни оси L_1
$L_2\ L_1\ L_1$	360+90=450° повеселее…
$L_3\ L_1\ L_1$	360+60=420° повеселее…
$L_4\ L_1\ L_1$	360+45=405° повеселее…
$L_6\ L_1\ L_1$	360+30=390° повеселее…

Допустимые сочетания углов:

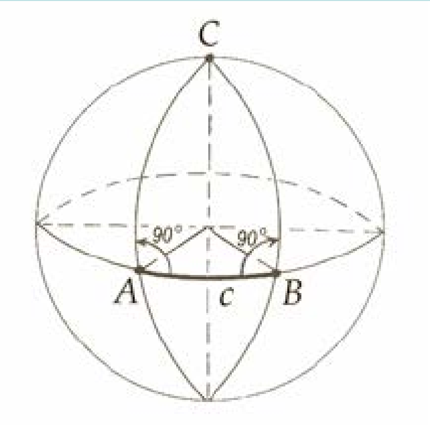
Сочетания осей   Сумма углов

$L_2\, L_2\, L_2$ $90° + 90° + 90° = 270°$

$L_2\, L_2\, L_1$ – *нет!! Понятно почему?*



$L_2\ L_2\ L_2$

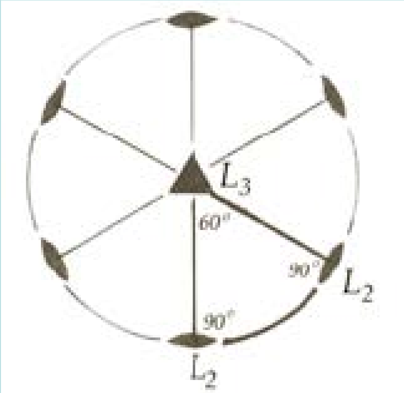


для этого треугольника все углы между осями окажутся равными 90°. Зафиксировав положения этих осей на сфере, можно вычертить и стереографическую проекцию полученного осевого класса симметрии

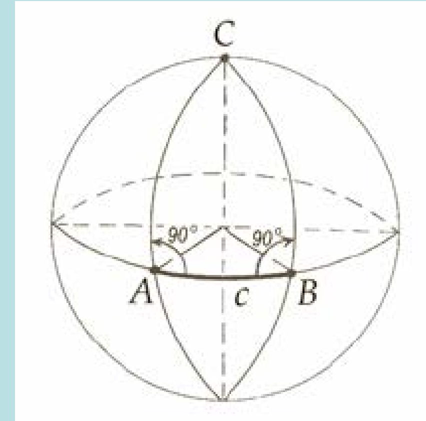
$3L_2$, где все оси 2-го порядка будут неэквивалентны друг другу

Допустимые сочетания углов:

Сочетания осей	Сумма углов
$L_2\,L_2\,L_2$	$90° + 90° + 90° = 270°$
$L_3\,L_2\,L_2$	$60° + 90° + 90° = 240°$



$L_3\, L_2\, L_2$

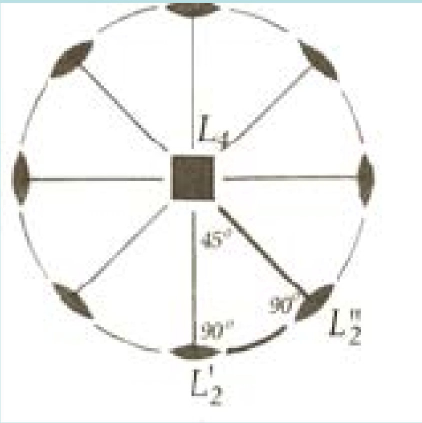


две стороны между осями L_3 - L_2 будут равны 90°, а угол между осями L_2 – L_2 = 60°. Нанеся выходы осей на сферу и построив стереографическую проекцию, получим (после размножения элементов симметрии друг другом) также осевой класс – $L_3 3L_2$, где все три оси 2-го порядка будут связаны поворотами на 120° вокруг оси L_3, а следовательно, эквивалентны

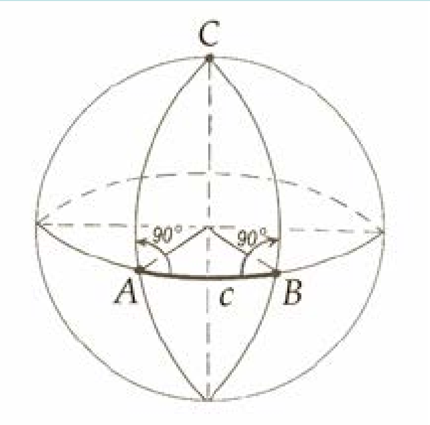
Допустимые сочетания углов:

Сочетания осей   Сумма углов

$L_2\, L_2\, L_2$	$90° + 90° + 90° = 270°$
$L3\, L_2\, L_2$	$60° + 90° + 90° = 240°$
$L_4\, L_2\, L_2$	$45° + 90° + 90° = 225°$



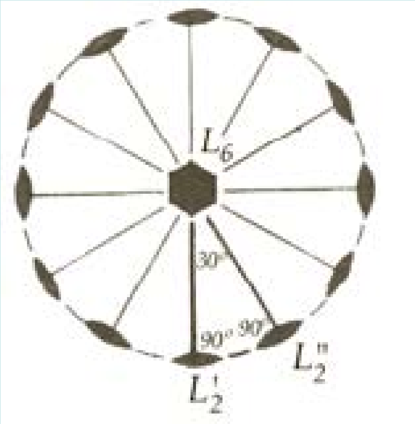
$L_4\ L_2\ L_2$



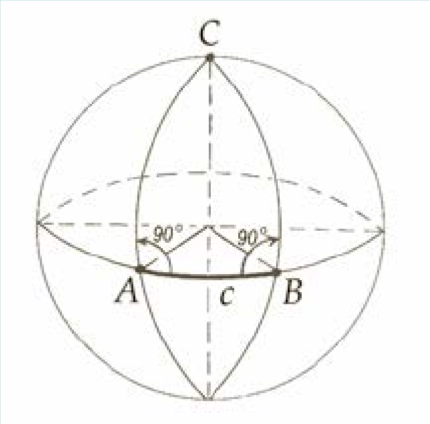
две стороны между осями L_4-L_2 = 90°, сторона L_2-L_2 = 45°. Вычертив этот сферический треугольник и построив стереографическую проекцию, увидим, что получен класс симметрии с одной осью L_4 и четырьмя побочными осями L_2 , разбивающимися на два неэквивалентных между собой семейства – класс $L_4 2L_2 2L_2$

Допустимые сочетания углов:

Сочетания осей	Сумма углов
$L_2\ L_2\ L_2$	90° + 90° + 90° = 270°
$L3\ L_2\ L_2$	60° + 90° + 90° = 240°
$L_4\ L_2\ L_2$	45° + 90° + 90° = 225°
$L_5\ L_2\ L_2$	36 °+ 90° + 90° = 216° не в кристаллах
$L_6\ L_2\ L_2$	30° + 90° + 90° = 210°



$L_6\ L_2\ L_2$



две стороны $L_6 - L_2 = 90°$, сторона $L_2 - L_2 = 30°$. В итоге вновь получаем осевой класс – $L_6\ 6L_2$ = также с двумя неэквивалентными семействами осей 2-го порядка $L_6 3L_2 3L_2$

Допустимые сочетания углов:

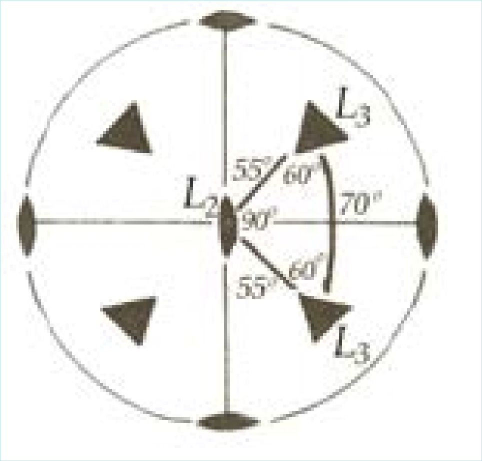
Сочетания осей	Сумма углов	
L2 L2 L2	90° + 90° + 90° = 270°	
L3 L2 L2	60° + 90° + 90° = 240°	
L4 L2 L2	45° + 90° + 90° = 225°	
L5 L2 L2	36 °+ 90° + 90° = 216°	не в кристаллах
L6 L2 L2	30° + 90° + 90° = 210°	
L7-итд L2 L2	*° + 90° + 90° => 180°	не в кристаллах

L3 L3 L2 60° + 60° + 90° = 210°

Допустимые сочетания углов:

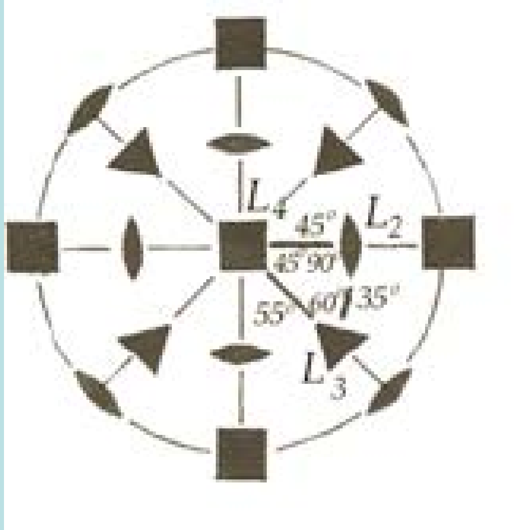
Сочетания осей	Сумма углов	
L2 L2 L2	90° + 90° + 90° = 270°	
L3 L2 L2	60° + 90° + 90° = 240°	
L4 L2 L2	45° + 90° + 90° = 225°	
L5 L2 L2	36 °+ 90° + 90° = 216°	не в кристаллах
L6 L2 L2	30° + 90° + 90° = 210°	
L7-итд L2 L2	*° + 90° + 90° => 180°	не в кристаллах
L3 L3 L2	60° + 60° + 90° = 210°	
L4 L3 L2	45° + 60° + 90° = 195°	
L6 L3 L2	30° + 60° + 90° = 180°	НЕЛЬЗЯ!

Кстати! L5 L3 L2 36° + 60° + 90° = 186°> 180° не в кристаллах



$$L_3\, L_3\, L_2$$

Расположив рассчитанный треугольник на сфере и размножив данные элементы симметрии, получим стереографическую проекцию еще одной осевой группы – $3L_2 4L_3$

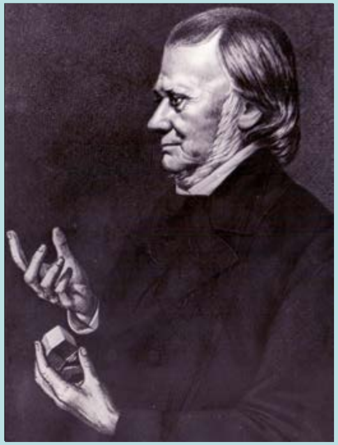


$L_4\ L_3\ L_2$

Расположив рассчитанный треугольник на сфере и размножив данные элементы симметрии, получим стереографическую проекцию еще одной осевой группы :
$3L_4 4L_3\ 6L_2$

Мориц Людвиг Франкенгейм (1801-1869)

В 1826 г. немецкий кристаллограф ***М. Л. Франкенгейм****(1801-1869 гг.) вывел 32 класса симметрии .*

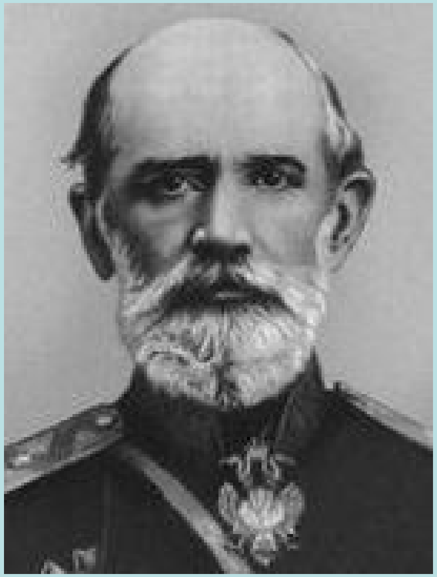


Иоганн Фридрих Христиан Гессель (1796-1872)

И. Ф. Х. Гессель *(1796-1872 гг.) в 1830 г. вывел 32 класса симметрии*

Однако их работы были недопоняты и забыты.

И лишь в 1867 г. Аксель Вильгельмович Гадолин **дал строгий математический вывод** *32 групп симметрии*. (Петербургская АН в 1868 присудила ему за это Ломоносовскую премию).

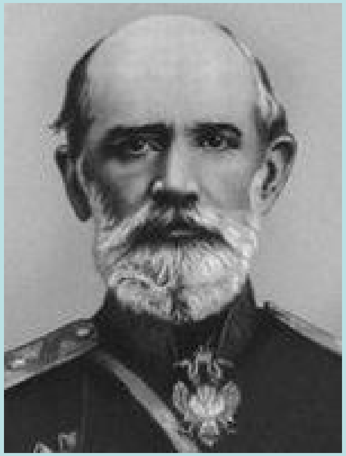


(1828-1892 гг.)

Его награды: (Российской империи):
Орден Святого Георгия 4-й степени (1871) Орден Святой Анны 3-й степени (1859)
Орден Святого Владимира 4-й степени (1862) Орден Святой Анны 2-й степени(1864)
Орден Святого Владимира 3-й степени (1868) Орден Святого Станислава (Российская империя) 1-й степени (1870) Орден Святой Анны 1-й степени (1872)
Орден Святого Владимира 2-й степени (1875) Орден Белого орла (Российская империя) (1879) Орден Святого Александра Невского (1884)
+
Французский Орден Почетного Легиона командорский крест (1867)
Шведский Орден Меча Большой крест (1885)

Аксель Вильгельмович Гадолин
(1828-1892)
русский учёный в области артиллерийского вооружения, механической обработки металлов, минералогии и **кристаллографии**, с 1875 года действительный член Петербургской АН, с 1873 г. член-корреспондент, генерал от артиллерии (1890).

За оказанные военные подвиги 1854-1855 годов награждён орденом св. Георгия 4-й степени (не сразу, а в 1871).



В 1854 г. у Соловков появляются английские пароходофрегаты «Бриск» и «Миранда». Происходит перестрелка с англичанами в гавани Благополучия и обстрел Соловецкого монастыря.

В июне 1855 г. корабли англичан снова появляются у монастыря. Рандеву состоялось 22 июня на нейтральной полосе. Тема переговоров была одна: английский офицер требовал волов. Соловецкий **настоятель** отвечал, что коров они отдать не могут, так как они кормят молоком монахов. Английский офицер пробовал припугнуть собеседника. Он говорил: "Мы отсюда поплывем, а через три недели явится здесь сильный флот, где будет наш главный начальник на таком корабле, что вы от одного взгляда будете страшиться, вы должны к нему с белым флагом прибыть… ". Не подействовало и это средство. Уполномоченный настоятель непоколебимо стоял на своем, заявив, **что коров не даст** (и не дал**).**

Кстати, перебирая допустимые сочетания углов мы уже вывели несколько классов симметрии (из 32).

Давайте наведем порядок

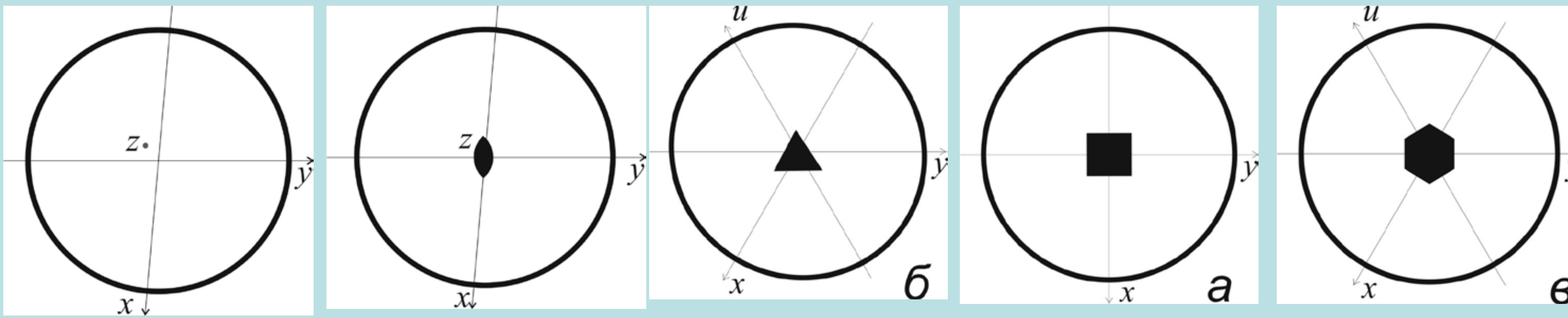
…

(Фрнакенгейм смог же….)

Вывод групп (классов) симметрии в символике Браве

1) За основу вывода можно взять все возможные в кристаллах поворотные оси симметрии. В результате получим 5 исходных классов L_n

$$L_1, L_2, L_3, L_4, L_6$$

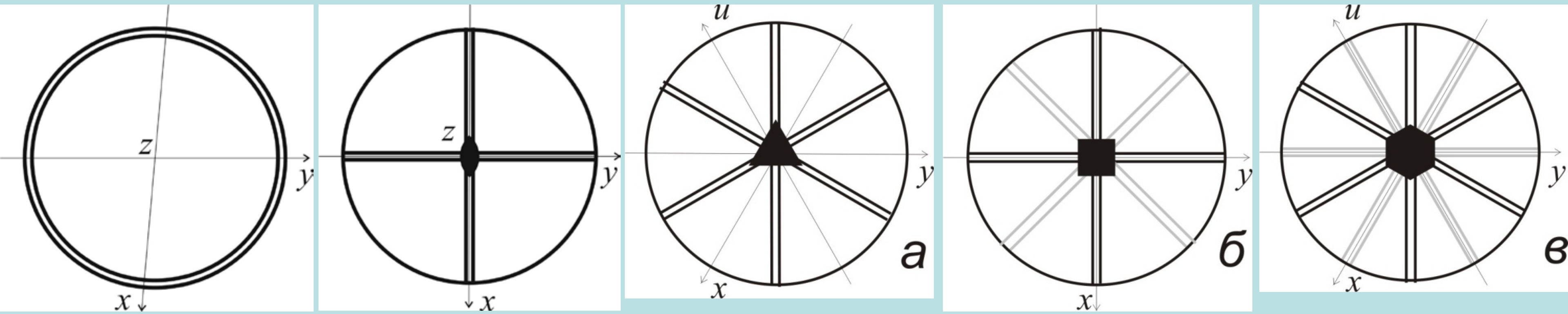


ИТОГО - 5

Вывод групп (классов) симметрии в символике Браве

2) Добавляем вертикальную зеркальную плоскость симметрии, проходящую вдоль каждой из осей (P_v)

$$L_1 \rightarrow P,\ L_2 \rightarrow L_2 2P,\ L_3 \rightarrow L_3 3P,\ L_4 \rightarrow L_4 4P,\ L_6 \rightarrow L_6 6P$$

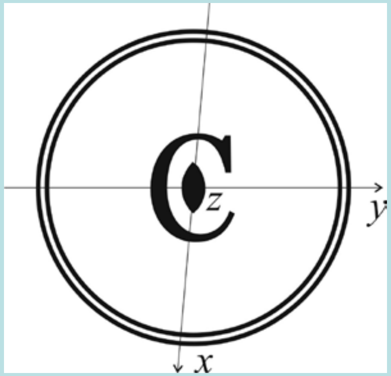


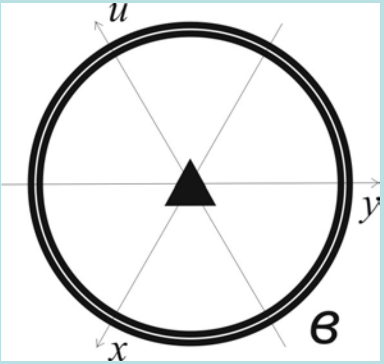
ИТОГО - +5 = 10

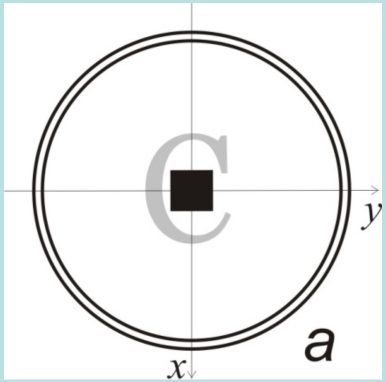
Вывод групп (классов) симметрии в символике Браве

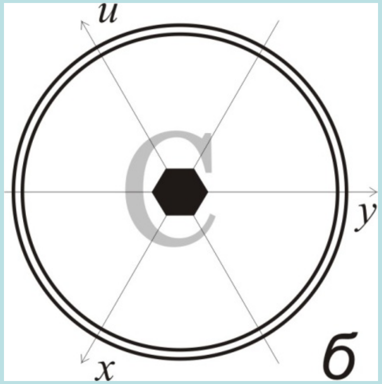
3) Добавляем горизонтальную зеркальную плоскость симметрии, перпендикулярную оси (P_h)

$L_1 \rightarrow P$, $L_2 \rightarrow L_2PC$, $L_3 \rightarrow$ Ł$_6$, $L_4 \rightarrow L_4PC$, $L_6 \rightarrow L_6PC$







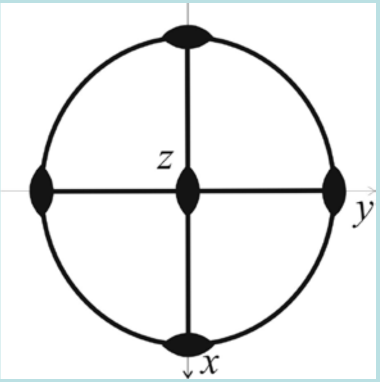


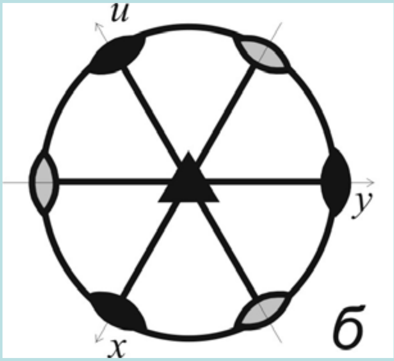
ИТОГО - +4 = 14

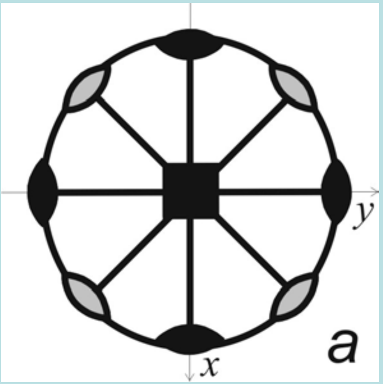
Вывод групп (классов) симметрии в символике Браве

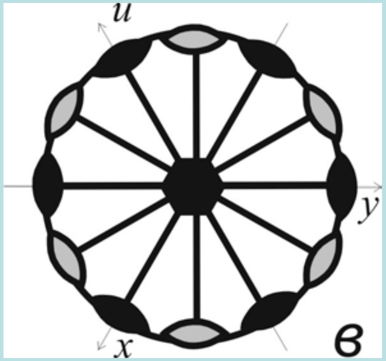
4) Добавляем горизонтальную ось симметрии 2-го порядка, перпендикулярную оси ($L_2\perp$)

$$L_1 \rightarrow L_2,\ L_2 \rightarrow 3L_2,\ L_3 \rightarrow L_3 3L_2,\ L_4 \rightarrow L_4 4L_2,\ L_6 \rightarrow L_6 6L_2$$







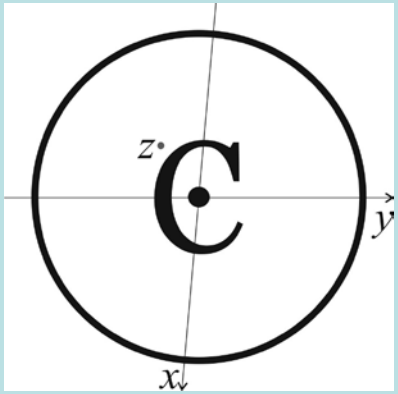


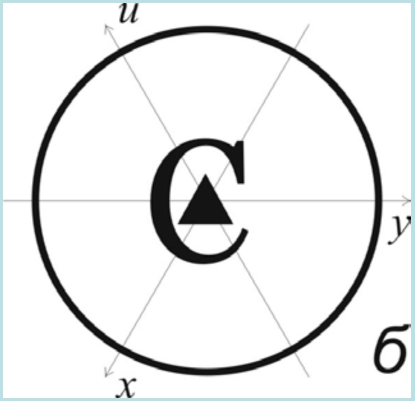
ИТОГО - +4 = 18

Вывод групп (классов) симметрии в символике Браве

5) Добавляем операцию инверсии в точке (***i***), т.е. центр симметрии

$L_1 \to C$, $L_2 \to L_2PC$, $L_3 \to Ł_3$, $L_4 \to L_4PC$, $L_6 \to L_6PC$



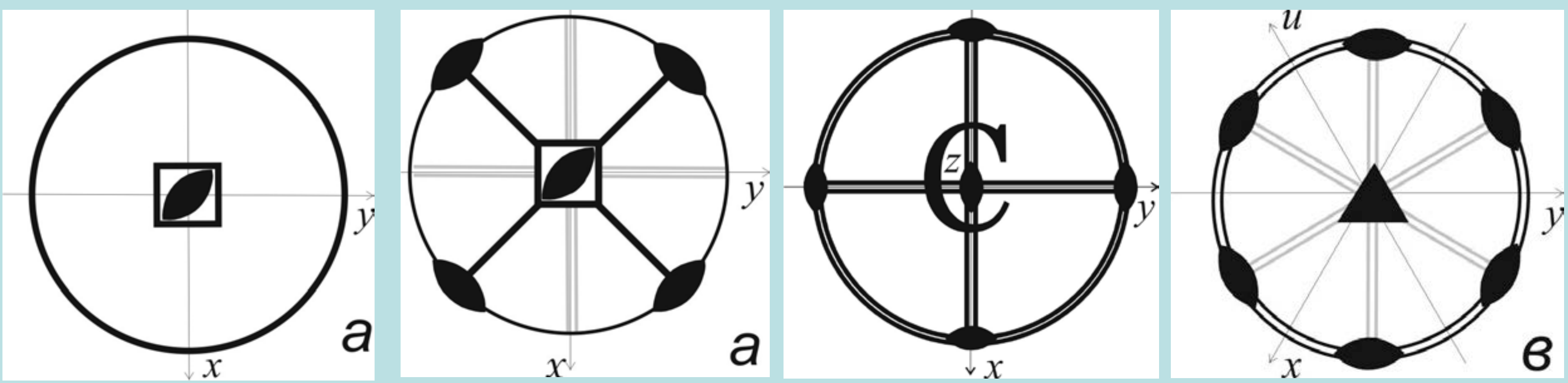


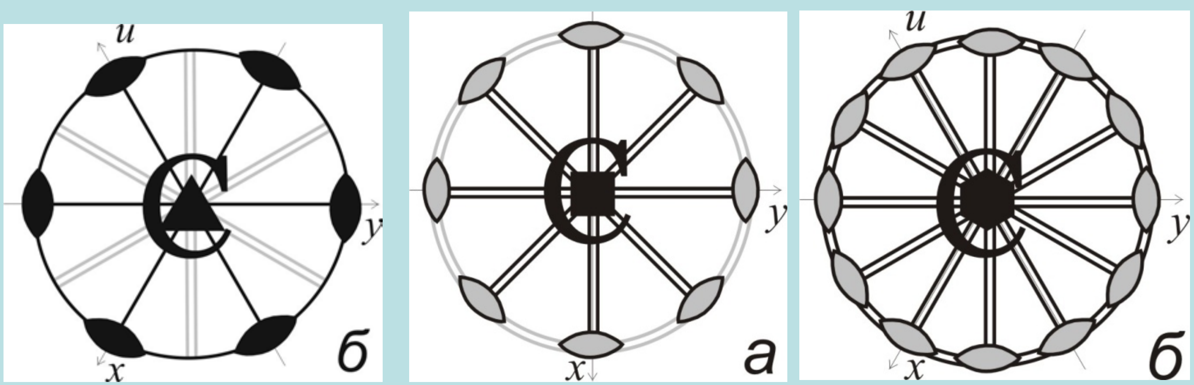
ИТОГО - +2 = 20

Вывод групп (классов) симметрии в символике Браве

6) Любую комбинацию перечисленных выше элементов симметрии (не забыв про существование инверсионных осей 4-ого порядка)

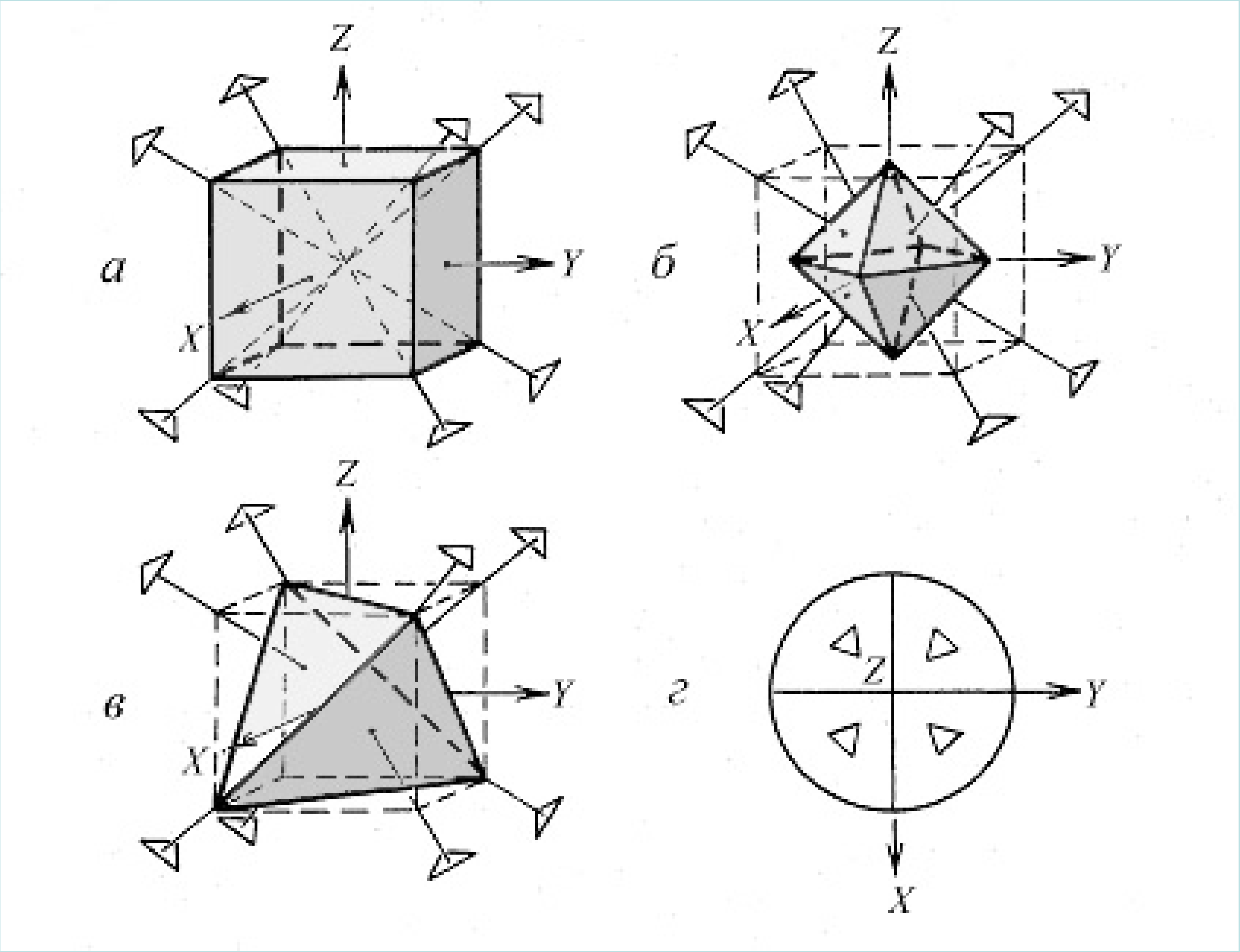
$\text{Ł}_4 \rightarrow \text{Ł}_4 2L_2 2P$, $L_2 \rightarrow 3L_2 3PC$, $L_3 \rightarrow L_3 3L_2 4P$, $L_3 3L_2 3PC$,
$L_4 \rightarrow L_4 4L_2 5PC$, $L_6 \rightarrow L_6 6L_2 7PC$





ИТОГО : +7 = 27

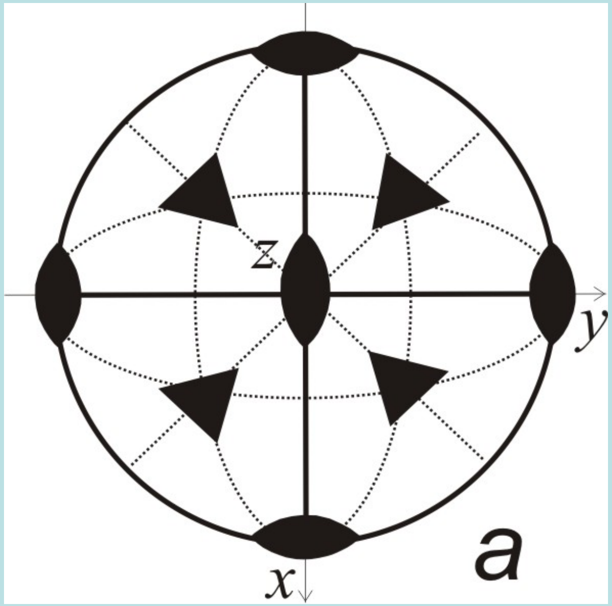
Вывод кубических групп (классов) симметрии

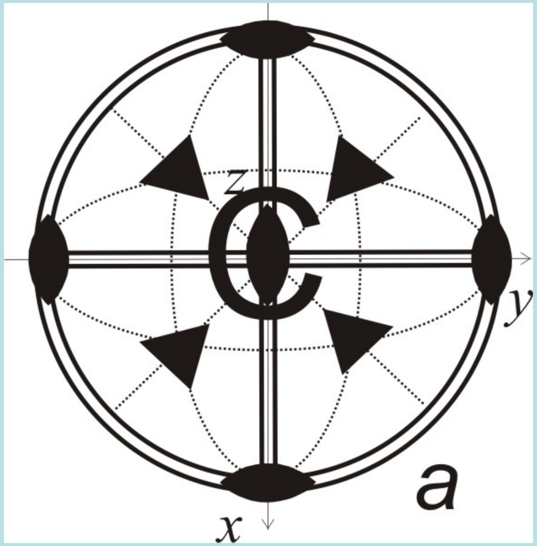


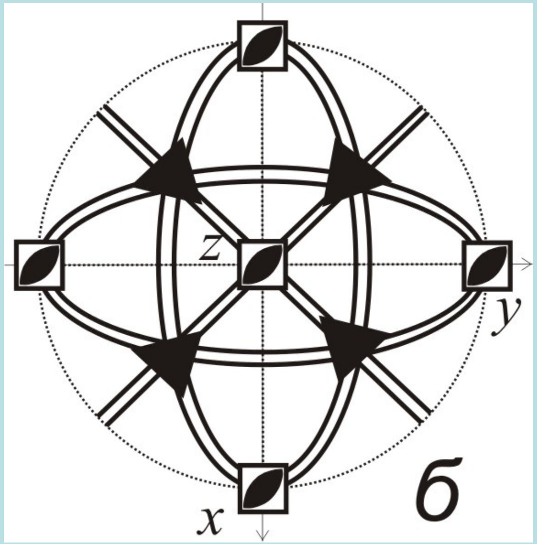
. Расположение координатных направлений X, Y, Z и четырех осей 3-го порядка в кубе (*а*), октаэдре (*б*), тетраэдре (*в*) и стереограмма этих направлений (*г*)

Вывод кубических групп (классов) симметрии

$L_3\, L_3\, L_2 \qquad 60° + 60° + 90° = 210°$



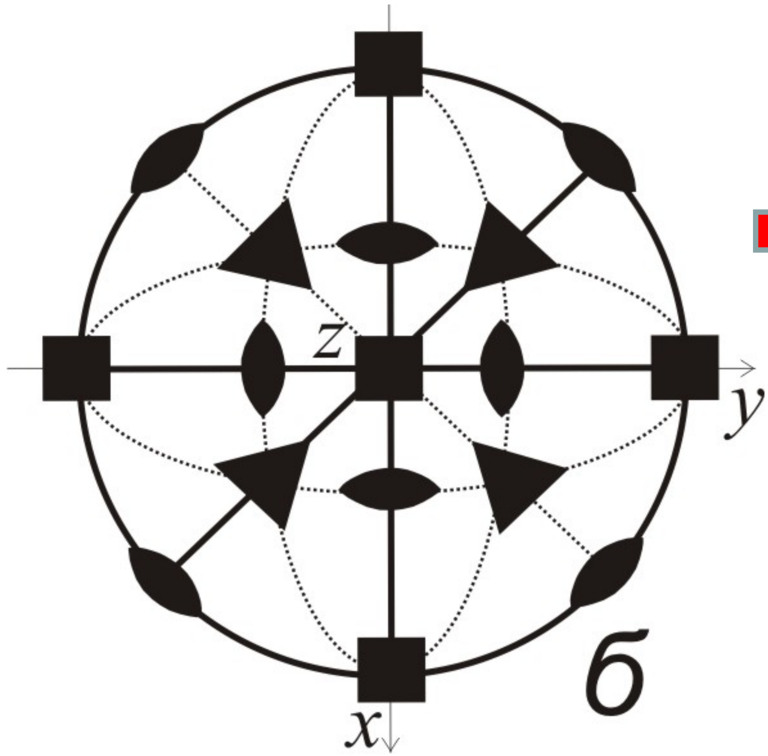


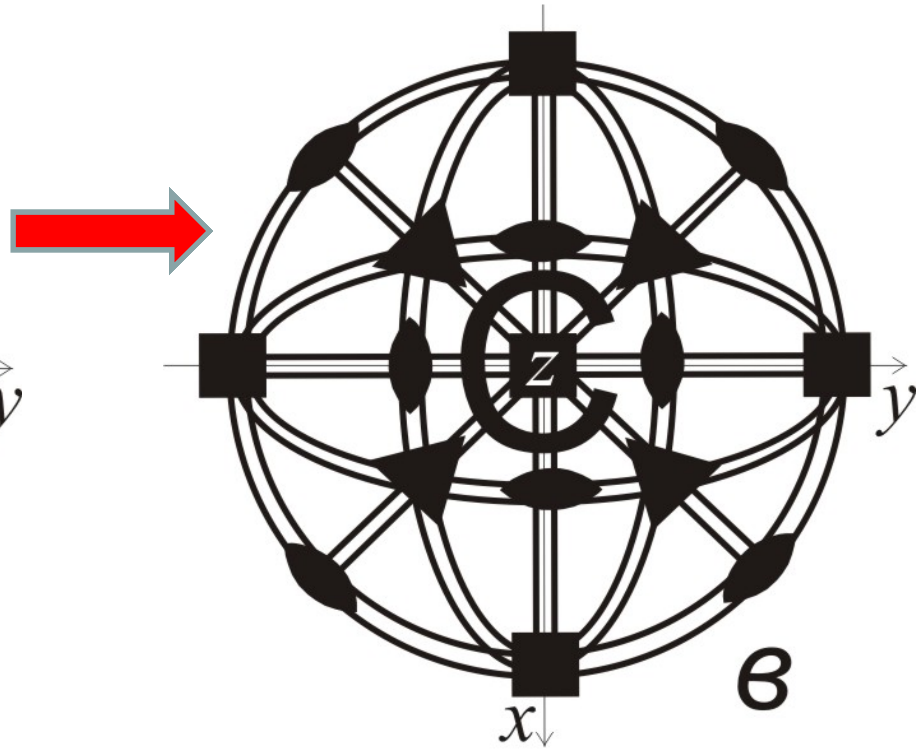


Три класса с тетраэдрическим осевым набором

Вывод кубических групп (классов) симметрии

$L_4 L_3 L_2$ $45° + 60° + 90° = 195°$





Два класса с октаэдрическим осевым набором

Домашнее задание.

Упражнение на достройку

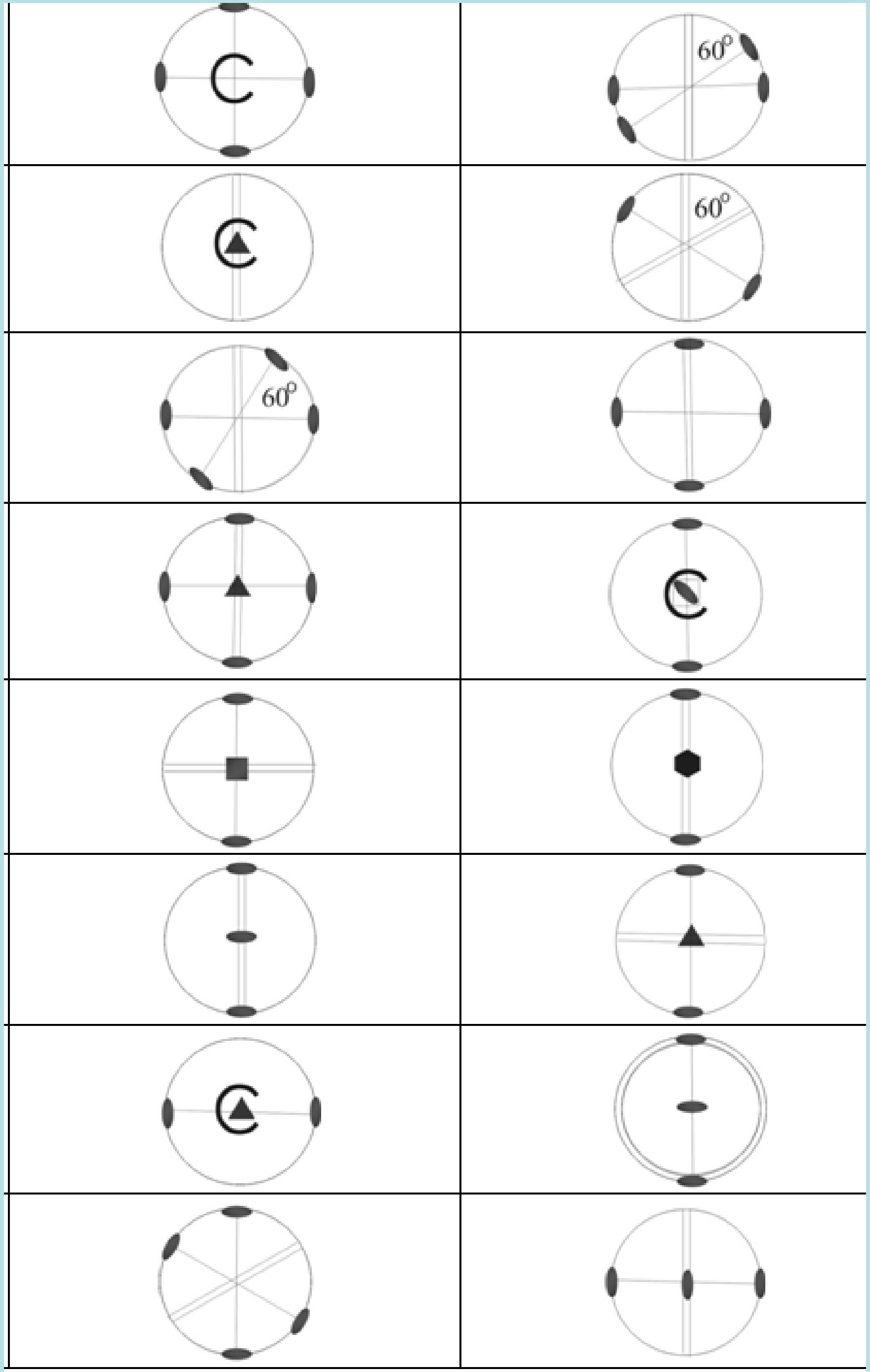
класса симметрии

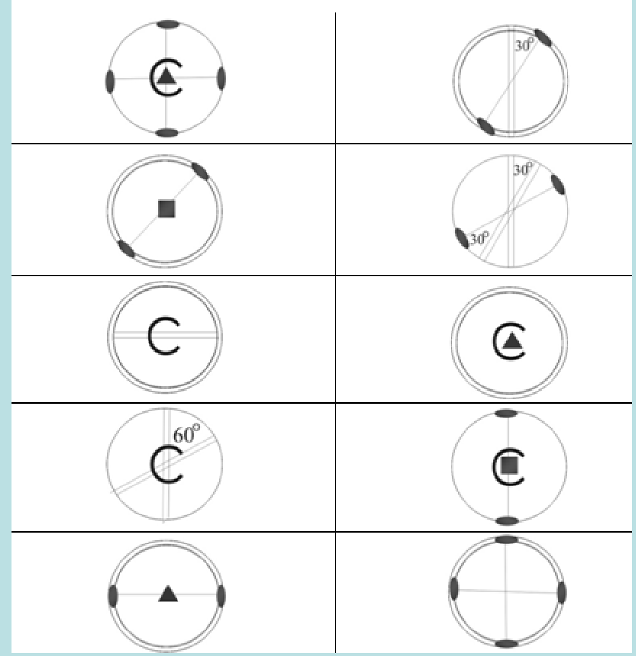
Сделать 2 любых варианта

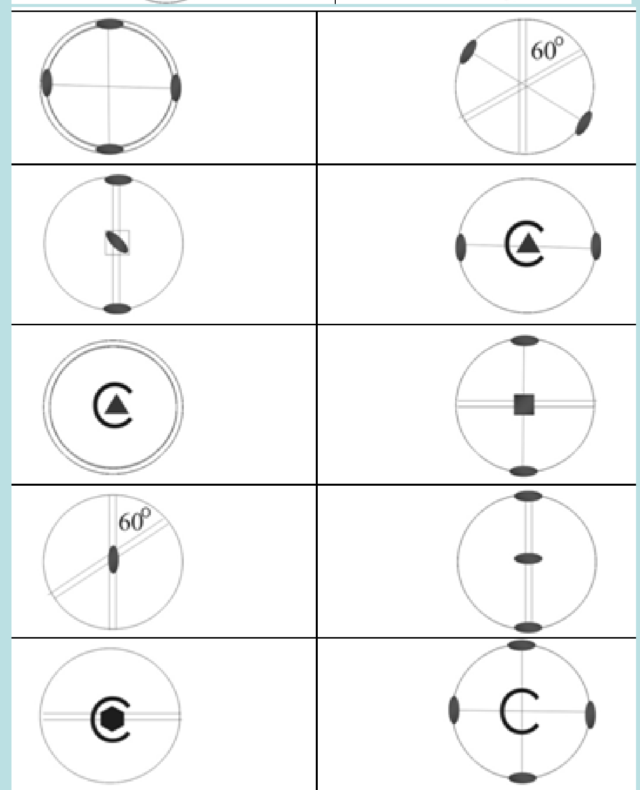
Прислать на почту

neremin@mail.ru

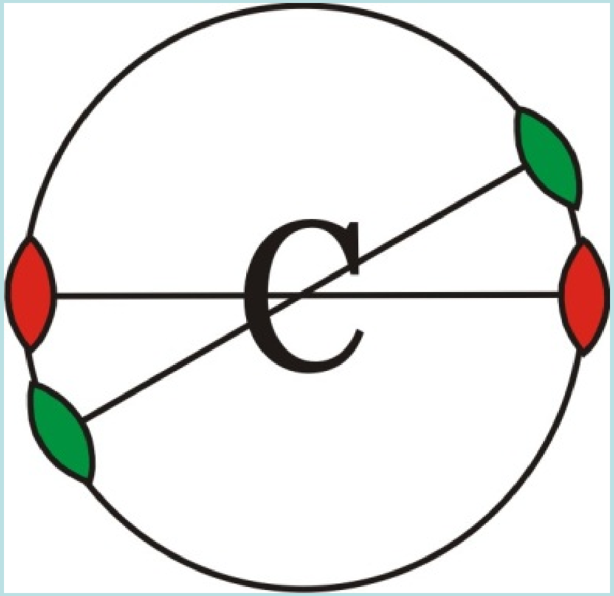
До 23 марта


60°
60°
60°


30°
30°
30°
60°

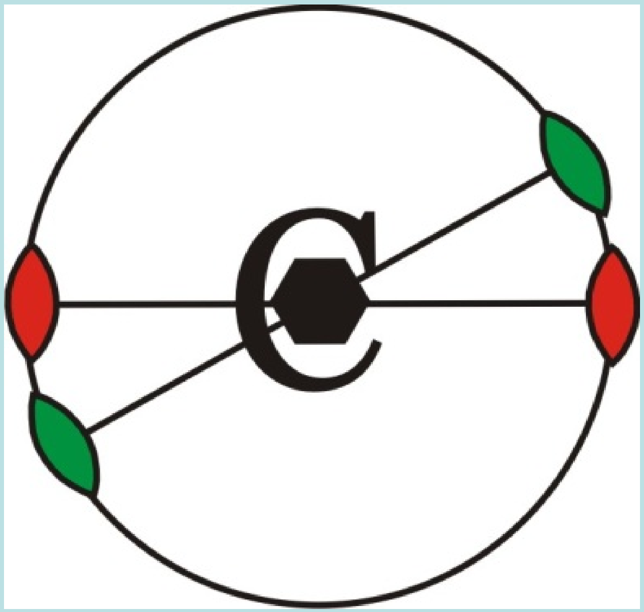

60°
60°

Разбор домашнего задания.
Упражнение на достройку ***класса симметрии***



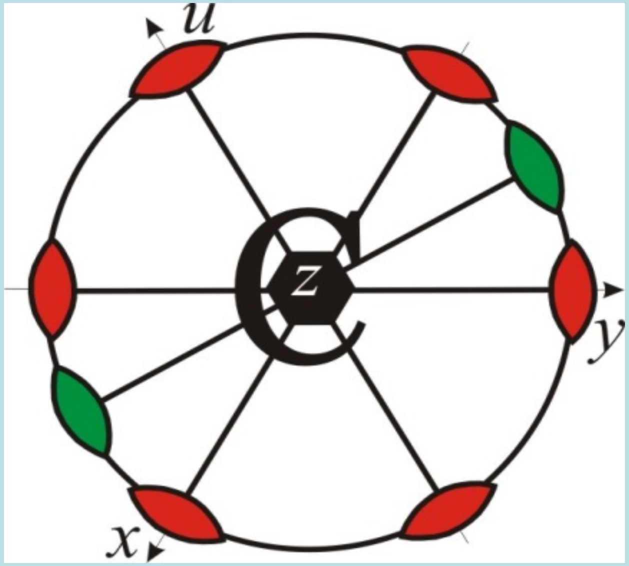
Наносим на чертеж исходные элементы симметрии – центр, и 2 оси второго порядка. Для удобства обозначаем их разным цветом. Одну ось ориентируем по направлению *y*, вторую – под углом 30˚ к ней.

Разбор домашнего задания. Упражнение на достройку класса симметрии



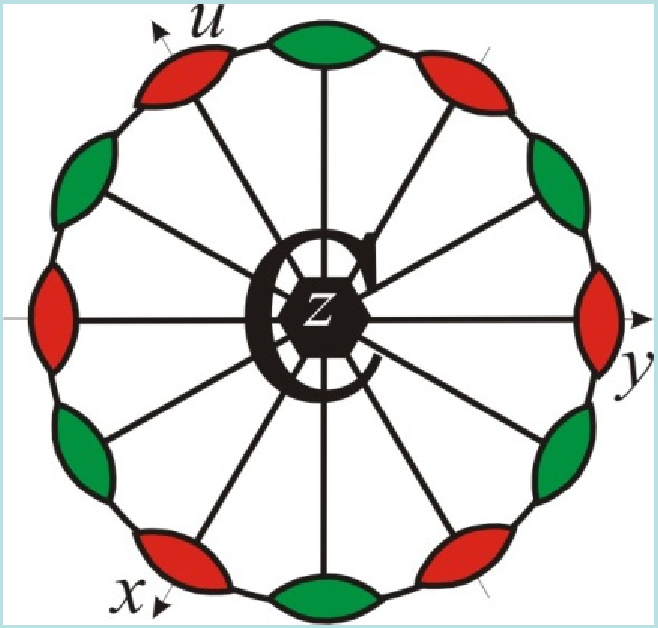
Осуществим взаимодействие двух осей второго порядка. Вспоминаем, что если встречаются под углом α две оси второго порядка, то результатом их взаимодействия будет поворотная ось порядка 360/2α. В данном случае возникает вертикальная ось шестого порядка. Наносим ее на чертеж.

Разбор домашнего задания. Упражнение на достройку класса симметрии



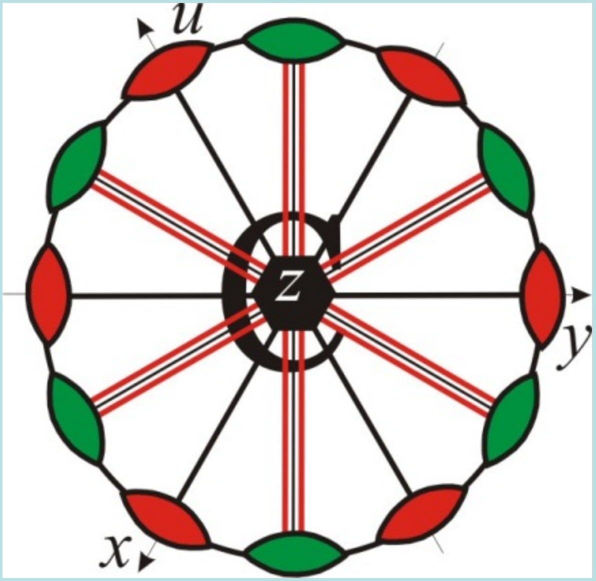
Осуществим вращение осью шестого порядка (на 60°) «красной» оси второго порядка. Получим еще две красные оси, ориентированные по координатным направлениям «*x*» и «*u*». Нанесем их на чертеж.

Разбор домашнего задания. Упражнение на достройку класса симметрии



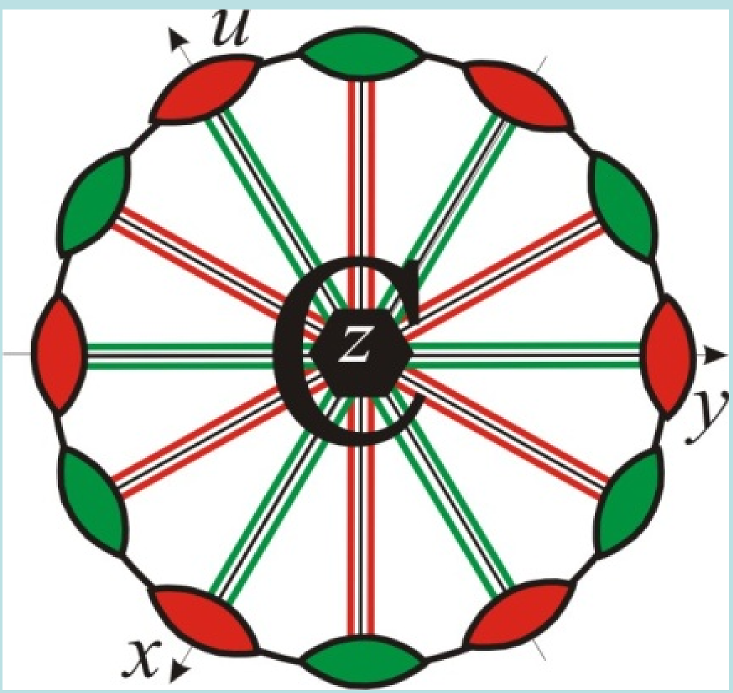
Аналогично получим еще две «зеленые» оси, второго порядка, ориентированные по диагональным направлениям. Нанесем их на чертеж.

Разбор домашнего задания. Упражнение на достройку класса симметрии



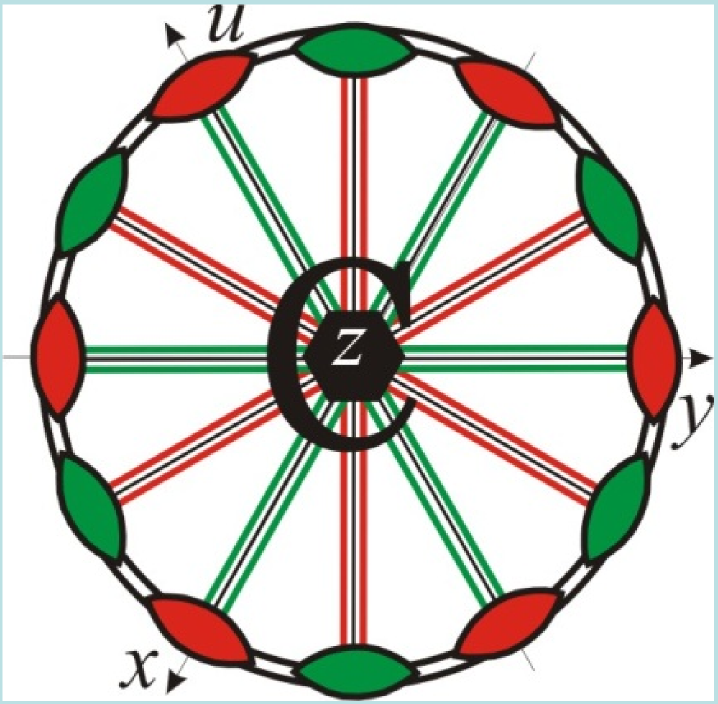
Вспомним, про сочетание (L_2-P-C), являющегося частным случаем взаимодействия поворотной и инверсионной осей. При наличии центра и оси второго порядка возникает перпендикулярная оси плоскость. Применим это правило к «красным» осям и центру. Получим три «красных» плоскости. Наносим их на чертеж.

Разбор домашнего задания. Упражнение на достройку класса симметрии



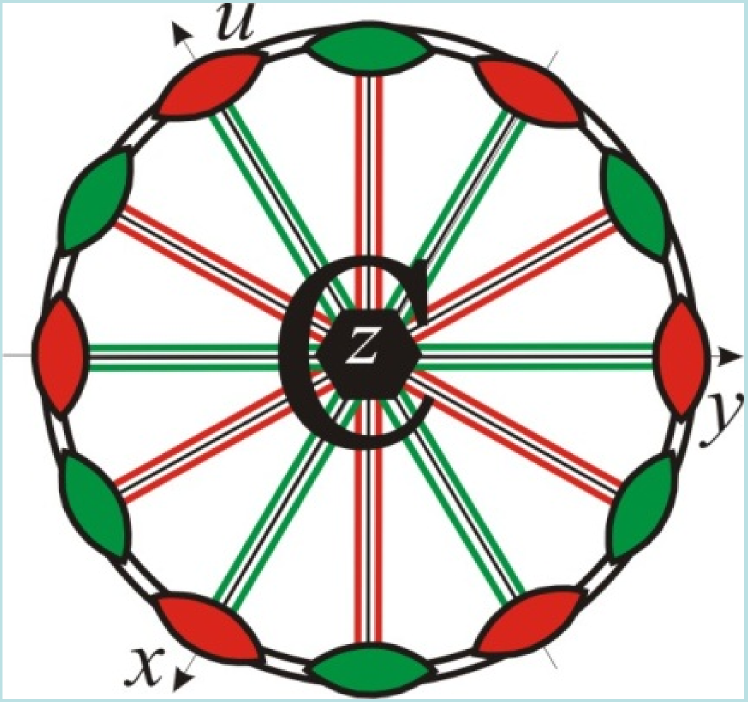
Применим это правило к «зеленым» осям второго порядка и центру. Получим три «зеленых» плоскости. Наносим их на чертеж..

Разбор домашнего задания. Упражнение на достройку класса симметрии



Обратим внимание, что вертикальная ось шестого порядка является четной – осуществив тройной поворот вокруг нее на элементарный угол в 60°, получим вращение на 180°. Это означает, что «внутри» оси шестого порядка (равно как и внутри любой другой четной оси) заложена ось второго порядка. Осуществим уже известное взаимодействие центра и этой оси второго порядка с появлением горизонтальной плоскости. Рисуем эту плоскость. Эта операция записывается следующим образом: L_2(в L_6) × C = P_z.

Разбор домашнего задания. Упражнение на достройку класса симметрии



Если провести анализ чертежа, то можно убедиться, что любые два элемента симметрии при взаимодействии между собой приведут к появлению уже присутствующих на чертеже элементов. Это означает, что класс симметрии достроен полностью.

Как итог получен класс симметрии $L_6 6L_2 7PC$ или более корректно в развернутом виде: $L_6\, 3L_2'\, 3L_2''\, 3P'\, 3P''\, P'''\, C$.

В следующий раз!

Дайте нам имена, наконец!!!

Облик - что это?

Габитус – это что?

И кое что еще…