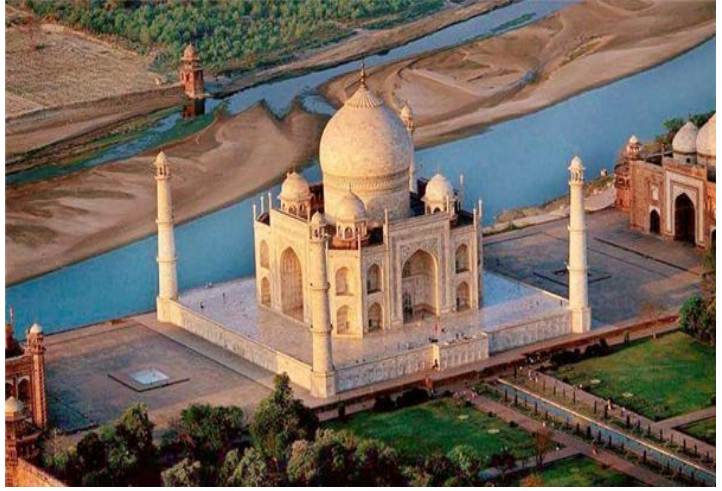
Семинар 1

1. Элементы симметрии. Операции симметрии.
2. Способы представления элементов и операций симметрии
3. Взаимодействие элементов симметрии.
4. Теория абстрактных математических групп в теории симметрии. Квадраты Кейли.



- **Симметрия -** свойство геометрических тел совмещать свои части, или, выражаясь точнее свойство их в различных положениях приходить в самосовмещение с первоначальным положением**.**

Е.С. Федоров





- **Симметрия** – это закон строения структурных объектов. Термин переводится с греческого как *гармония*, *пропорциональность*, *одинаковость* расположения частей, *соразмерность*, *повторяемость*, *красота*.

Пифагор

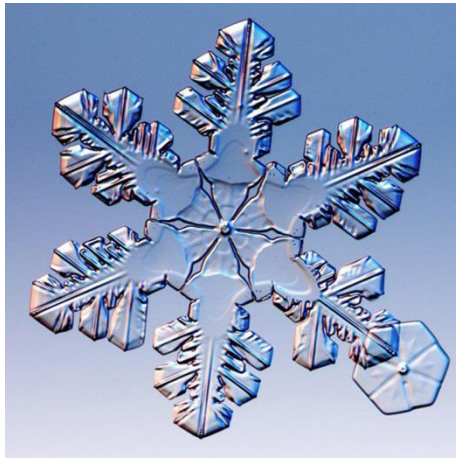


- **Симметрия** – инвариантность системы (геометрической или физической) относительно каких либо преобразований.

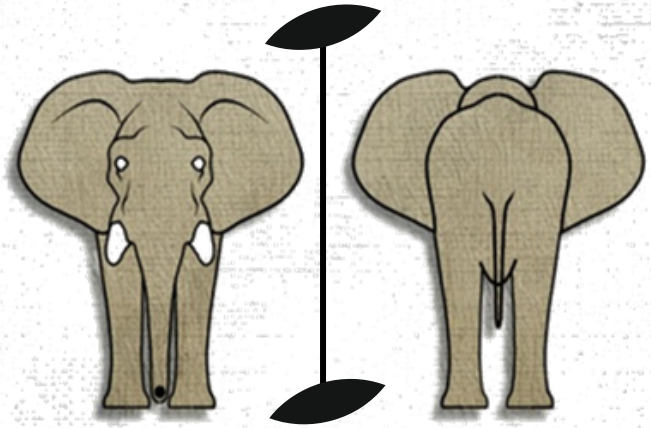


- **Симметрия** – наиболее общая закономерность, присущая строению и свойствам кристаллического вещества, одно из обобщающих фундаментальных понятий всего естествознания в целом.

П.Кюри



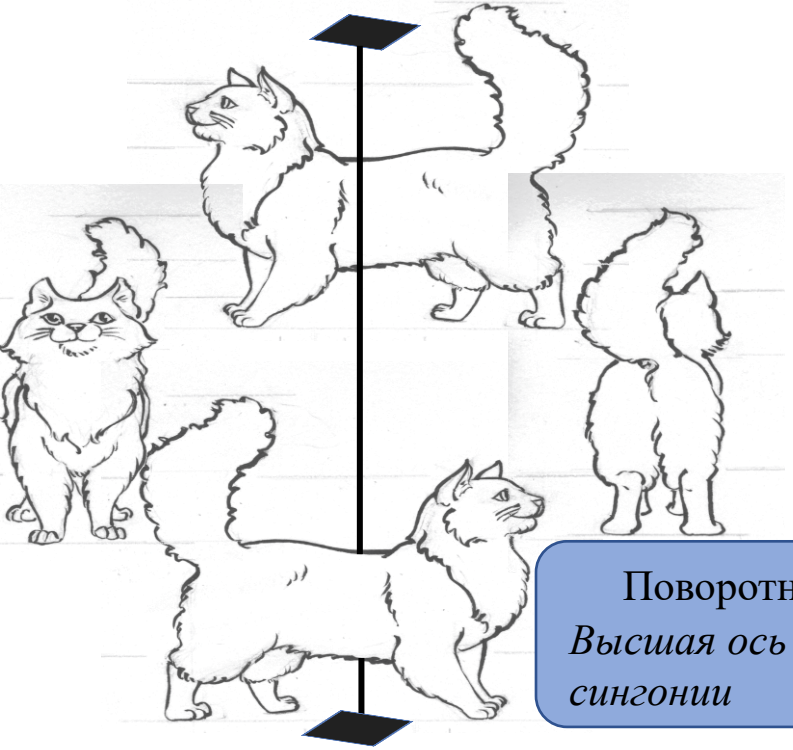
ЗАКРЫТЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ СИММЕТРИИ. ПРОСТЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ. ОСОБЕННОСТИ



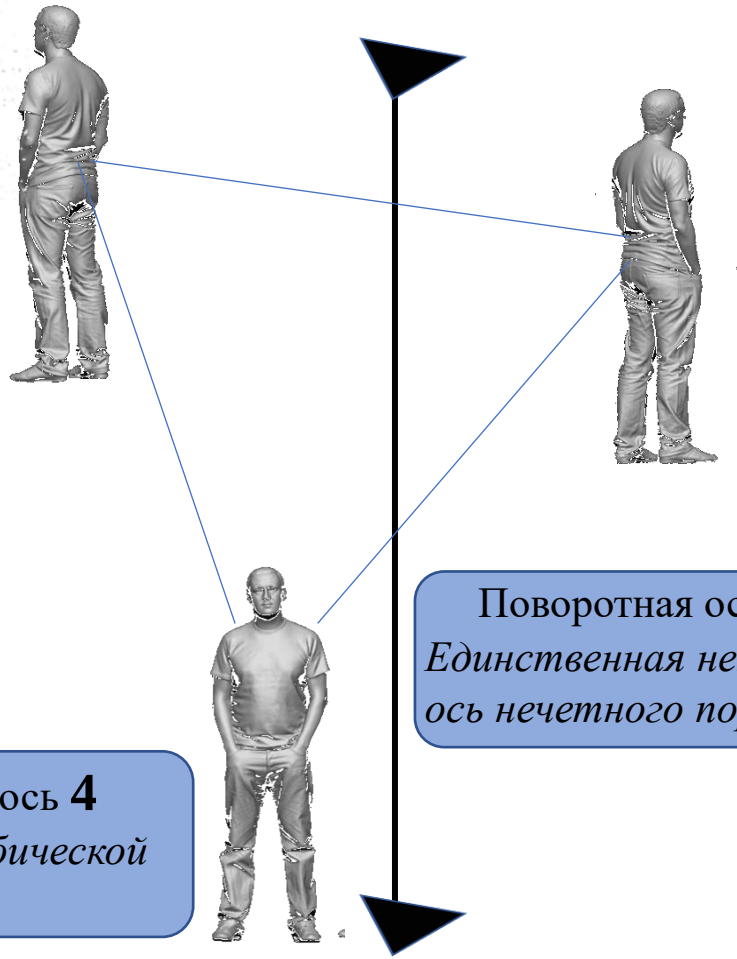
Поворотная ось **3**
Единственная нетривиальная низшая ось



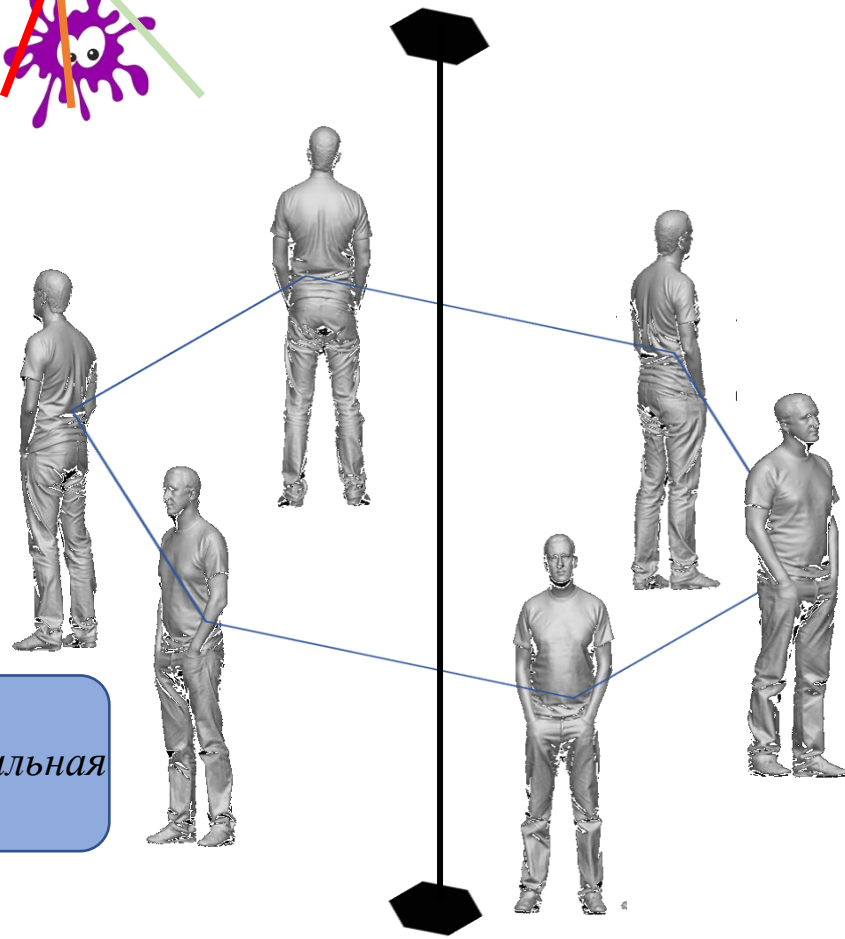
Поворотная ось **1**
Тривиальная ось



Поворотная ось **4**
Высшая ось кубической сингонии



Поворотная ось **3**
Единственная нетривиальная ось нечетного порядка!



Поворотная ось **6**
Не совместима с осями высших порядков!

К простыми закрытым элементам симметрии относятся *только поворотные оси*

ЗАКРЫТЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ СИММЕТРИИ. ПРОСТЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

№	Эл. симм	Гр. знак	n	α	I/II род	Низш/ высш	Величина симм.	Операции симметрии	Матрица преобразования координатных осей для операций симметрии
1	1	-	1	360°	I	Низш.	1	$\{e\}$	$\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}$
2	2		2	180°	I	Низш.	2	$\{e, 2^1\}$	$2_z\ \begin{matrix}\bar{1}&0&0\\0&\bar{1}&0\\0&0&1\end{matrix}$ $2_x\ \begin{matrix}1&0&0\\0&\bar{1}&0\\0&0&\bar{1}\end{matrix}$ $2_y\ \begin{matrix}\bar{1}&0&0\\0&1&0\\0&0&\bar{1}\end{matrix}$
3	3		3	120°	I	Высш.	3	$\{e, 3^1, 3^2\}$	$3^1_z\ \begin{matrix}\bar{1}&\bar{1}&0\\1&0&0\\0&0&1\end{matrix}$ $3^2_z\ \begin{matrix}0&1&0\\\bar{1}&\bar{1}&0\\0&0&1\end{matrix}$ $3^1_{xyz}\ \begin{matrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{matrix}$
4	4		4	90°	I	Высш.	4	$\{e, 4^1, 4^2=2, 4^3\}$	$4^3_z\ \begin{matrix}0&1&0\\\bar{1}&0&0\\0&0&1\end{matrix}$ $4^1_z\ \begin{matrix}0&\bar{1}&0\\1&0&0\\0&0&1\end{matrix}$ $4^3_x\ \begin{matrix}1&0&0\\0&0&\bar{1}\\0&1&0\end{matrix}$
5	6		6	60°	I	Высш.	6	$\{e, 6^1, 6^2=3^1, 6^3=2, 6^4=3^2, 6^5\}$	$6^1_z\ \begin{matrix}0&\bar{1}&0\\1&1&0\\0&0&1\end{matrix}$ $6^5_z\ \begin{matrix}1&1&0\\\bar{1}&0&0\\0&0&1\end{matrix}$

Элементарный угол поворота (α) – минимальный угол, приводящий фигуру к самосовмещению (повторению формы) для *повортных осей*

- минимальный угол, приводящий фигуру в самосовмещение совместно с отражением в точке, либо в плоскости, *для сложных осей*

Порядок оси (n) – количество самосовмещений (повторений формы) при полном обороте на 360°

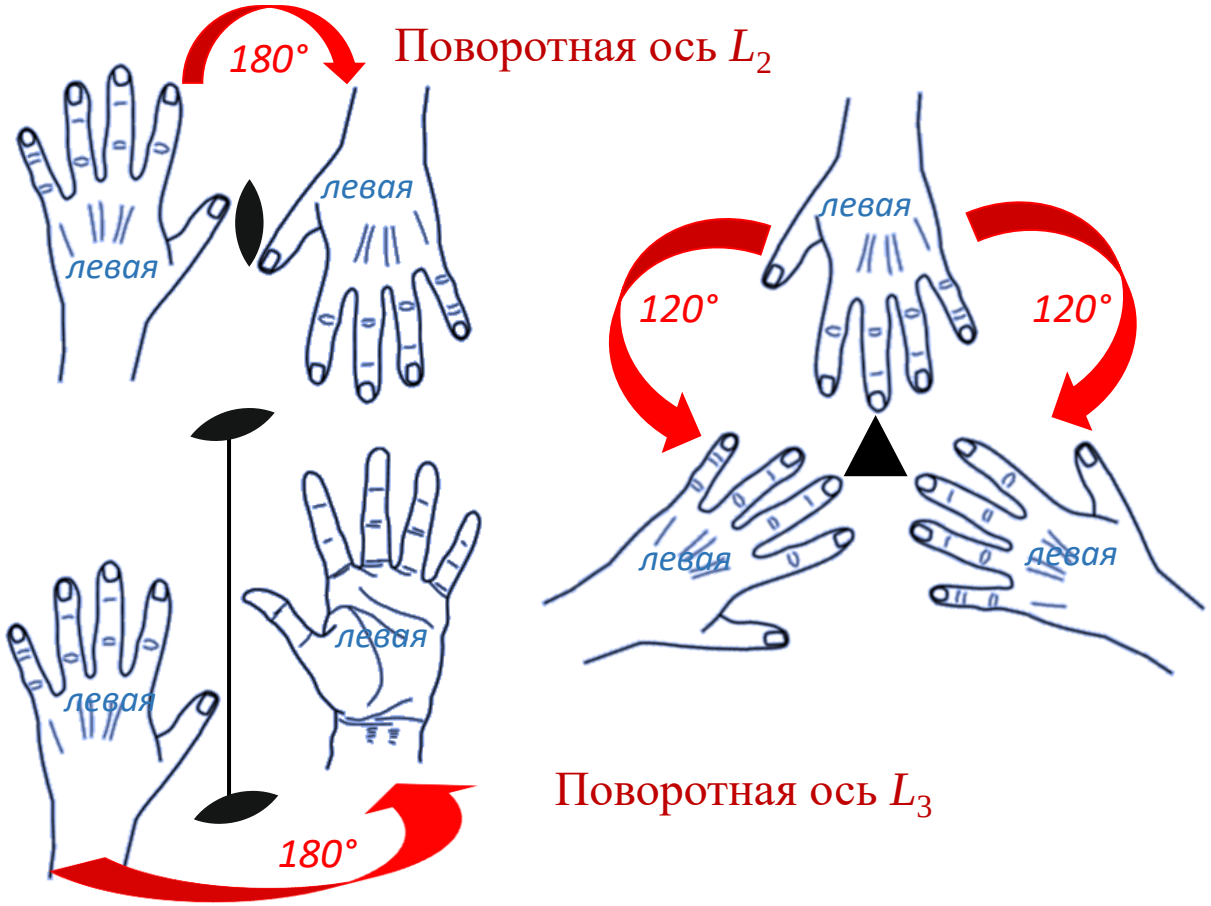
Низшие оси – оси с порядком меньше или равным 2: **n≤2** (оси первого и второго порядков (как поворотные, так и инверсионные):

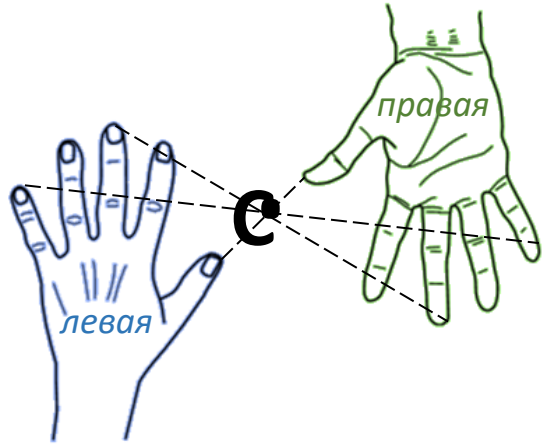
L_1 L_2 $P(\bar{1})$ $C(\bar{2})$

Высшие оси – оси с порядком больше 2 (оси третьего, четвертого и шестого порядков (как поворотные, так и инверсионные):

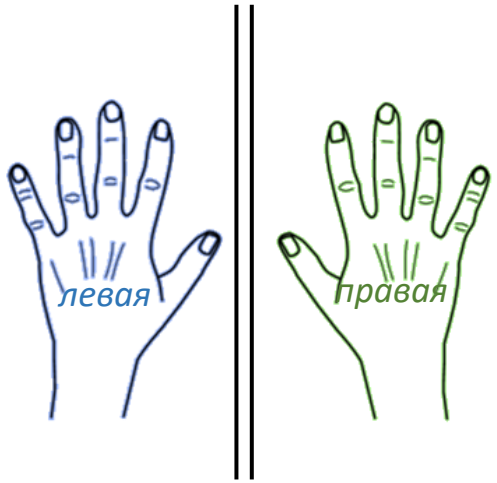
L_3 L_4 L_6 $\bar{3}$ $\bar{4}$ $\bar{6}$

Элементы симметрии *I и II родов*.





Центр инверсии С



Плоскость зеркального отражения Р

Элементы симметрии I рода *связывают друг с другом* ***конгруэнтно равные*** *фигуры* (греч. *congruens* - совмещающийся), т.е. фигуры, совмещающиеся при наложении (вложении) – *правые* с *правыми*, *левые* с *левыми*.

Элементы симметрии II рода *связывают друг с другом* ***энантиоморфные*** *(греч. enantios* – противоположный, *morphe* – форма*), т.е. зеркально равные фигуры – правые становятся левыми, а левые - правыми.*

ЗАКРЫТЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ СИММЕТРИИ. СЛОЖНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

№	Эл. симм	Гр. знак	n	α/ пов.*	I/II род	Низш/ высш	Вел. симм.**	Групповое представление (операции симм.)	Матрица преобразования координатных осей для операций симметрии
6	$\bar{1}$	○	1	360	II	Низш.	2	{1=*e*, $\bar{1}$ }	$\begin{matrix}\bar{1} & 0 & 0\\ 0 & \bar{1} & 0\\ 0 & 0 & \bar{1}\end{matrix}$
7	$\bar{2}$ (m)	|	2	180/ 360	II	Низш.	2	{1=*e*, *m*}	$\bar{2}_z$ $\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \bar{1}\end{matrix}$ $\bar{2}_x$ $\begin{matrix}\bar{1} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}$ $\bar{2}_{xy}$ $\begin{matrix}0 & \bar{1} & 0\\ \bar{1} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}$
8	$\bar{3}$	△	3	120	II	Высш.	6	{1=*e*, 3^1, 3^2}	$\bar{3}^1_z$ $\begin{matrix}1 & 1 & 0\\ \bar{1} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \bar{1}\end{matrix}$ $\bar{3}^2_z$ $\begin{matrix}0 & \bar{1} & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \bar{1}\end{matrix}$ $\bar{3}^1_{xyz}$ $\begin{matrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{matrix}$
9	$\bar{4}$	▨	4	90/ 180	II	Высш.	4	{1=*e*, $\bar{4}^1$, $\bar{4}^2$=2, $\bar{4}^3$}	$\bar{4}^1_z$ $\begin{matrix}0 & 1 & 0\\ \bar{1} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \bar{1}\end{matrix}$ $\bar{4}^3_z$ $\begin{matrix}0 & \bar{1} & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \bar{1}\end{matrix}$ $\bar{4}^1_x$ $\begin{matrix}\bar{1} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & \bar{1} & 0\end{matrix}$
10	$\bar{6}$	⬡	6	60/ 120	II	Высш.	6	{1=*e*, $\bar{6}^1$, $\bar{6}^2$=3^1, $\bar{6}^3$=2, $\bar{6}^4$=3^2, $\bar{6}^5$}	$\bar{6}^1_z$ $\begin{matrix}0 & 1 & 0\\ \bar{1} & \bar{1} & 0\\ 0 & 0 & \bar{1}\end{matrix}$ $\bar{6}^5_z$ $\begin{matrix}\bar{1} & \bar{1} & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \bar{1}\end{matrix}$

*Для осей нечетного порядка элементарный угол поворота равен минимальной поворотной составляющей, а для осей четного – вдвое больший.

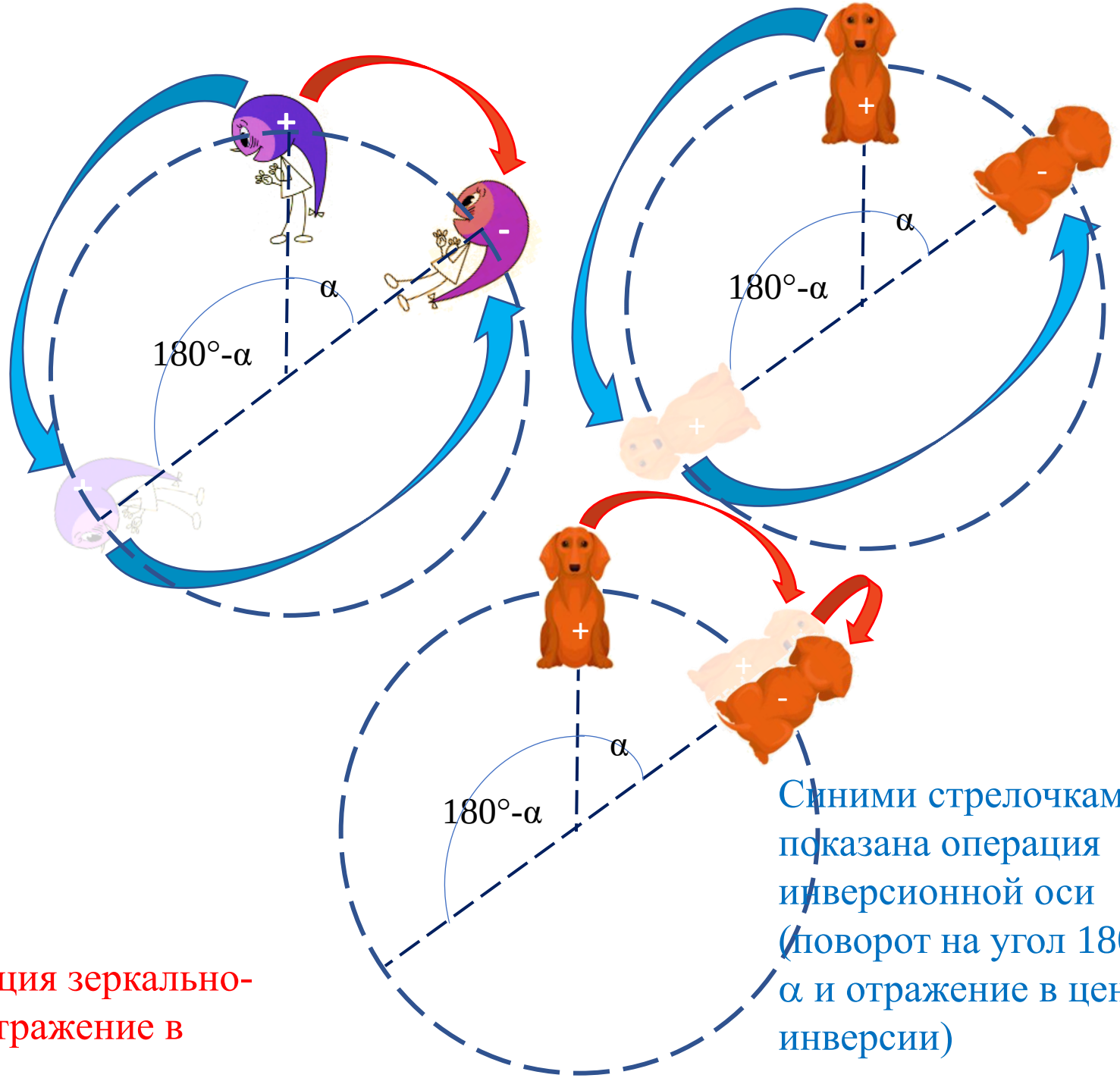
**А величина симметрии наоборот: для осей четного порядка соответствует порядку, а для нечетных – вдвое большая.

Инверсионные и зеркально-поворотные оси взаимозаменяемы: каждой зеркально-поворотной оси соответствует инверсионная и наоборот.

Операция каждой зеркальной оси с элементарным углом поворота α может быть заменена операцией инверсионной оси с элементарным углом поворота 180° - α

Инверсионный аналог		Зеркальный аналог		Заменяются
$\bar{1}$	=	Φ_2	=	C
$\bar{2}$	=	Φ_1	=	P
$\bar{3}$	=	Φ_6	=	L_3 + C
$\bar{6}$	=	Φ_3	=	L_3 + P
$\bar{4}$	=	Φ_4		-

Красными стрелочками показана операция зеркально-поворотной оси (поворот на угол α и отражение в горизонтальной плоскости)



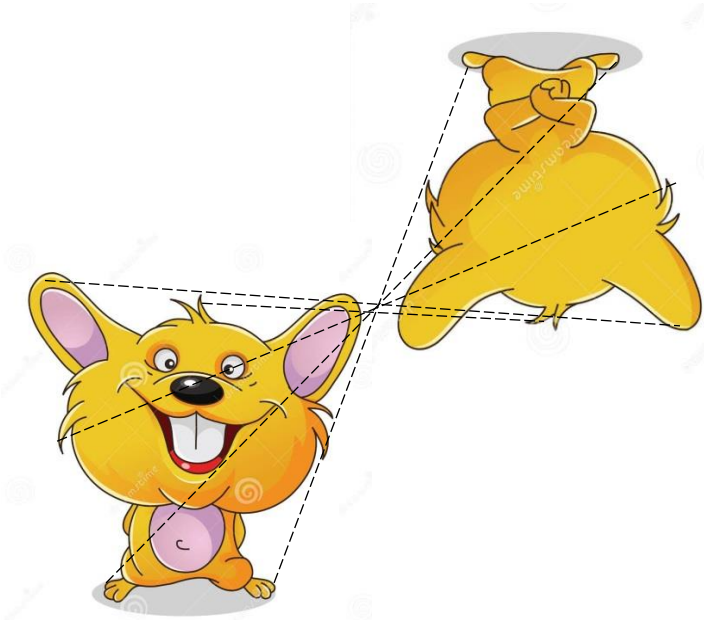
Синими стрелочками показана операция инверсионной оси (поворот на угол 180° - α и отражение в центре инверсии)

Сложные элементы симметрии относятся ко II-му роду :



зеркальные плоскости

центр инверсии



зеркально-поворотные оси



инверсионные оси

ЗАКРЫТЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ СИММЕТРИИ. СЛОЖНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ.



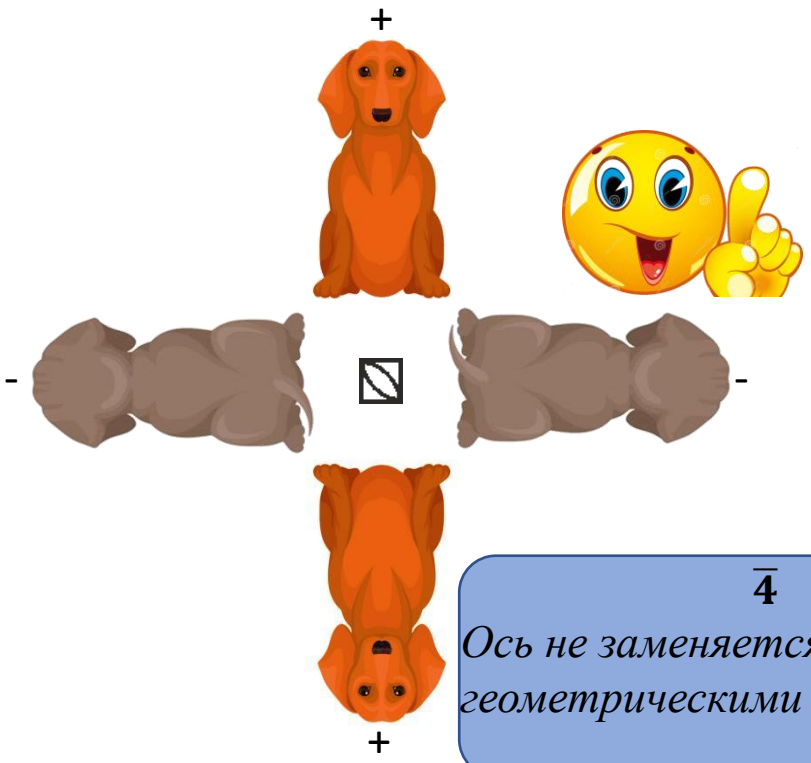
$\bar{1}$

Ось вырождается в точку, поэтому не может создать особое направление!



$\bar{2}$

Единственная сложная ось, не имеющая особой точки!



$\bar{4}$

Ось не заменяется простыми геометрическими операциями!



$\bar{3}$

Особая точка совмещена с центром инверсии!

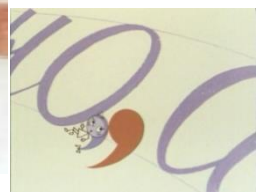
$\bar{6}$

Не допущена в высшую категорию!

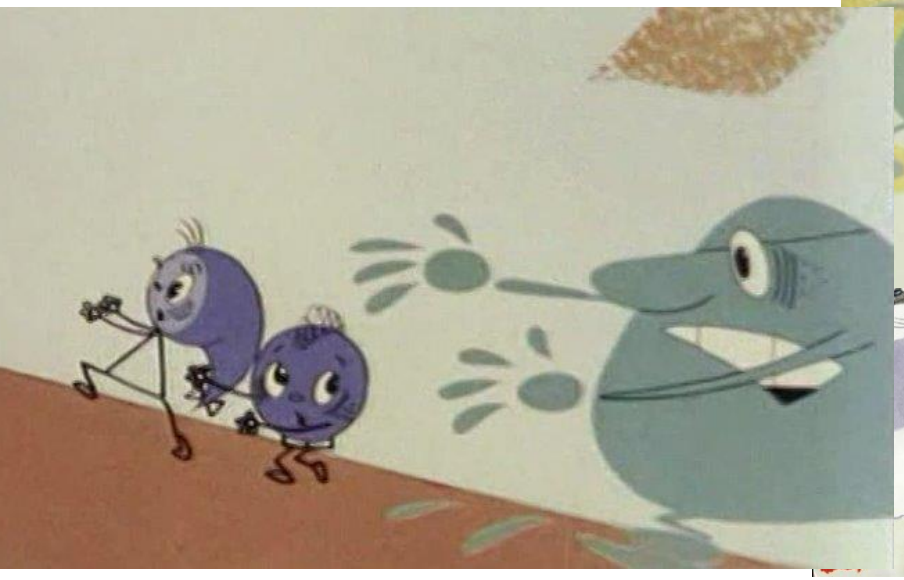

Приключения
запятой
и точки
в микромире


Жил-был лентяй Борис.
Однажды сидел он за столом, пил молоко и разглядывал диктант.
Не откладывай на завтра то, что можно сделать сегодня.


согласны?









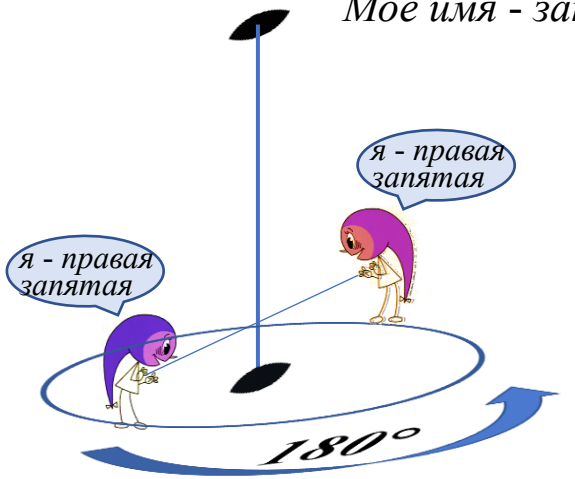



А а Б б
В в Г г
На другой день Борис пришел в класс и сказал учительнице, что она не заметила его знаков препинания, и стал просить исправить в диктанте двойку...

В качестве модельной фигурки для демонстрации операций симметрии будем использовать вот такую запятую из мультфильма



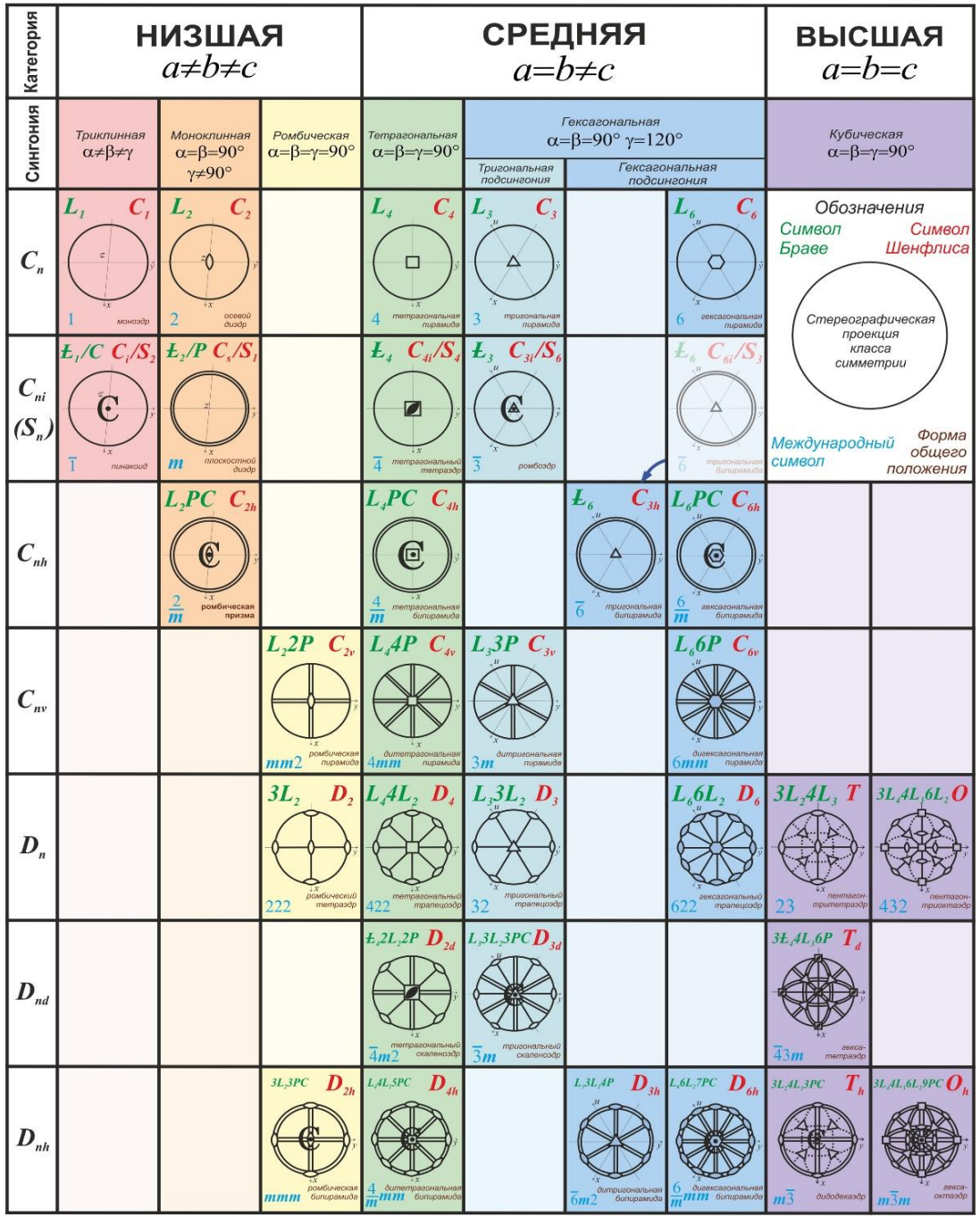
Я девица занятая
Мое имя - запятая





Что бы такая запятая не обладала никакими нетривиальными элементами симметрии, две ее стороны выкрашены в разные цвета

32 КЛАССА СИММЕТРИИ КРИСТАЛЛОВ



Скачать оригинал этой таблицы в формате А4 можно по гиперссылке http://cryst.geol.msu.ru/appliances/pics/32.jpg.

Немного об абстрактной теории групп в теории симметрии

Группой называется множество объектов (G) любой природы с заданной бинарной операцией ($*$), если для любой пары элементов (a и b) этого множества G определен третий результирующий элемент $c = a * b$ того же множества. В общем случае $a * b \neq b * a$. Это значит, что результат зависит от того, в какой последовательности производится умножение элементов группы. Применительно к операциям симметрии это означает, что результирующие операции могут оказаться различными, если поменять порядок выполнения исходных операций.

При этом группой будет лишь такое множество с заданной бинарной операцией, для которого выполняются следующие условия:

- ***ассоциативности*** – $(a * b) * c = a * (b * c)$,
- существования ***единичного члена*** **(e)** - такого единичного элемента, что для любого элемента группы будет выполняться равенство $e * a = a * e = a$,
- ***обратимости*** – для любого элемента a существует элемент a^{-1} из того же множества, называемый *обратным элементом* к элементу a, такой, что $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

Немного об абстрактной теории групп в теории симметрии

Например бесконечной группой является множество целых чисел относительно операции сложения. Проверим это. Вставить бесконечный ряд целых чисел

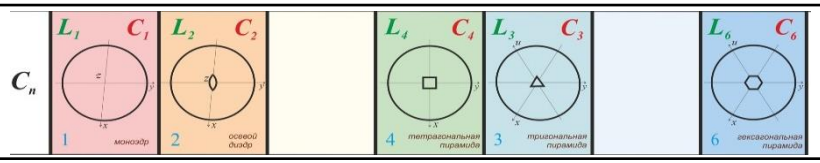
…	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	…

- сумма любой пары элементов множества целое число, а, следовательно, элемент этого множества.

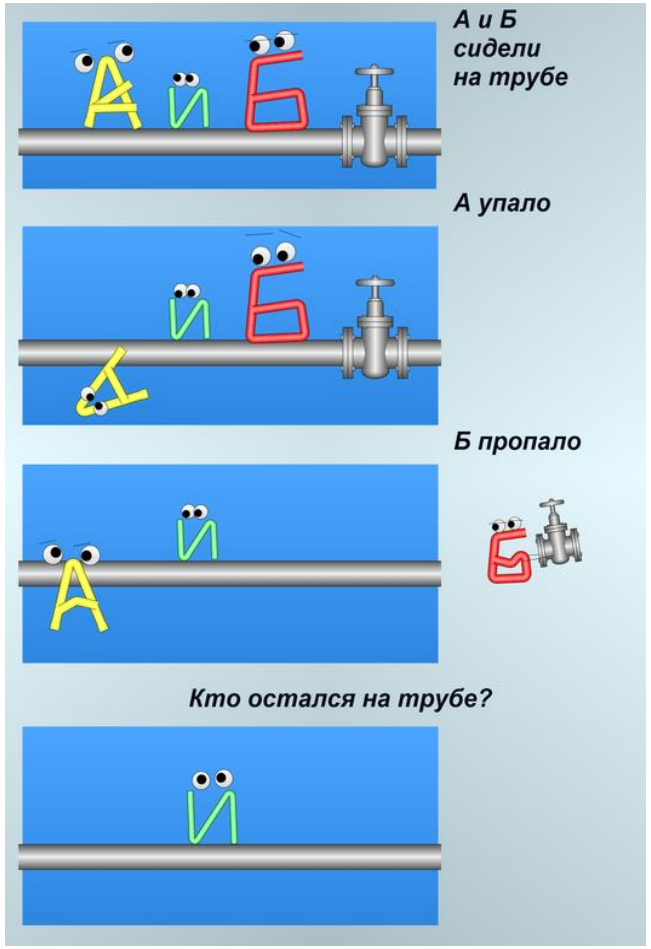
– ***ассоциативности*** – $(a * b) * c = a * (b * c)$ – от перемены мест слагаемых сумма не меняется,

– ***единичный член*** **(*e*)** такого множества – 0. Добавление нуля к любому числу, а также добавление любого числа к нулю не изменяет это число, т.е. для любого целого числа будет выполняться равенство $0 * a = a * 0 = a$,

– ***обратимости*** – $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$. Для любого целого числа существуют число, равное по модулю, но с обратным знаком. Очевидно, что в сумме они дают 0, т.е. единичный элемент.

Некоторые определения теории групп	**В приложении к группам симметрии**
Порядок группы – число элементов группы G	Размножающая способность или величина симметрии
Подгруппа – множество H⊂G, замкнутое относительно той же групповой операции, что и G, удовлетворяющее всем условиям группы	Все классы сингонии являются подгруппами голоэдрии этой сингонии. Уменьшение величины симметрии в 2 раза – гемиэдрия, в 4 раза - тетардоэдрия
Надгруппа – множество G для H,	Кубическая голэдрия – надгруппа для всех классов, кроме гексагональной подсингонии. Голоэдрия гексагональной подсингонии – надгруппа для всех классов гексагональной сингонии
Теорема Лангранжа - порядок подгруппы в целое число раз меньше порядка содержащей ее группы	Величина симметрии группы $P\bar{3}m$ (6) /гемиэдрия/ в 2 раза меньше таковой для ее надгруппы $P\bar{3}m$ (12) /голоэдрия/  Общая простая форма класса 222 – ромбический тетраэдр - содержит в 2 раза меньше граней ромбической бипирамиды - простой формы класса mmm
Абелевы группы – все операции симметрии коммутативны: $a * b = b * a$.	Группы C_{nv}, D_n, D_{nd}, D_{nh} – при n>2 все неабелевы, а, например C_{4h} – абелева
Циклические группы – все элементы группы можно получить умножением одного элемента на самого себя, т.е. все элементы группы – степени одного операторв	Все группы C_n 
Генераторы группы – такие элементы, произведениями которых можно получить всю группу	Элементы симметрии m_x, 3^1_z и 2_x – генераторы группы $\bar{3}m$ $3^1_z = \begin{matrix} \bar{1} & \bar{1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$ $2_x = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{1} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{1} \end{matrix}$ $\bar{2}_x = \begin{matrix} \bar{1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$
Изоморфные группы – каждому элементу одной группы можно поставить в строгом соответствии элемент другой	Классы *222, mm2, 2/m* - изоморфны, а *Pmm*2 *и Imm*2 - нет

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ОПЕРАЦИЙ СИММЕТРИИ





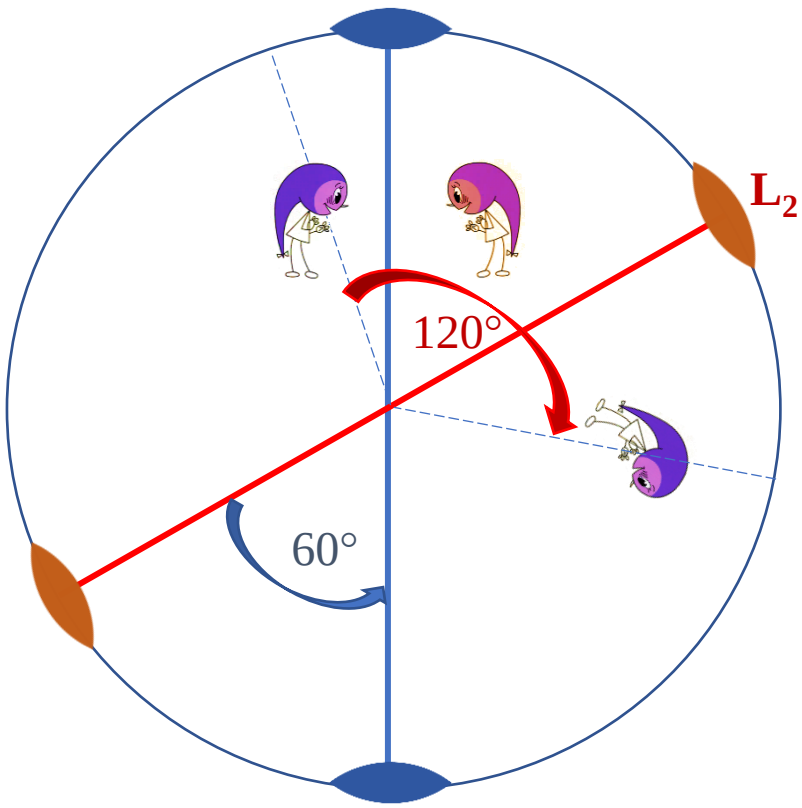
Плоскости P или оси второго порядка L_2 пересекаются под углом 60°

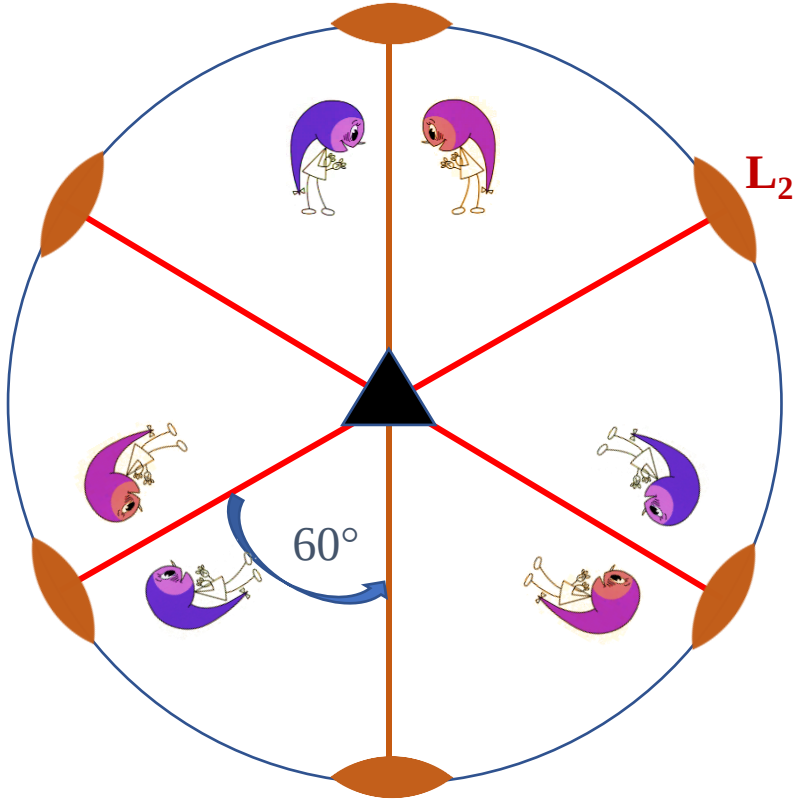


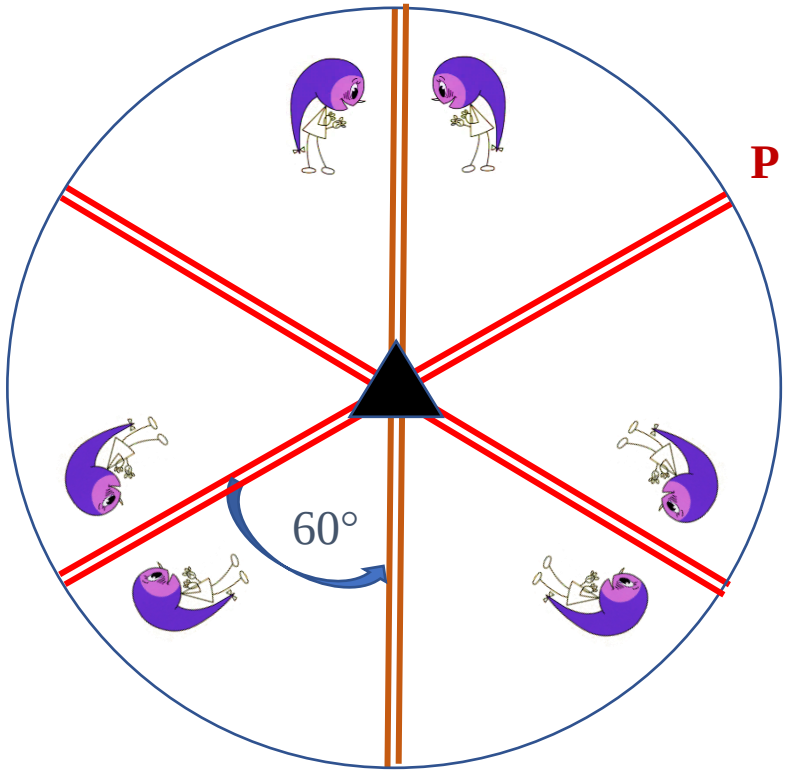
L_2

$L_2 \times L_2 = L_3$

60°

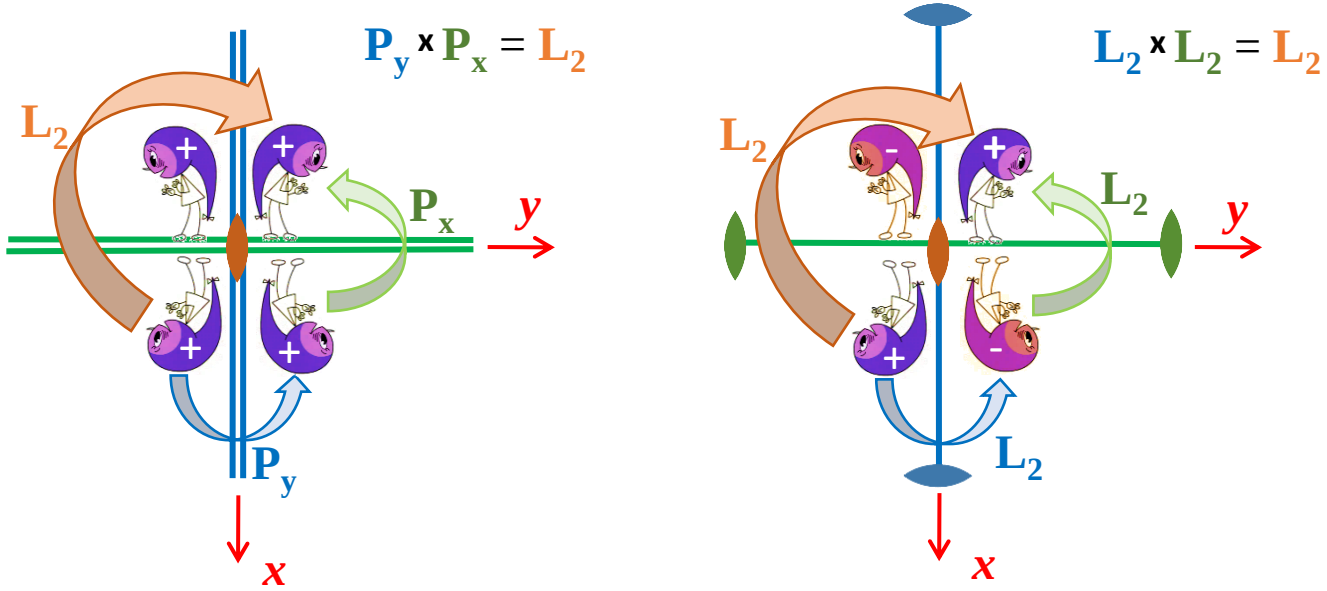






Плоскости P или оси второго порядка L_2 пересекаются под углом 90°



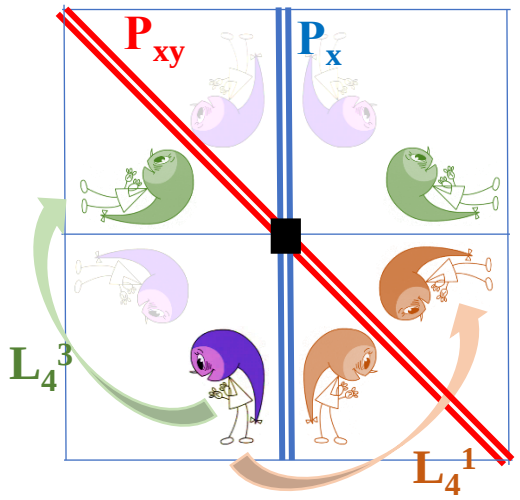


Пересечение плоскостей или осей 2-ого порядка под углом 90° вызывает появление оси 2-ого порядка, проходящей либо по линии пересечения плоскостей, либо через точку пересечения осей перпендикулярно плоскости, в которой лежат порождающие оси

Верно и обратное: плоскость и лежащая в ней ось 2-ого порядка порождают еще одну (неэквивалентную) плоскость под углом 90° к исходной: $P_y \times L_2 = P_x$

Плоскости P или оси второго порядка L_2 пересесекаются под углом 45°





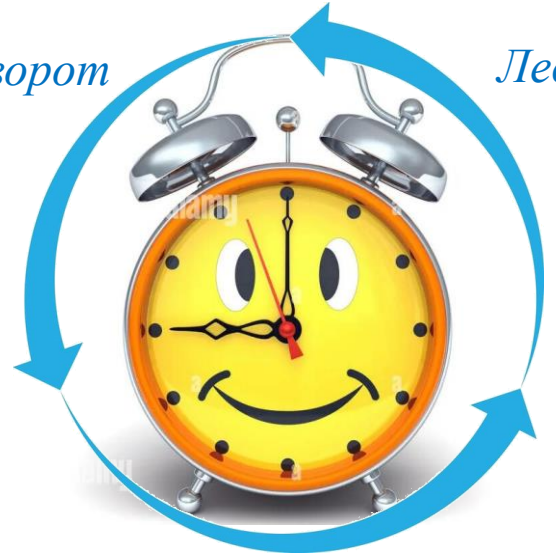
Пересечение плоскостей под углом 45° вызывает появление оси 4-ого порядка. Причем конкретная симметрическая операция зависит от последовательности, в которой проведены отражения:

$P_y \times P_{xy} = L_4^1$ (поворот на 90° *против часовой стрелки*)

$P_{xy} \times P_y = L_4^3$ (поворот на 90 ° *по часовой стрелки* или 3 поворота на 90° *против часовой стрелки*)



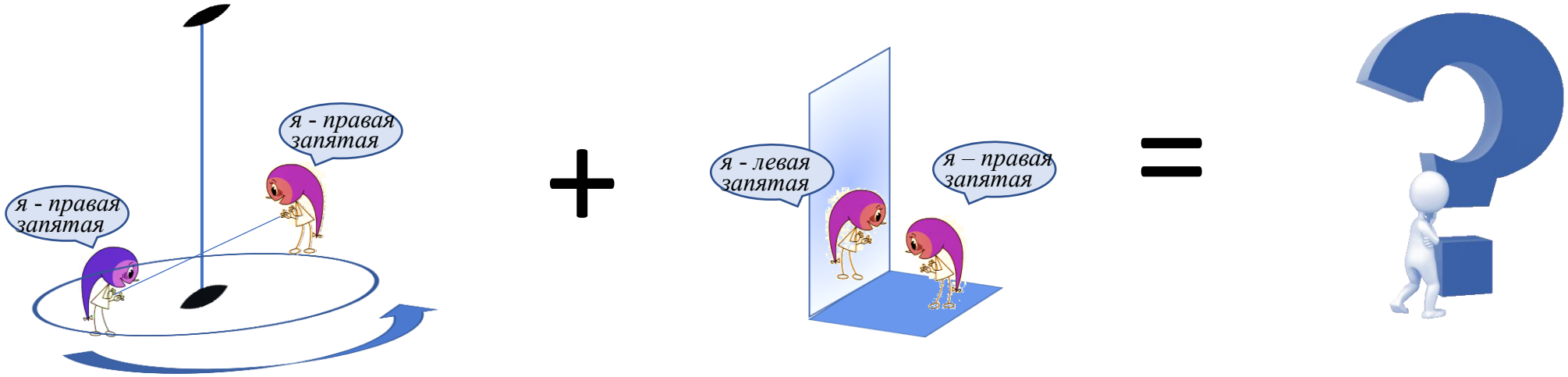
Правый поворот



Левый поворот

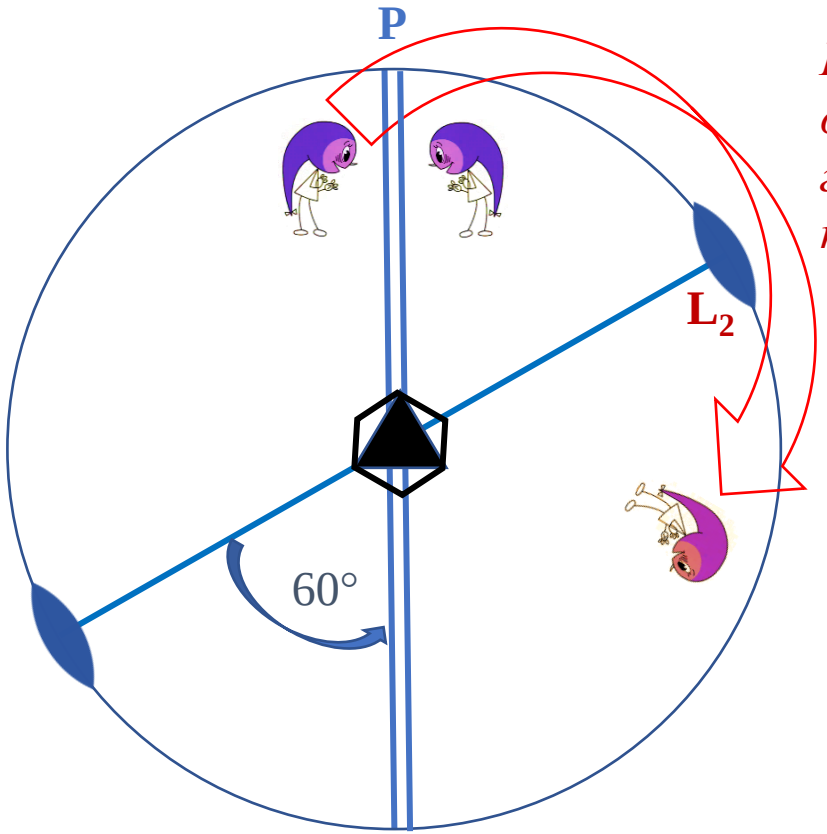


А что будет, если пересекутся ось 2-ого порядка и плоскость?



Правая фигурка при повороте на 180° останется правой (*операция симметрии I рода*). При последующем отражении в плоскости правая фигурка станет левой (*операция симметрии II рода*). Таким образом результирующая операция симметрии – *II рода.*

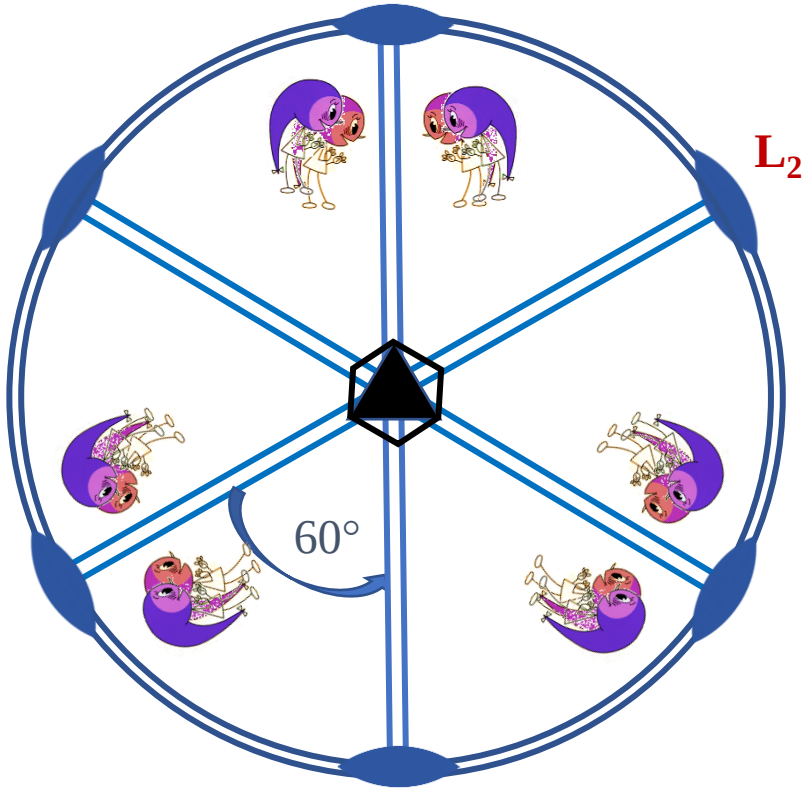
Плоскость P и ось второго порядка L_2 пересекаются под углом 60°



Поворот на 120° и отражение в горизонтальной плоскости

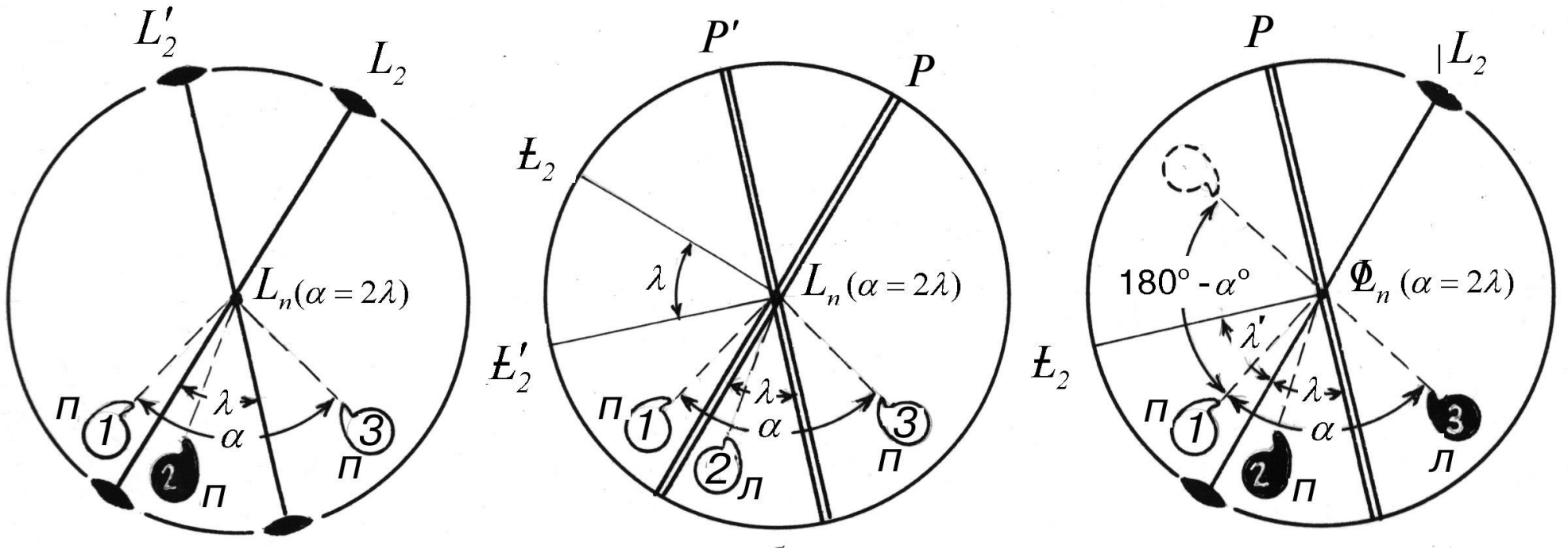
$L_2 \times P = \Phi_3$ или Ł_6

60°



Пересечение оси 2-ого порядка и плоскости под углом 60° вызывает появление зеркальной оси 3-его порядка или инверсионной оси 6-ого порядка, которые можно заменить простыми геометрическими операциями: осью L_3 и перпендикулярной плоскостью P.

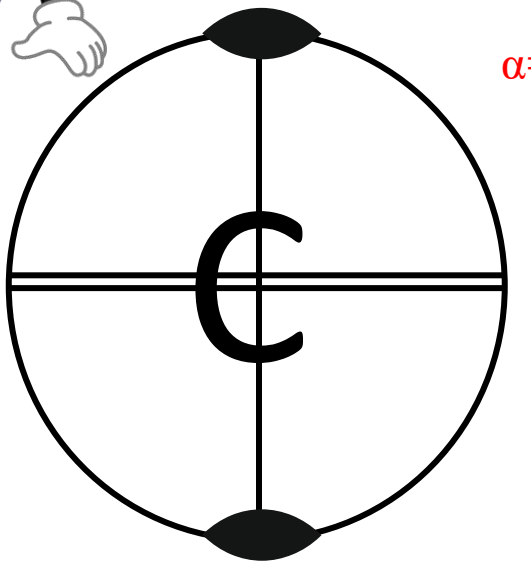
ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЗАКРЫТЫХ ЭЛЕМЕНТОВ СИММЕТРИИ



Взаимодействие осей 2-ого порядка, поворотных или инверсионных приводит к появлению новой оси с элементарным углом поворота вдвое большим, чем угол пересечения порождающих элементов симметрии. Если исходные элементы однородны, то возникающая ось – поворотная, разнородны - зеркально-поворотная или инверсионная.

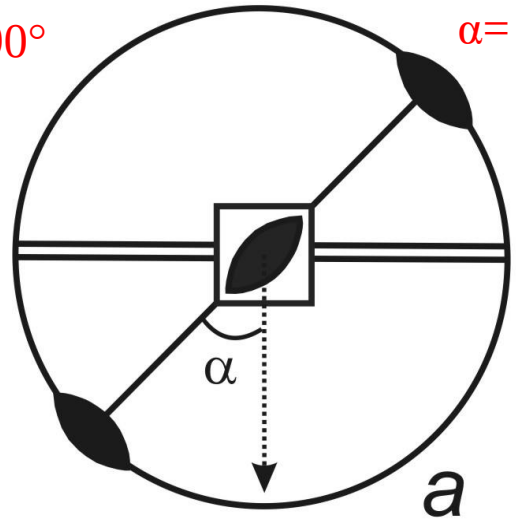


Важные случаи взаимодействия разнородных элементов симметрии



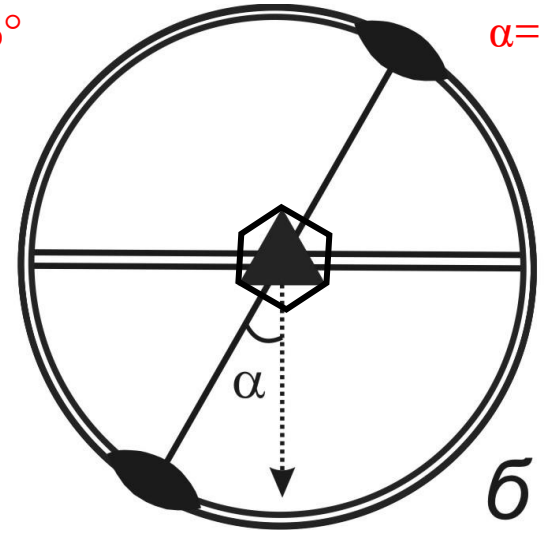
Пересечение оси 2-ого порядка и плоскости под углом 90° всегда порождает центр инверсии

α= 45°



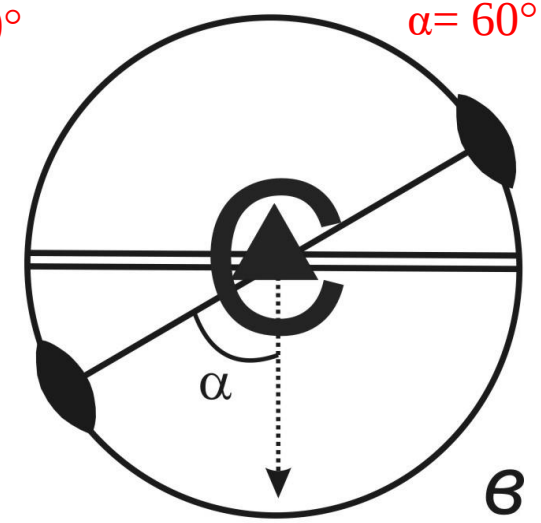
Пересечение оси 2-ого порядка и плоскости под углом 45° всегда порождает инверсионную ось 4-ого порядка

α= 30°



Пересечение оси 2-ого порядка и плоскости под углом 60° всегда порождает инверсионную ось 6-ого порядка

α= 60°



Пересечение оси 2-ого порядка и плоскости под углом 30° всегда порождает инверсионную ось 3-ого порядка

ОБЩЕЕ ПРАВИЛО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ОСЕЙ НИЗШЕГО ПОРЯДКА

Взаимодействие осей 2-ого порядка, поворотных или инверсионных приводит к появлению новой оси с элементарным углом поворота вдвое большим, чем угол пересечения порождающих элементов симметрии. Если исходные элементы однородны, то возникающая ось – *поворотная*, разнородны - *зеркально-поворотная* или *инверсионная*.

$L_2 \times L_2 = L_{n=360°/2\alpha}$

угол α между осями

$L_2 \times P = \text{Ł}_{n=360°/2\alpha}$

угол α между осью и перпендикуляром к плоскости

$P \times P = L_{n=360°/2\alpha}$

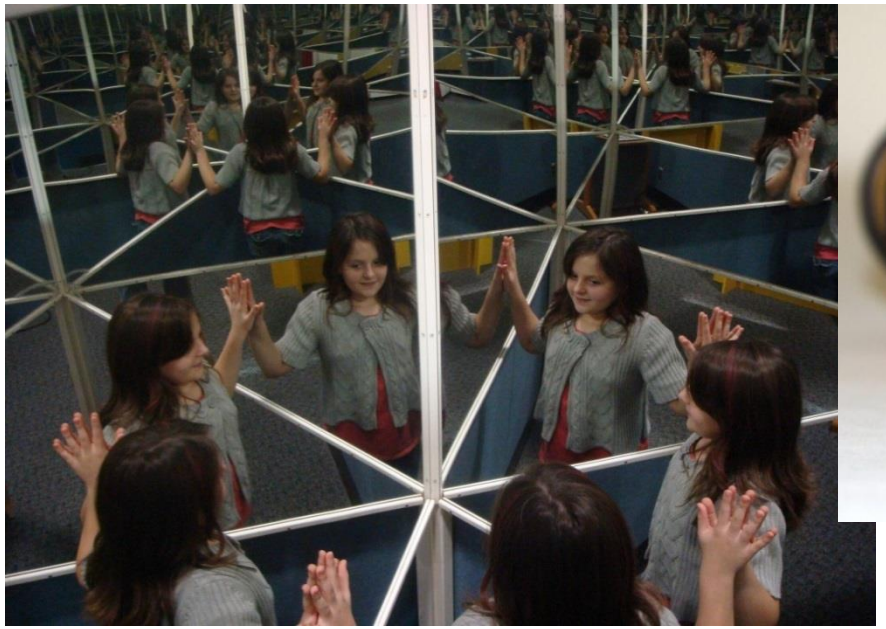
угол α между плоскостями

$L_2 \times P = \text{Ф}_{n=360°/2\alpha}$

угол α между осью и плоскостью

Результирующая ось проходит по линии пересечения плоскостей, либо через точку пересечения осей, перпендикулярно плоскости , в которой лежат порождающие оси, определяющий порядок результирующей оси

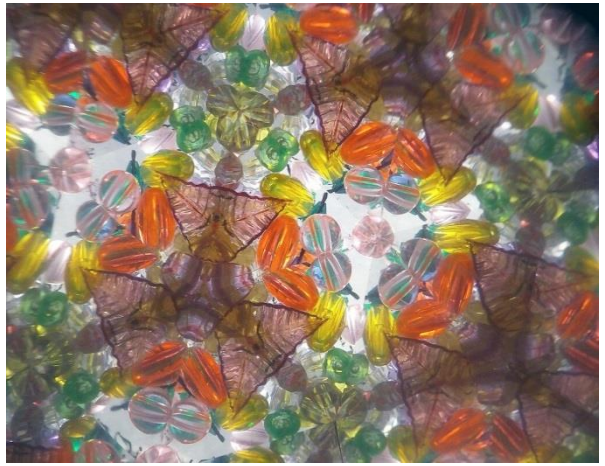
Любую операцию симметрии можно представить последовательным отражением в плоскостях



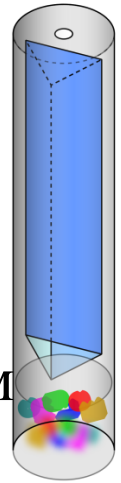




Поворот на сколько?

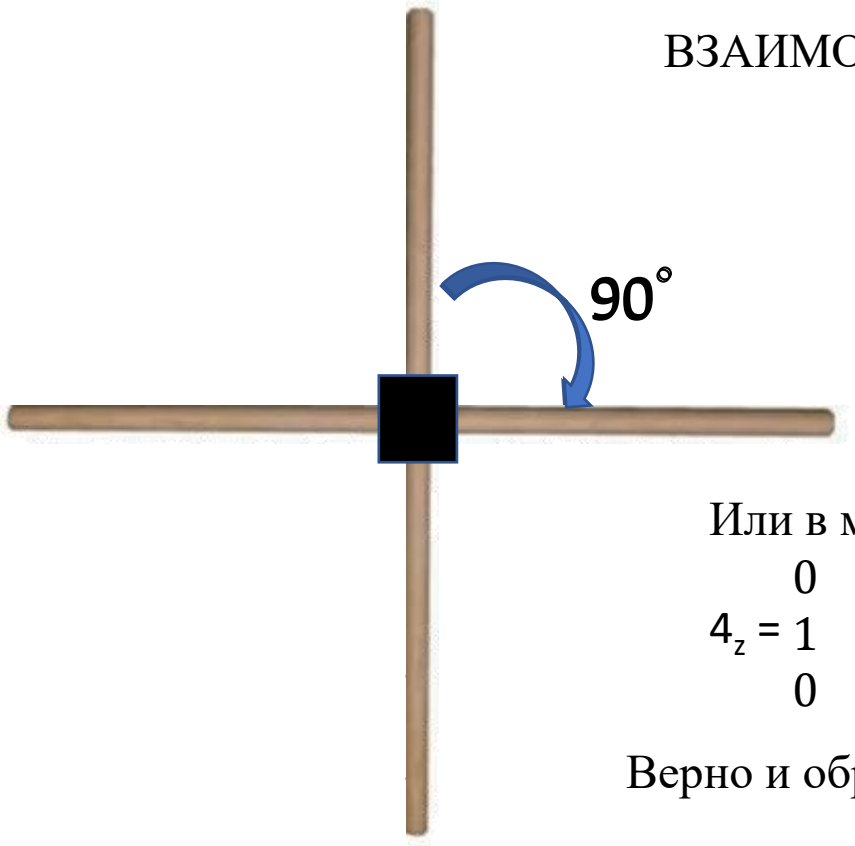


Поворот на сколько?

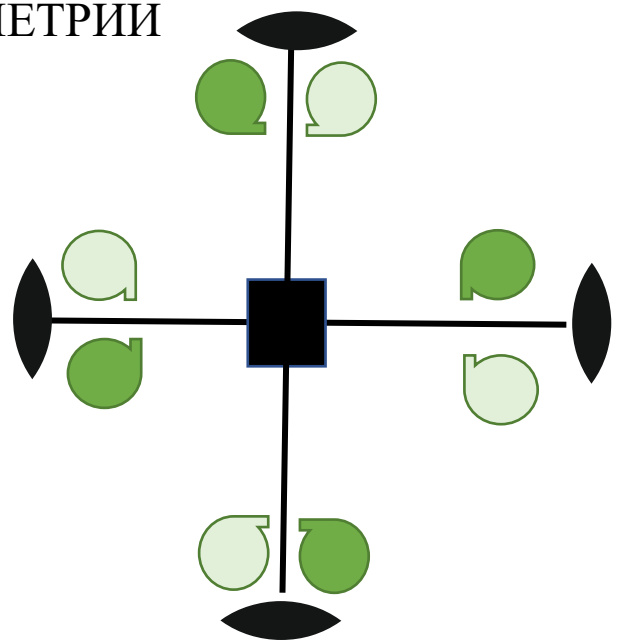


Поворот на 120 можно заменить последовательным отражением в двух пересекающихся под углом 60 плоскостях

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЗАКРЫТЫХ ЭЛЕМЕНТОВ СИММЕТРИИ



Модельный способ наглядно показывает, что пересечение оси 4_z и 2_x вызывает появление дополнительной оси 2-ого порядка 2_{xy}



Или в матричном виде:

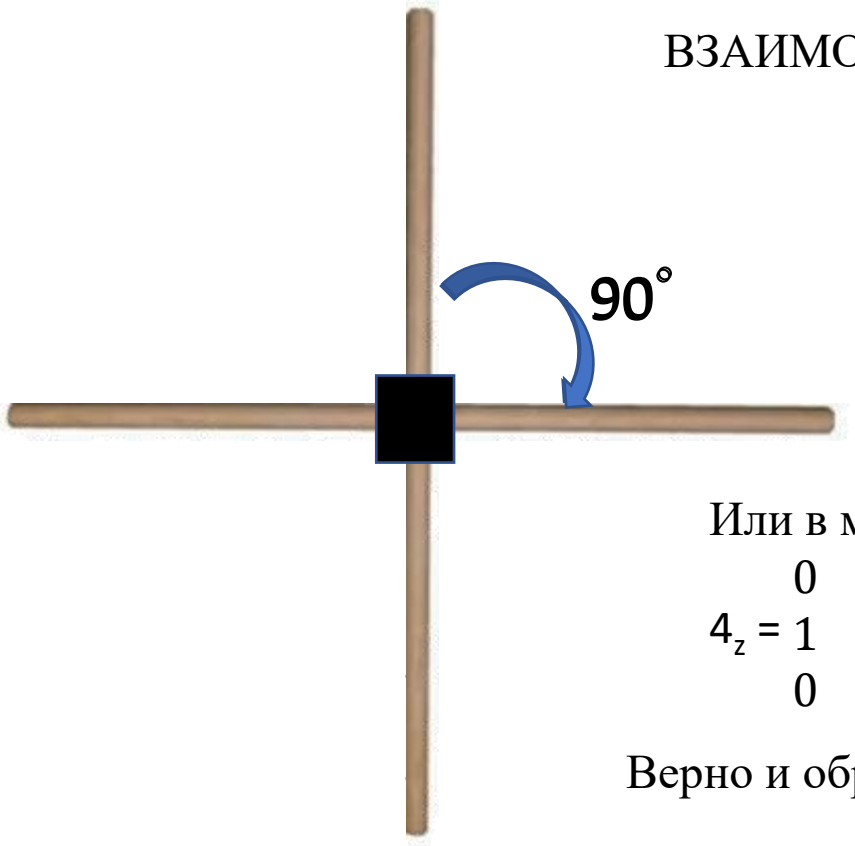
$$4_z = \begin{matrix} 0 & \bar{1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \times 2_x = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{1} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{1} \end{matrix} = \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{1} \end{matrix} = 2_{xy}$$

Верно и обратное: взаимодействие двух осей 2 под углом 45°

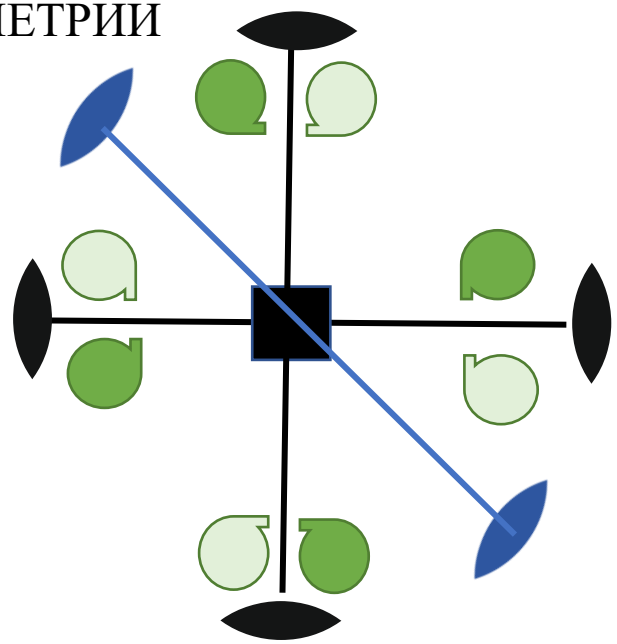
$$2_{xy} = \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{1} \end{matrix}, \times 2_x = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{1} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{1} \end{matrix} = \begin{matrix} 0 & \bar{1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} = 4_z$$

Взаимодействие осей 2-ого порядка, поворотных или инверсионных приводит к появлению новой оси с элементарным углом поворота вдвое большим, чем угол пересечения порождающих элементов симметрии. Если исходные элементы однородны, то возникающая ось – поворотная, разнородны зеркально-поворотная или инверсионная.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЗАКРЫТЫХ ЭЛЕМЕНТОВ СИММЕТРИИ



Модельный способ наглядно показывает, что пересечение оси 4_z и 2_x вызывает появление дополнительной оси 2-ого порядка 2_{xy}



Или в матричном виде:

$$4_z = \begin{matrix} 0 & \bar{1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \times 2_x = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{1} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{1} \end{matrix} = \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{1} \end{matrix} = 2_{xy}$$

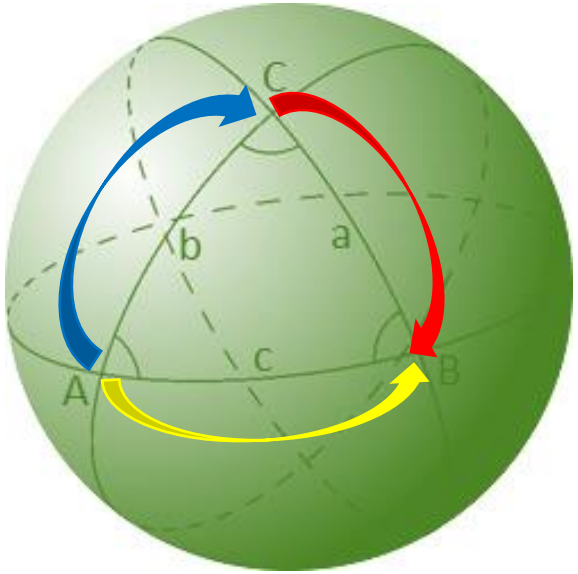
Верно и обратное: взаимодействие двух осей 2 под углом 45°

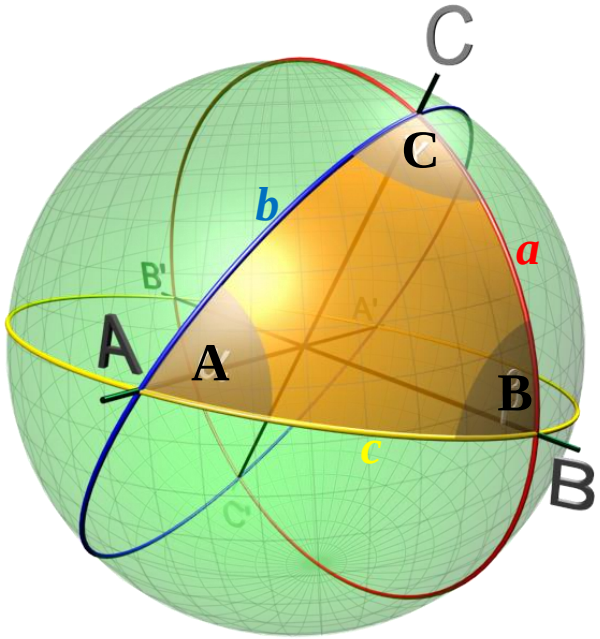
$$2_{xy} = \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{1} \end{matrix}, \times 2_x = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{1} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{1} \end{matrix} = \begin{matrix} 0 & \bar{1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} = 4_z$$

Взаимодействие осей 2-ого порядка, поворотных или инверсионных приводит к появлению новой оси с элементарным углом поворота вдвое большим, чем угол пересечения порождающих элементов симметрии. Если исходные элементы однородны, то возникающая ось – поворотная, разнородны зеркально-поворотная или инверсионная.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЗАКРЫТЫХ ЭЛЕМЕНТОВ СИММЕТРИИ В АСПЕКТЕ СФЕРИЧЕСКОЙ ТРИГОНОМЕТРИИ







Любое перемещение по сферической поверхности можно представить отрезком окружности максимального диаметра, которая в стереографической проекции превращается в отрезок меридиана Сферическая тригонометрия рассматривает треугольники, стороны которого такие отрезки. Т. е. стороны сферического треугольника – отрезки сферических проекций плоскостей, проходящих через центр сферы. В симметрийном аспекте стороны сферического треугольника отражают поворот вокруг оси, перпендикулярной плоскости данной окружности, а его вершины – выходы поворотных осей n-ого порядка, проходящих по линии пересечения этих плоскостей. Причем угол пересечения вдвое меньше элементарного угла поворота такой оси.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЗАКРЫТЫХ ЭЛЕМЕНТОВ СИММЕТРИИ

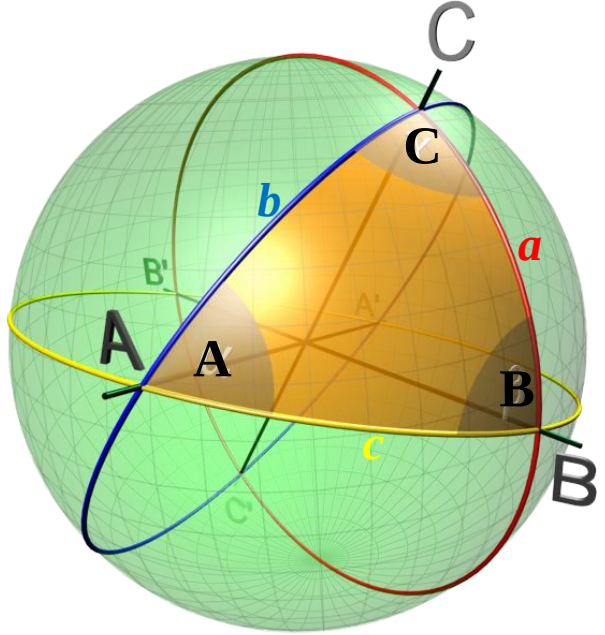
Построим сферический треугольник, вершины которого – выходы осей 2. Углы при этих вершинах такого сферического треугольника равны 90° (180°/2). Угол при третьей вершине есть элементарный угол поворота результирующей оси. Его можно посчитать по сферической теореме косинусов:

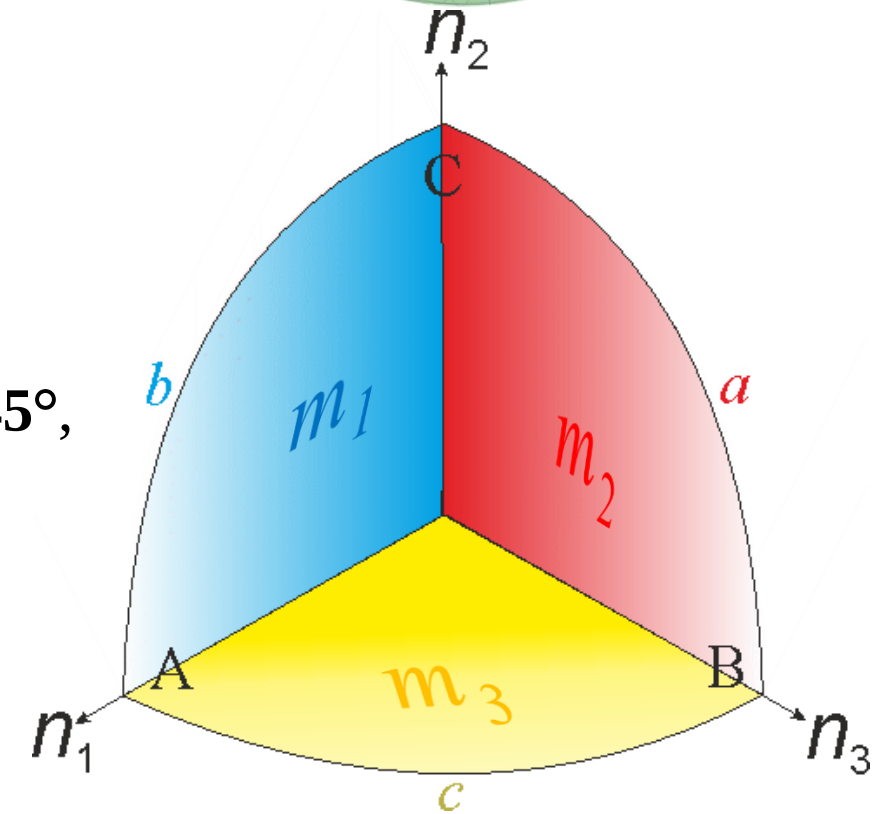
$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$$

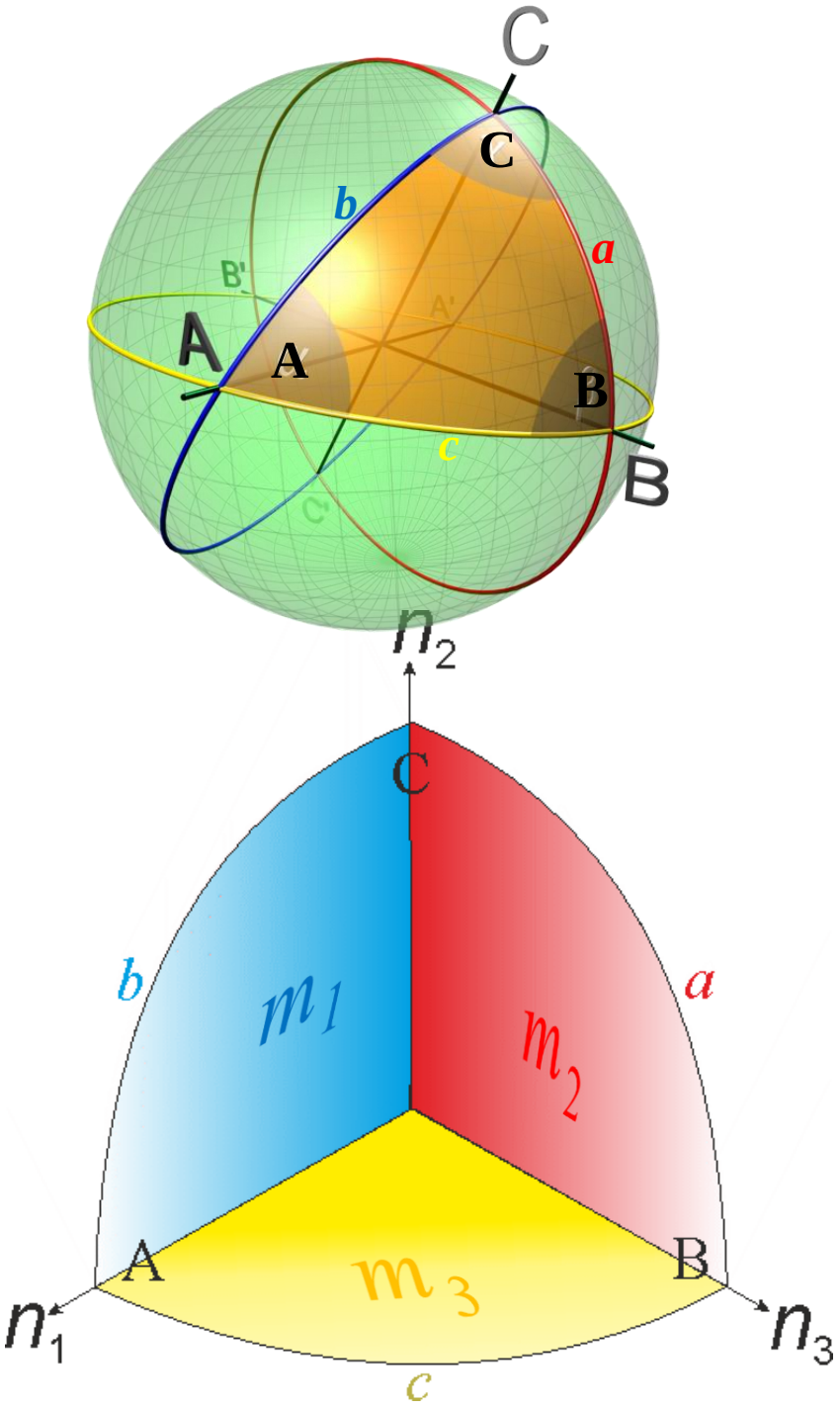
где **A,B,C**- углы сферического треугольника, каждый из которых равен половине элементарного угла поворота соответствующей оси
a – длина противолежащей стороны, равная углу между соответствующими осями

$$\arccos A = -\cos 90° \cos 90° + \sin 90° \sin 90° \cos 45° = \arccos \sqrt{2}/2 = 45°,$$

Учитывая, что этот угол есть половина элементарного угла поворота оси, появляющейся в результате пересечения осей 2-ого порядка под углом 45°, результирующая ось оказывается 4-ого порядка, что полностью соответствует модельному и матричному подходу.







Теорема косинусов дает ответ на вопрос оси каких порядков и под какими углами могут пересекаться в реально существующих многогранниках: *существуют только такие многогранники, сумма углов при вершинах, образованных выходами его поворотных осей, больше 180°*:

$$A + B + C < 180°$$

или сумма обратных отношений их порядков больше 1:

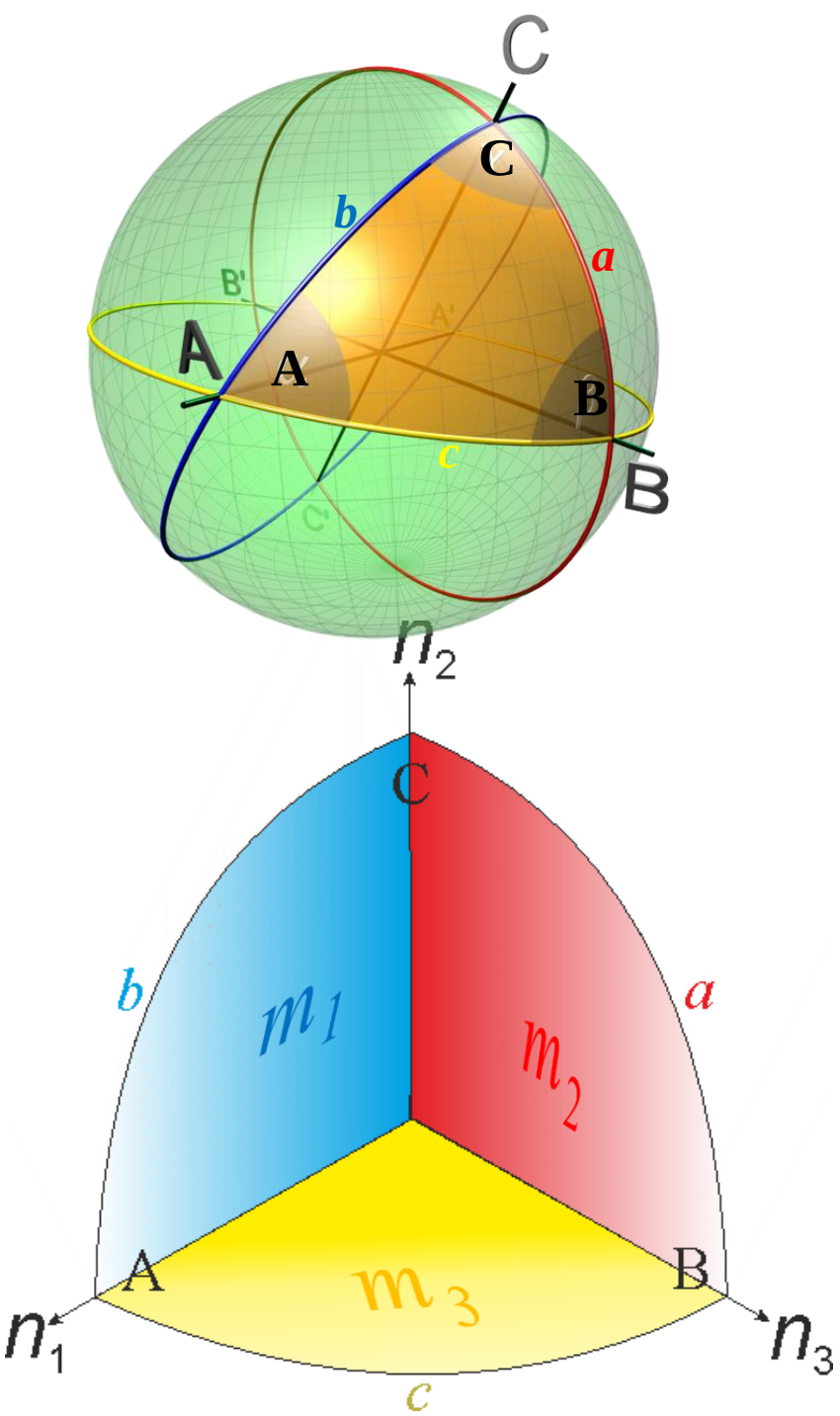
$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} > 1$$

Из неравенства следует, что в случае пересечения осей высшего порядка существует только 3 набора осей:

1. $n_1=3, n_2=3, n_3=2$
2. $n_1=4, n_2=3, n_3=2$
3. $n_1=5, n_2=3, n_3=2$



Вывод справедлив не только для кристаллографических многогранников



Сдает ответ на вопрос под какими углами могут пересекаться поворотные оси данных порядков в реально существующих многогранниках

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

Откуда

$$\arccos A = \arccos \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

*где **a, b, c** - стороны сферического треугольника, **A** – угол, противолежащий стороне **a**, равный α/2 соответствующей оси*

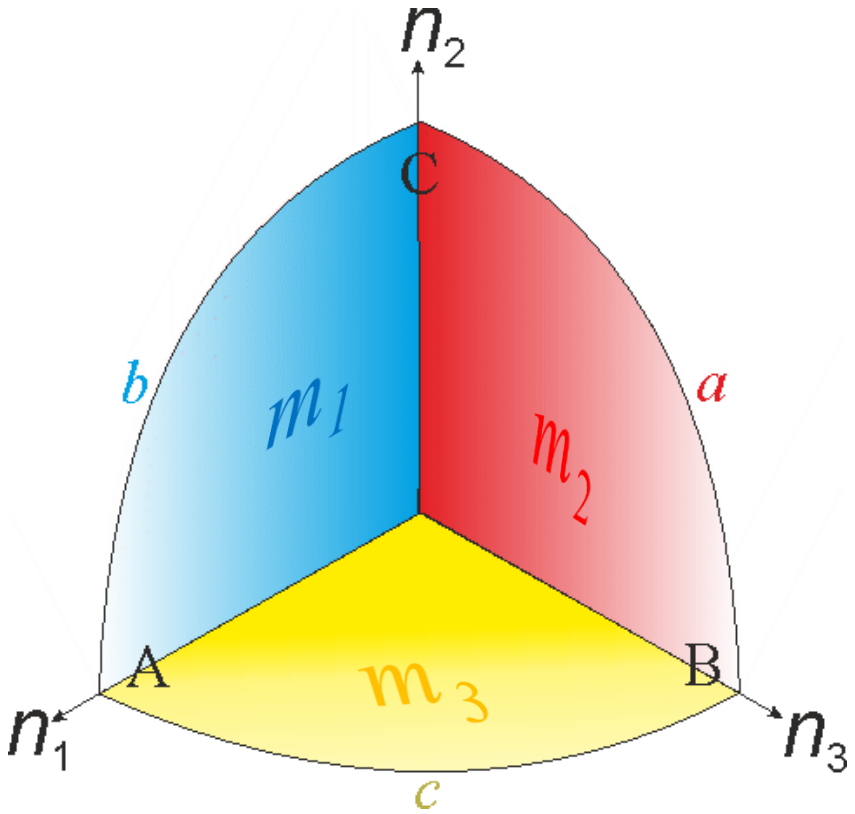
$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$$

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos c}{\sin B \sin c}$$

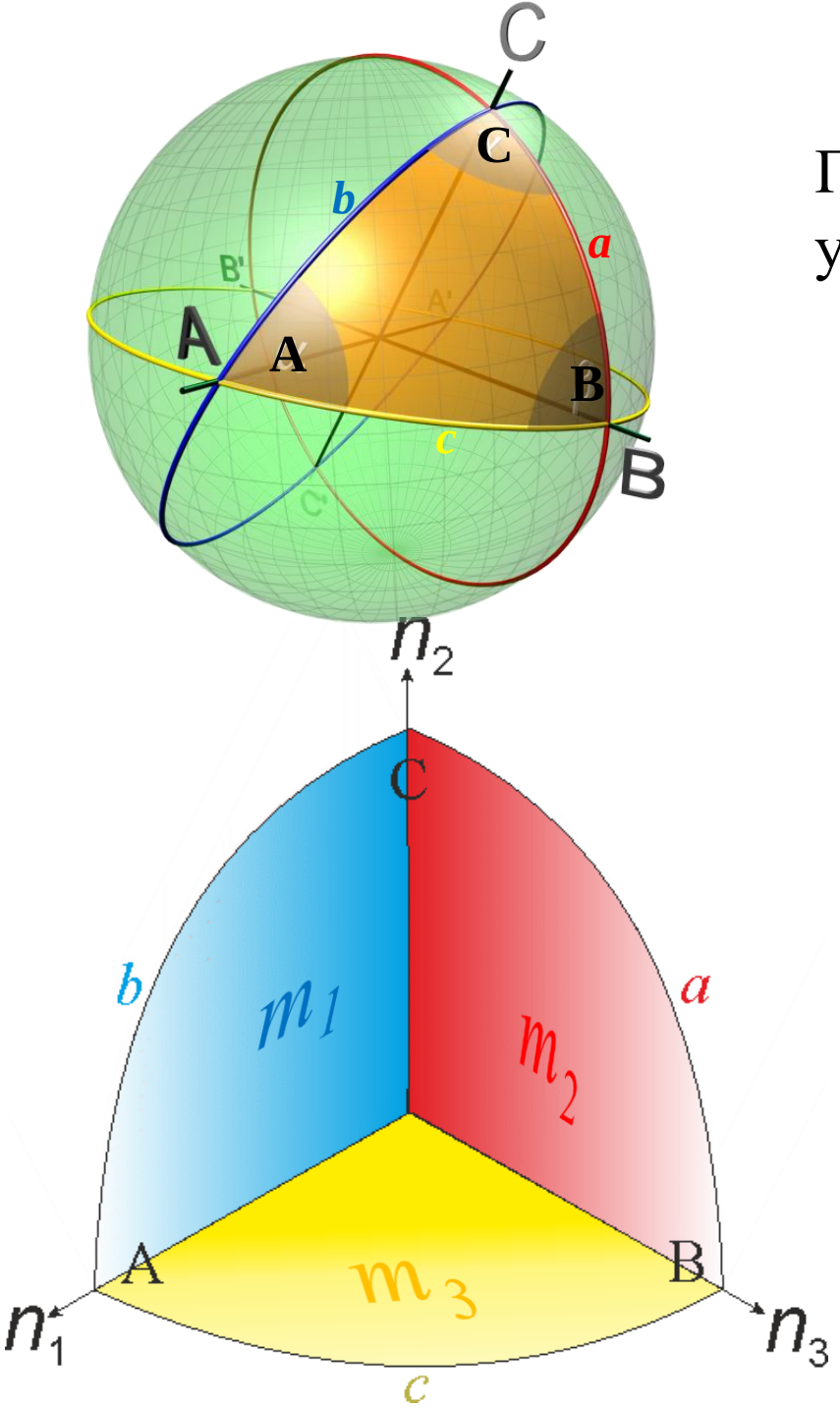
$$a = \arccos \frac{\cos A + \cos B \cos c}{\sin B \sin c}$$

Рассчитаем угол между осями L_3 и L_4:

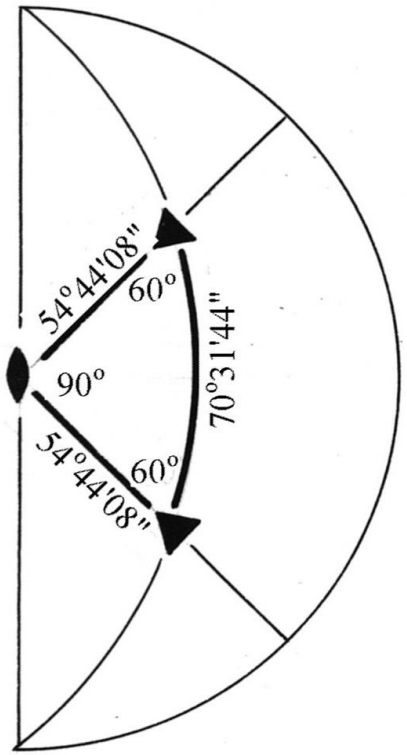
$$b = \arccos \frac{\cos 90 + \cos 60 \cos 45}{\sin 60 \sin 45} =$$

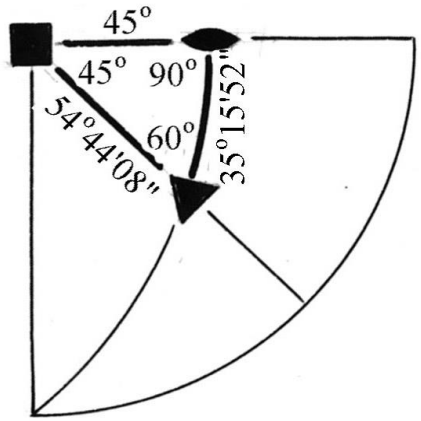


$$= \arccos \frac{0 + 1/2 * \sqrt{2}/2}{\sqrt{3}/2 * \sqrt{2}/2} = \arccos 0,5773 = 54,74^\circ$$

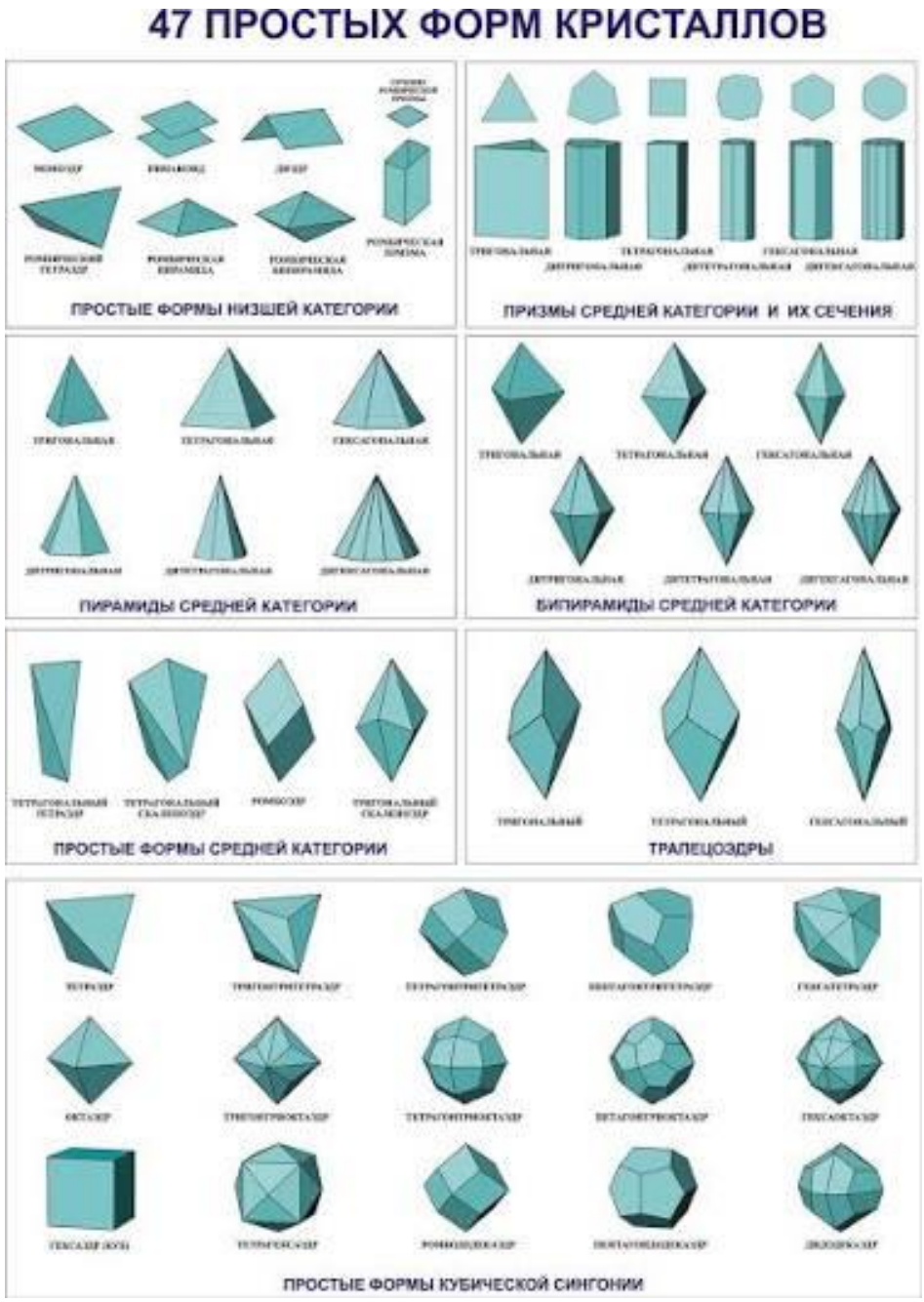


По формулам сферической тригонометрии можно посчитать углы между осями кубической сингонии:



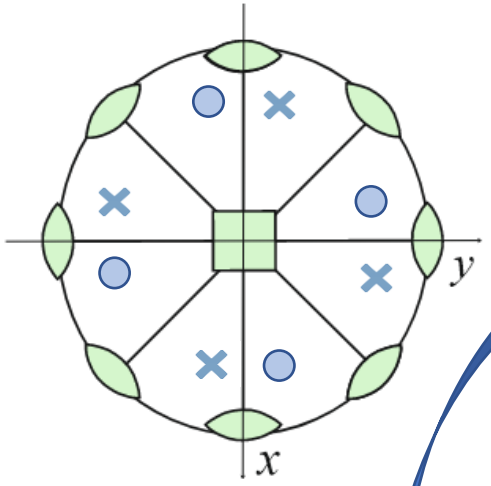


Немного о простых формах

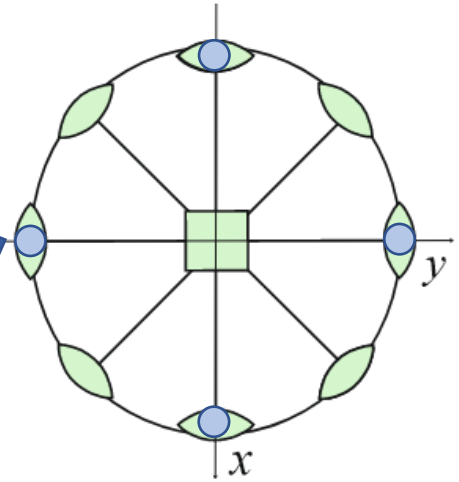


Существует 47 геометрически разных простых форм.
146 физически различных простых форм.
С учетом энантиоморфных пар – 193.
С учетом положительных и отрицательных пар – 318.

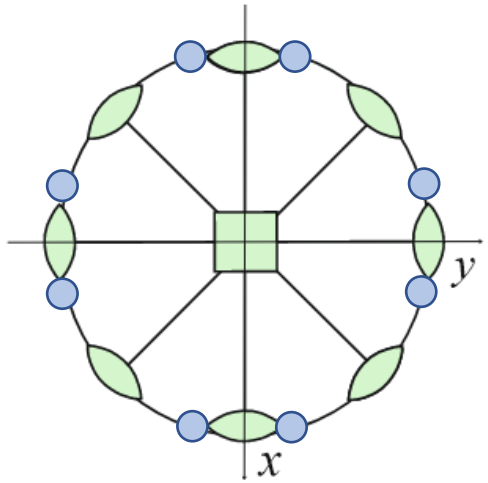
Немного еще о простых формах



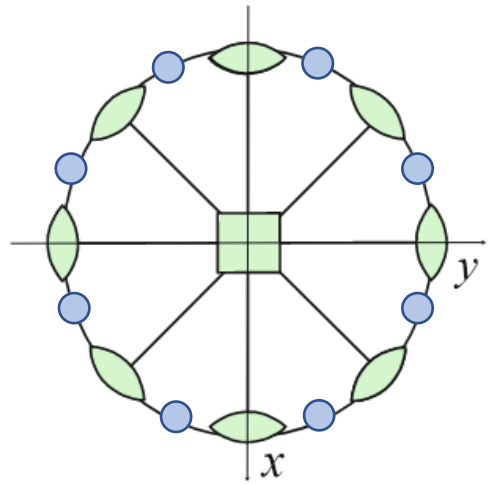
Тетрагональный трапецоэдр



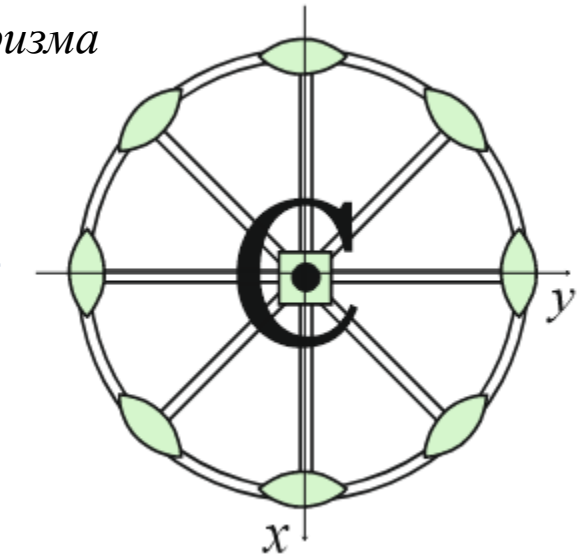
Тетрагональная призма



Дитетрагональная призма



Дитетрагональная призма (симметризированная)

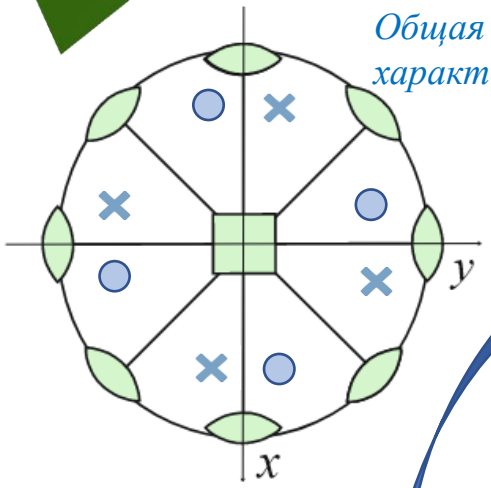


Совершенно очевидно, что и тетрагональная , и дитетрагональная призма обладают симметрией 4/mmm, более высокой симметрией, чем класс 422. А дитетерагональная симметризированная - 8/mmm



G = 422
H = G
K = F = {e}

Общая характеристическая

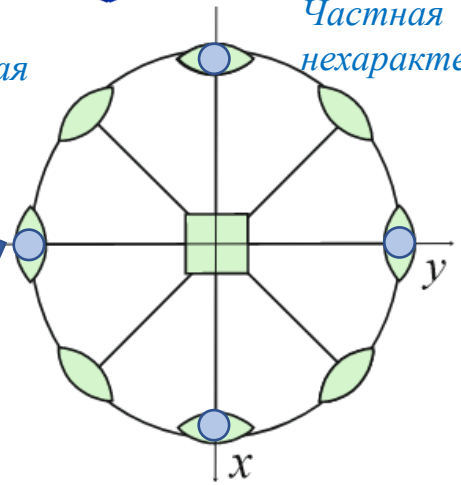


Тетрагональный трапецоэдр

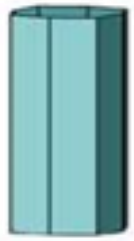


G = 422
H = 4/mmm
K = 2
F = mm2

Частная нехарактеристическая

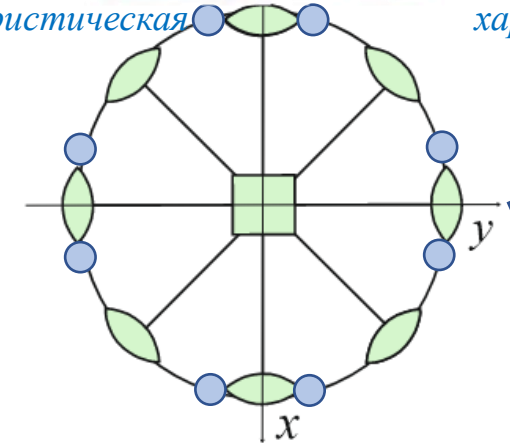


Тетрагональная призма

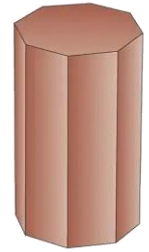


G = 422
H = 4/mmm
K = {e}
F = {e}

Общая характеристическая

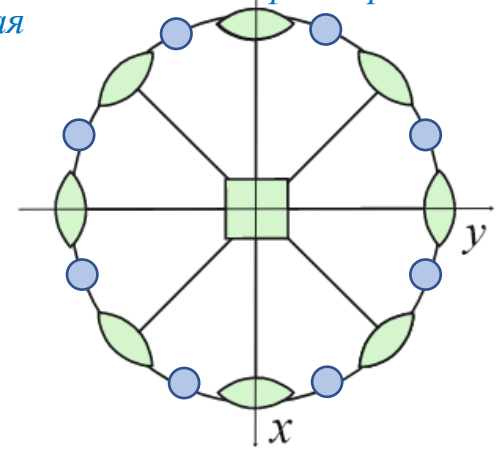


Дитетрагональная призма

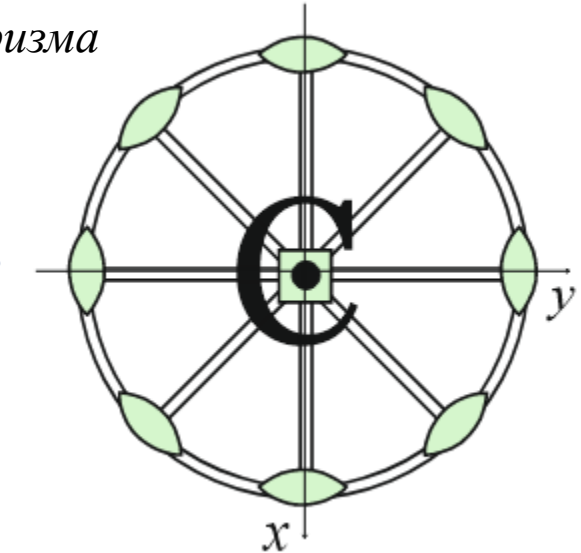


G = 422
H = 8/mmm
K = {e}
F = mm2

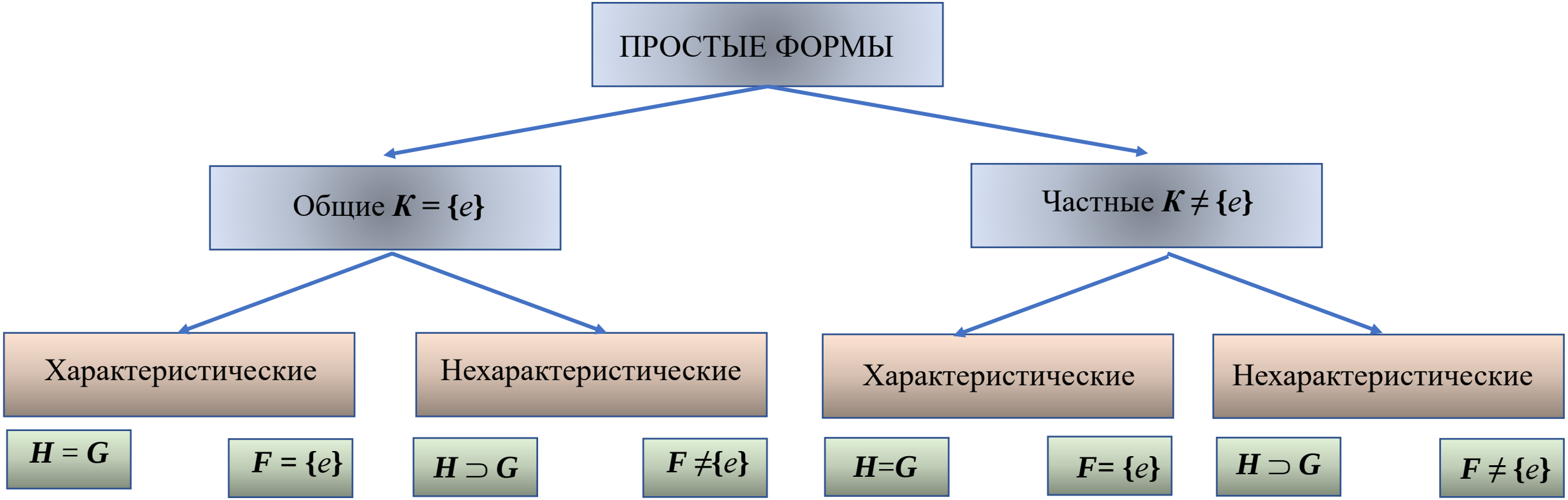
Общая нехарактеристическая



Дитетрагональная призма (симметризированная)



Совершенно очевидно, что и тетрагональная и дитетрагональная призма обладают симметрией 4/*mmm*, более высокой симметрией, чем класс 422. А дитетерагональная симметризированная - 8/*mmm*



G – рассматриваемый класс симметрии, подгруппа ***H***

H – более высокосимметричный класс симметрии, надгруппа ***G***

K – класс симметрии грани в классе ***G (стабилизатор)***

F – класс симметрии грани в классе ***H***

Общая простая форма – симметрия грани (стабилизатор) тривиальна (класс, описывающий симметрию грани $K = \{e\}$)

Частная простая форма – симметрия грани (стабилизатор) нетривиальна (класс, описывающий симметрию грани $K \neq \{e\}$)

Характеристическая простая форма – простая форма, для которой породивший ее класс является максимальным (надгруппа ***H*** совпадает с ***G***: $H = G$)

Нехарактеристическая простая форма – простая форма, которая может существовать в более высокосимметричном классе (класс симметрии ***H*** является надгруппой класса ***G***: $H \supset G$)

На этом мы прощаемся с макросимметрией, но…



«Он улетел, но обещал вернуться.
илый, милый, Карлсон…»

