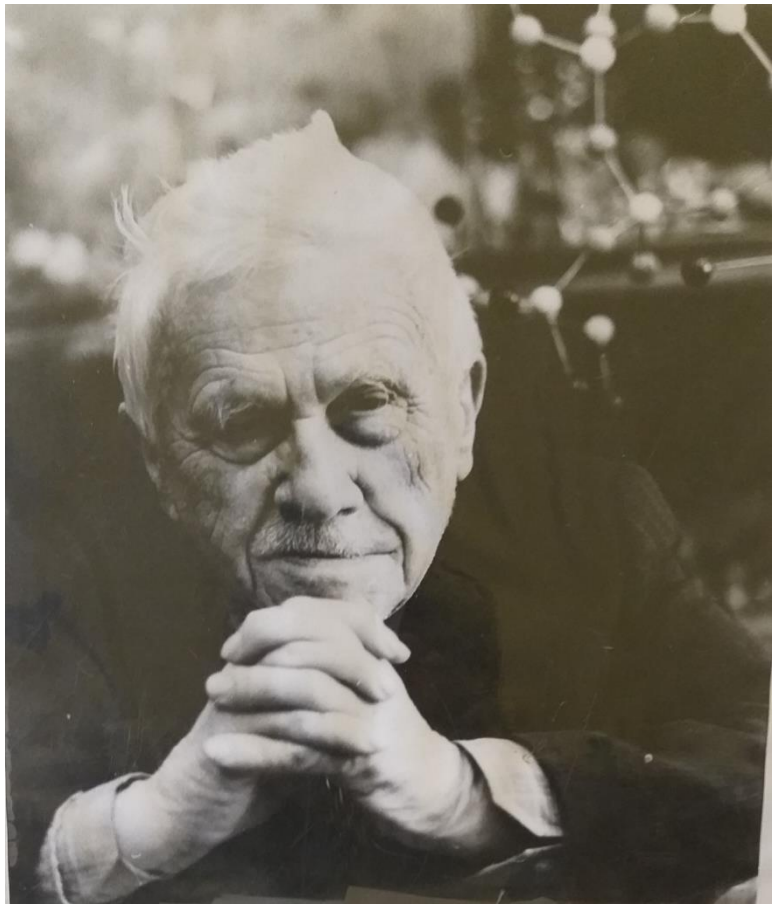
Симметрия кристаллического микромира с применением искусственного интеллекта

1.История создания групп, школы Федорова и Шенфлиса, основные представления об элементах симметрии микромира и влияние трансляции, одномерные и двумерные группы и их вывод, роль симметрии слоев в настоящее время, узоры Эшера и анализ их симметрии
2. Решетки Бравэ, ромбические группы, разбор расположений осей, плоскости, основные характеристики позиций атомов в группе, Интертаблицы и способы описаний структур. Тетрагональные группы - классный метод вывода и тетрагонализация на основе ромбических групп завышением симметрии
3. Кубические группы: пример вывода из ромбических и тетрагональных, особенность графики и изображений структур – первый Атлас с чертежами групп. Примеры базовых структурных типов и модели , начало гексагональных групп, вывод классным методом и из кубических
4. Базовые структурные типы гексагональных минералов и неорганических соединений, плотнейшие упаковки. Моноклинные группы. Рассмотрение проблемы встречаемости пространственных групп.
5.Антисимметрия, основные положения, точечные, одномерные, двумерные и трехмерные Шубниковские группы, узоры Эшера; знакомство с Атласом Копцика, приложения к магнитным группам – новейшие примеры и предлагаемый симметрийный анализ
6. Многоцветная симметрия Белова, узоры и точечные группы, магнетизм. Понятия о пятерной симметрии в кристаллографии в применении к новейшим достижениям углеродных материалов
7. Искусственный интеллект в структурном анализе, программы поиска симметрии и определения структур. Сопоставление GA (генетический алгоритм) и ML (машинное изучение-обучение) с OD-теорией, предсказания структур и реализованные структуры боратов, йодатов, ванадатов.

Симметрия кристаллического микромира с применением искусственного интеллекта

Е. С. Федоров в 1883 г.
(год окончания Горного института).

Евграф Степанович Федоров **(1853 г. - 1919 г.)** опубликовал два основополагающих труда по симметрии кристаллов:
«Начала учения о фигурах», 1885г.
«Симметрия правильных систем фигур», 1890г. с описанием всех возможных 230 правильных систем фигур, причем первые сообщения о его учении он сделал в 1881г. на заседании Минералогического общества, а затем почти окончательный вывод – там же в 1889г., что зафиксировано документально и подтверждает его несомненный приоритет.
Первые работы Шенфлиса были опубликованы в 1888г. И затем в 1891г., где он неоднократно цитирует Е.С.Федорова и его работу 1890г.
Открытие Х-лучей К.Рентгеном состоялось в 1895г.
Открытие дифракции на кристаллах М. Лауэ в 1912г.

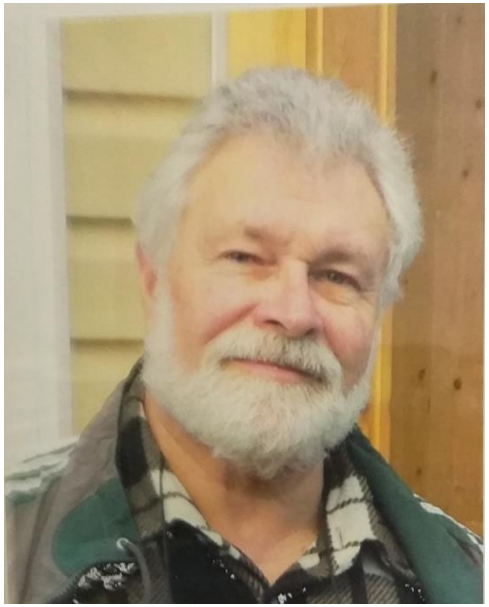


Академик Н.В.Белов

Кафедра кристаллографии и кристаллохимии, которая предлагает данный курс, является продолжателем дела развития симметрии для минералогии, кристаллохимии и других направлений. Нужно упомянуть заведующего кафедрой академика Н.В. Белова, патриарха кристаллографии в Советском Союзе.
Он был Президентом Международного кристаллографического общества и основателем школы кристаллографов СССР. Его любимым направлением исследований была геометрическая кристаллография, симметрия как таковая и ее приложения, в том числе для структурного анализа кристаллов. Ниже мы рассмотрим его идеи о многоцветной симметрии кристаллов.

На кафедре работали выдающиеся преподаватели – Юдифь Герцевна Загальская и Галина Петровна Литвинская, которые внесли важный вклад в курс о пространственных группах, читаемый на кафедре, а продолжил его Юрий Клавдиевич Егоров-Тисменко, автор учебника, по которому обучаются наши студенты.

Ю.Г.Загальская и Г.П.Литвинская



Ю.К.Егоров-Тисменко

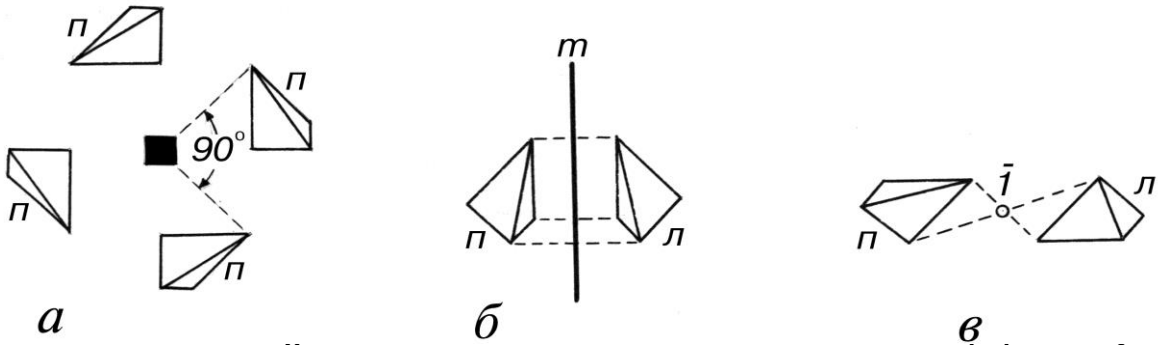
Определение симметрии и операции симметрии

Как писал Е.С.Федоров (1901), **“симметрия есть свойство геометрических фигур повторять свои части, или, выражаясь точнее, свойство их в различных положениях приходить в совмещение с первоначальным положением”.**

Преобразование симметрии сохраняет неизменными метрические свойства частей объекта или всего объекта, если все точки его переводятся в соответствующие точки другого по единому правилу.

Различают два вида равенства: ***конгруэнтное*** (греч. *congruens* – совмещающийся или *равенство вложения*) и ***энантиоморфное*** – зеркально равное (греч. *enantios* – *противоположный*, *morphe* – форма, правое и левое) и выделяют **два рода симметрических преобразований – *операций симметрии*:**

операции *1-го рода*, связывающие конгруэнтно равные фигуры, и *2-го рода* – связывающие энантиоморфные фигуры.



На рисунке показано действие конгруэнтного равенства: (а) ось 4 и энантиоморфного : (б) *m* и (в) центра инверсии $\bar{1}$ справа даны оси 2, 3, 4 и 6

Главная особенность симметрических операций состоит в том, что полная их совокупность для любого объекта всегда образует **группу.**
Это позволяет рассматривать теорию симметрии кристаллов как раздел математической теории множеств и использовать математический аппарат теории абстрактных групп Брандта при изучении законов симметрии кристаллов.

Что же мы понимаем под **группой симметрии**:
Пусть имеется множество однотипных G-элементов (числа, матрицы, операции и т.д.).
Пусть задана бинарная операция, по которой **любой паре из множества** ставится в соответствие **результирующий третий элемент** того же множества $c = a \cdot b$.
Такая операция называется умножением, а данные элементы образуют **группу.**

Совокупность операций может определять **точечные группы**, где есть хотя бы одна инвариантная (остающаяся на месте) точка и сами объекты не имеют трансляций (**нон-мерные группы**).
Для бесконечных построек трансляция может быть в одном направлении : **одномерные группы** или группы симметрии бордюров; в двух направлениях : **двумерные группы** или группы симметрии слоев (обоев); в трех направлениях : **пространственные группы** или группы симметрии атомных построек – кристаллов .

В основе вывода пространственных групп лежат 32 точечные группы, которые были впервые выведены И.Гесселем в 1830 г. (и забыты) и независимо от него А.В.Гадолиным в 1867 г. Вывод основан на переборе допустимых сочетаний порождающих операций симметрии – генераторов групп. Базовые понятия, необходимые для дальнейшего рассмотрения это категории, сингонии и координатные системы:

Низшая категория, сингонии

триклинная , $a \neq b \neq c$, $\alpha \neq \beta \neq \gamma$, 1, $\bar{1}$

моноклинная, $a \neq b \neq c$, $\gamma \neq \alpha = \beta = 90°$, 2, *m*, 2/*m*

ромбическая, $a \neq b \neq c$, $\alpha = \beta = \gamma = 90°$, 222, *mm*2, *mmm*

Средняя категория, сингонии

тетрагональная, $a = b \neq c$, $\alpha = \beta = \gamma = 90°$, 4, $\bar{4}$, 422, 4/*m*, 4*mm*, $\bar{4}2m$,4/*mmm*

тригональная, $a = b \neq c$, $\alpha = \beta = 90°$, $\gamma = 120°$, 3, $\bar{3}$,32, 3*m*, $\bar{3}m$

гексагональная , $a = b \neq c$, $\alpha = \beta = 90°$, $\gamma = 120°$, 6, $\bar{6}$, $\bar{6}m2$, 6/*m*, 622, 6*mm*, 6/*mmm*

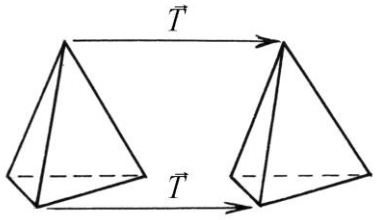
Высшая категория, сингония

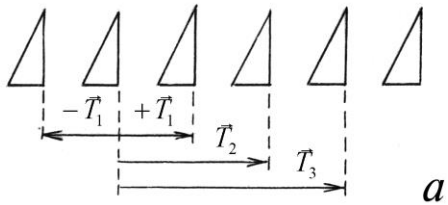
кубическая, $a = b = c$, $\alpha = \beta = \gamma = 90°$, 23, 432, $m\bar{3}$, $\bar{4}3m$, $m\bar{3}m$

$\bar{1}$

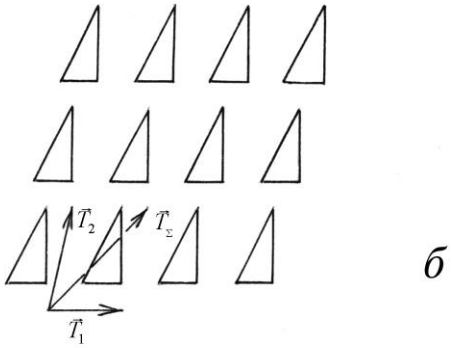
Трансляция как основной элемент симметрии бесконечных построек.

Трансляция есть симметрическая операция 1-го рода бесконечных объектов, параллельный перенос в одном направлении и на одинаковое расстояние. По сути это вектор, характеризующийся величиной и направлением.
Сочетание трансляций - неколлинеарных векторов - приводит к появлению нового вектора по правилу параллелограмма и к бесконечному двумерному узору , или к трехмерному узору (параллелепипед).





а



б

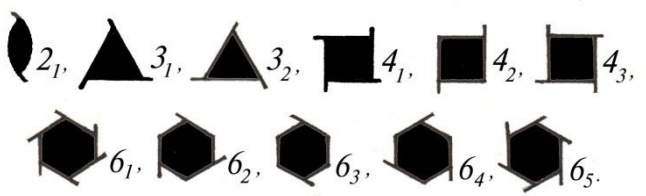
При переходе к кристаллам – бесконечным постройкам – трансляция влияет и на элементы симметрии, расширяя их реестр.

Взаимодействие оси с параллельной ей трансляцией.

Сочетание двух операций симметрии 1-го рода – поворота вокруг некоей оси и одновременного переноса в параллельном оси направлении, т.е. взаимодействие поворота с трансляцией приводит к возникновению принципиально новых типов осей, называемых **винтовыми**.

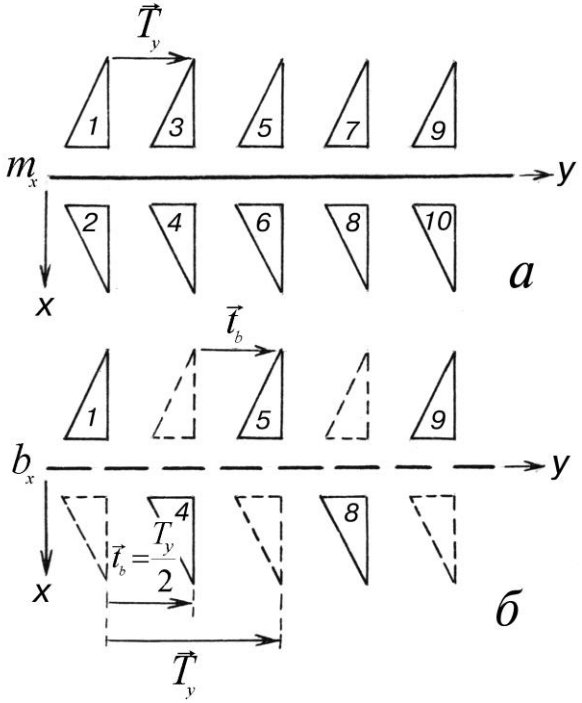
Если имеются 2 поворота на интервале 360 ° (ось 2), то величина возможного подъема (трансляции) составит 1/2 параметра оси *c,* если 3 поворота (ось 3) то это может быть 1/3 и 2/3, 4 поворота (ось 4) – каждый поворот может сопровождаться подъемом на 1/4, 2/4, 3/4 и наконец для 6-ти поворотов (ось 6) 1/6, 2/6, 3/6, 4/6, 5/6. Общее число осей данного порядка n (винтовых +поворотных) равно порядку оси, а ход оси $t_z = \vec{T}_z$ /n . К привычному графическому символу оси добавляются лопасти, продолжающие линии ребер и характеризующие направление винта: по часовой или против часовой стрелки.

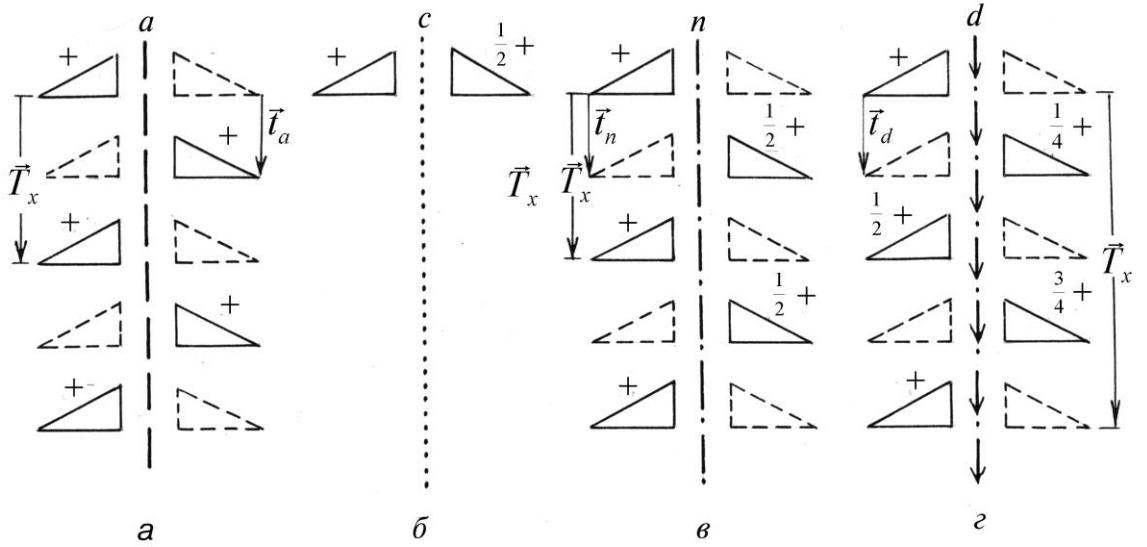
В соответствии с математическим правилом о **правой координатной системе** , когда переход x,y,z происходит **против часовой стрелки**, так же устроено и обозначение осей, например 3_1 против и 3_2 по часовой стрелке. Есть оси правые-левые и нейтральные. Нейтральность проявляется и в графическом изображении когда нет разницы по- или против часовой стрелки. Все новые оси по-прежнему являются элементами симметрии 1-го рода.



Взаимодействие плоскости симметрии и с параллельной ей трансляцией. Плоскости скользящего отражения.

Рассмотрим сочетание двух операций симметрии: отражения в плоскости симметрии (операция 2-го рода) с параллельной ей трансляцией (операцией симметрии 1-го рода). Если сочетать две последовательные симметрические операции: отражение в зеркальной плоскости m_x и перенос на величину вектора $\vec{T}_y$, появится новый элемент симметрии 2-го рода – **плоскость скользящего отражения. Величина трансляционной компоненты плоскости скользящего отражения всегда равна половине реальной трансляции в этом направлении** $\vec{T} = 2\vec{t}$





Обозначаются плоскости скользящего отражения штрихом , точками и штрих-пунктиром

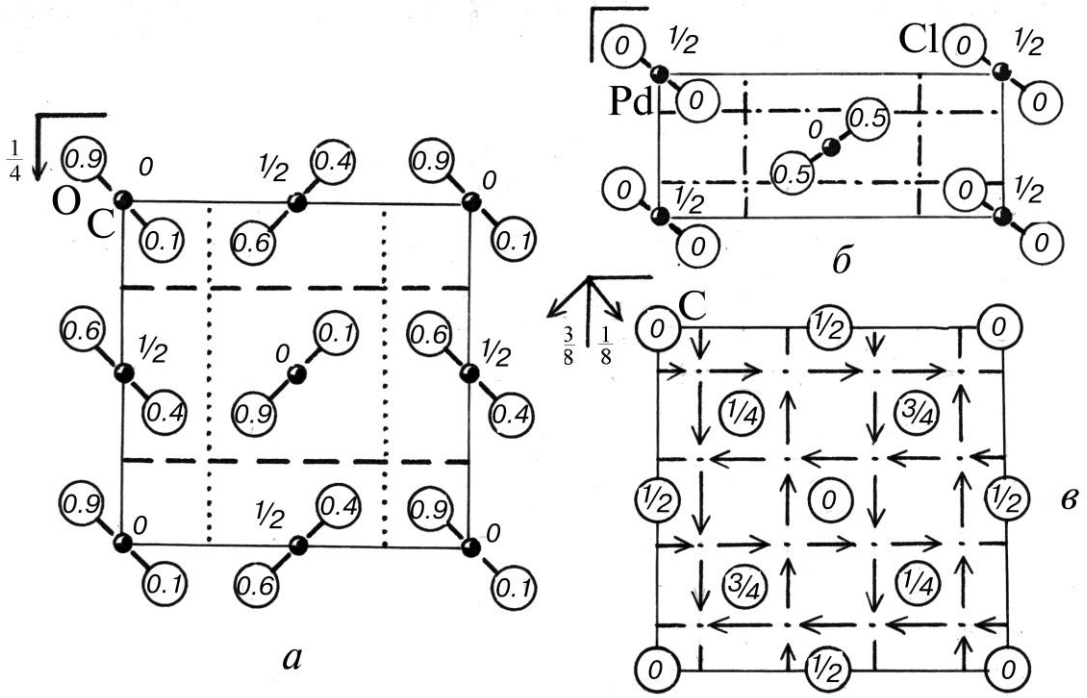
Горизонтальные плоскости обозначаются углами со стрелками, указывающими направления трансляций, и все они называются по осям: *a, b, c.*

Скольжение по диагонали дает клиноплоскости *n* и *d* с компонентами скольжения

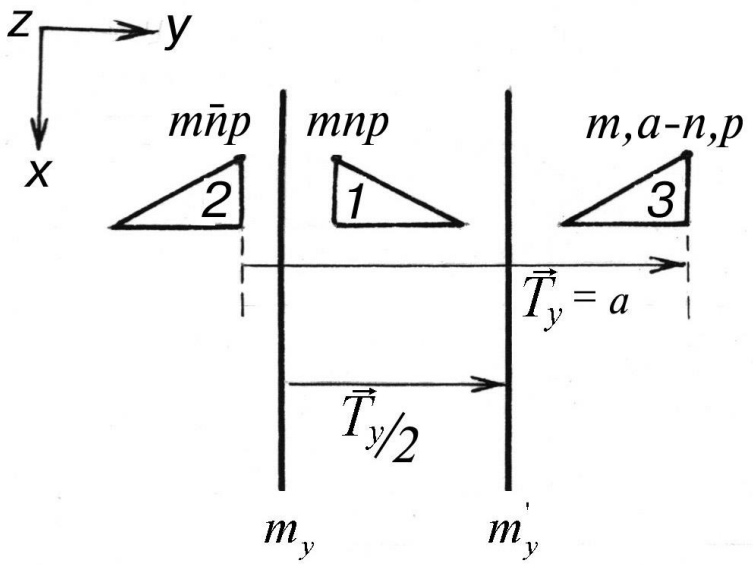
$\vec{t}_n = \frac{\vec{T}_D}{2}$ и $\vec{t}_d = \frac{\vec{T}_D}{4}$

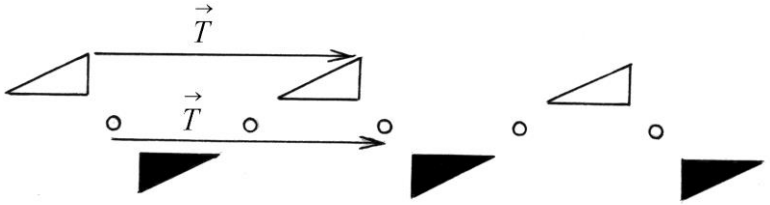
они обозначаются углом с диагональной стрелкой

Ниже даны рисунки структур CO_2, $PdCl_2$ и С-алмаза с обозначением элементов симметрии пространственных групп.



Зеркальная плоскость симметрии может взаимодействовать и с **перпендикулярной к ней трансляцией .** *Модельным* способом представим последовательно проведенные операции симметрии – отражение в плоскости m_y и последующий перенос на величину вектора $\vec{T}_y$ – переведут исходную фигуру 1 в положение 2 и затем 3. Поскольку фигуры 1 и 3 оказываются **энантиоморфными,** то результирующая операция симметрии, их связывающая, будет операцией **2-го рода**, задаваемой плоскостью симметрии $\boldsymbol{m'_y}$, проходящей между этими фигурами. Координаты *m,n,p* с дальнейшим переносом на трансляционный вектор дают координаты *m,a–n,p* , связанные отражением в зеркальной плоскости, расположенной на середине вектора . Из анализа рассмотренного взаимодействия можно сделать следующий вывод: **любая трансляция может быть заменена двумя последовательными отражениями в двух зеркальных плоскостях, перпендикулярных к ней. При этом расстояние между этими плоскостями равно половине трансляции.**



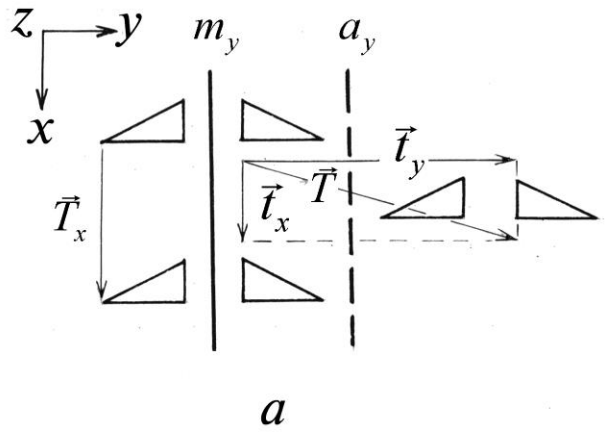


Действие трансляции на центр инверсии также дает новый центр на половине трансляции.

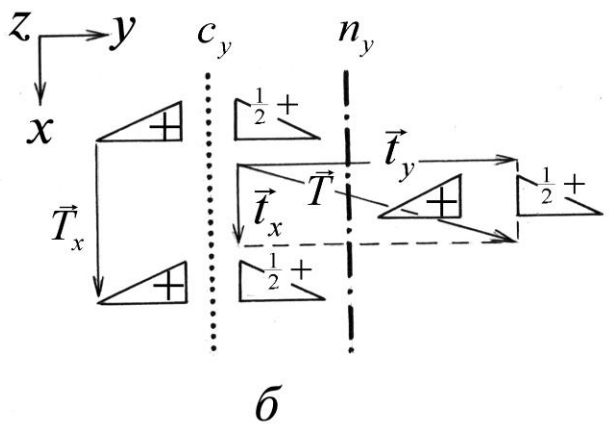
Трансляция взаимодействует с любым элементом симметрии, в результате появляется новый неэквивалентный исходному элемент симметрии на ее середине, что хорошо видно на рисунке Эшера.

Трансляционный вектор, расположенного косо к плоскости

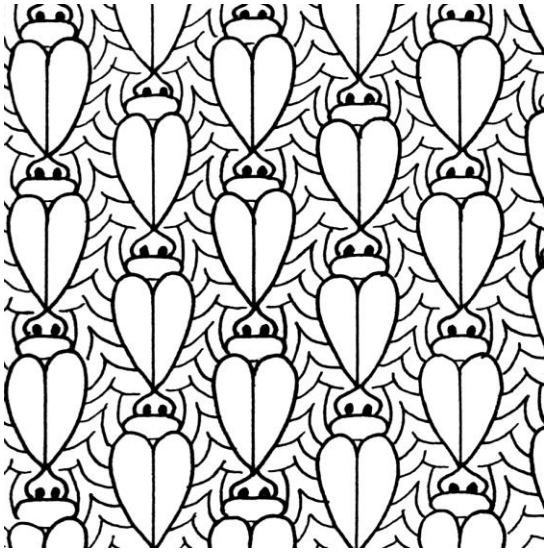
Выделяют две компоненты: параллельную плоскости и ей перпендикулярную. Первая вольется в нее и изменит, а вторая перенесет получившуюся производную плоскость на свою середину.



а

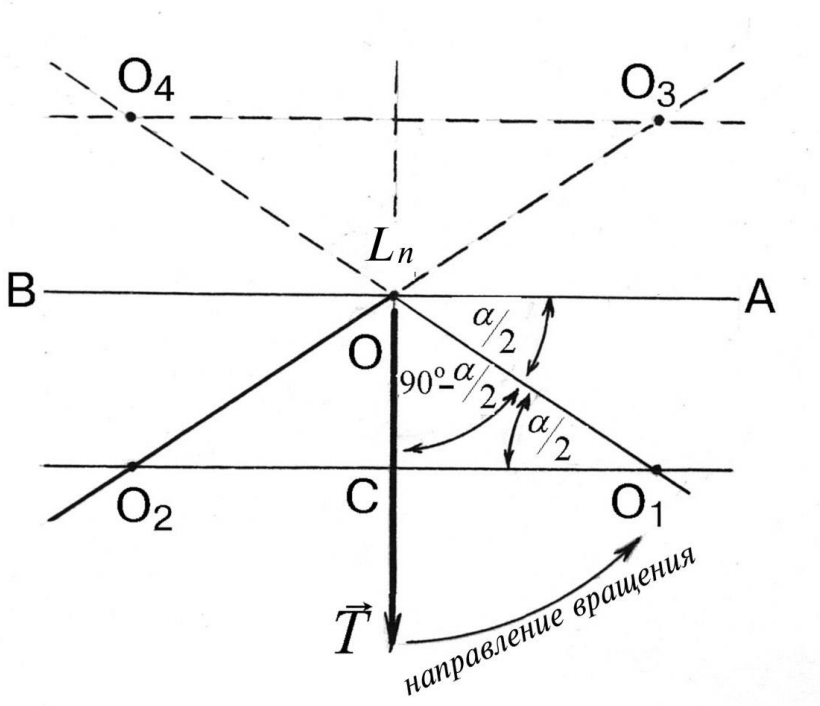


б



Взаимодействия оси *n*-го порядка с перпендикулярной к ней трансляцией

Результат можно получить в общем виде путем кристаллографического доказательства. Отражение в **двух плоскостях под углом $\alpha/2$ даст ось с углом поворота α**, а **трансляцию даст отражение в двух параллельных друг другу плоскостях,** отстоящих наполовину ее величины.



Ось дает взаимодействие $OA \cdot OO_1$, а трансляцию $OA \cdot CO_1$ коммутативность позволяет записать

$OO_1 \cdot [OA \cdot OA] \cdot CO_1 = OO_1 \cdot CO_1$,

а это по сути новая ось по линии пересечения двух плоскостей с тем же углом поворота.

$\angle AOO_1 = \angle CO_1O = \alpha/2$, и из треугольника OCO_1 получаем

$\frac{OC}{OO_1} = \sin\angle OO_1C$, и $\frac{\frac{1}{2}\vec{T}}{OO_1} = \sin\frac{\alpha}{2}$. Отсюда

$$OO_1 = \frac{\vec{T}}{2 \cdot \sin\frac{\alpha}{2}}$$

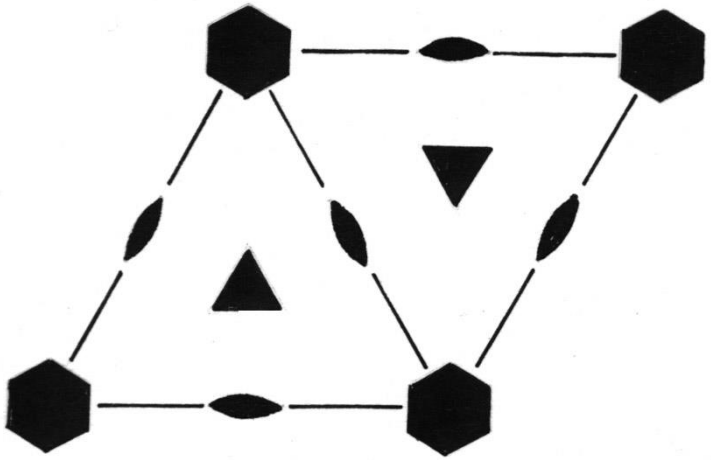
Подставив в выражение конкретные значения элементарных углов поворота осей различных порядков, получим:

для **оси 2-го порядка** (α = 180°) $< OO_1 > = \frac{\vec{T}}{2 \cdot \sin 90^\circ} = \frac{\vec{T}}{2}$ и возникшая ось 2 переместится **на середину трансляционного вектора**

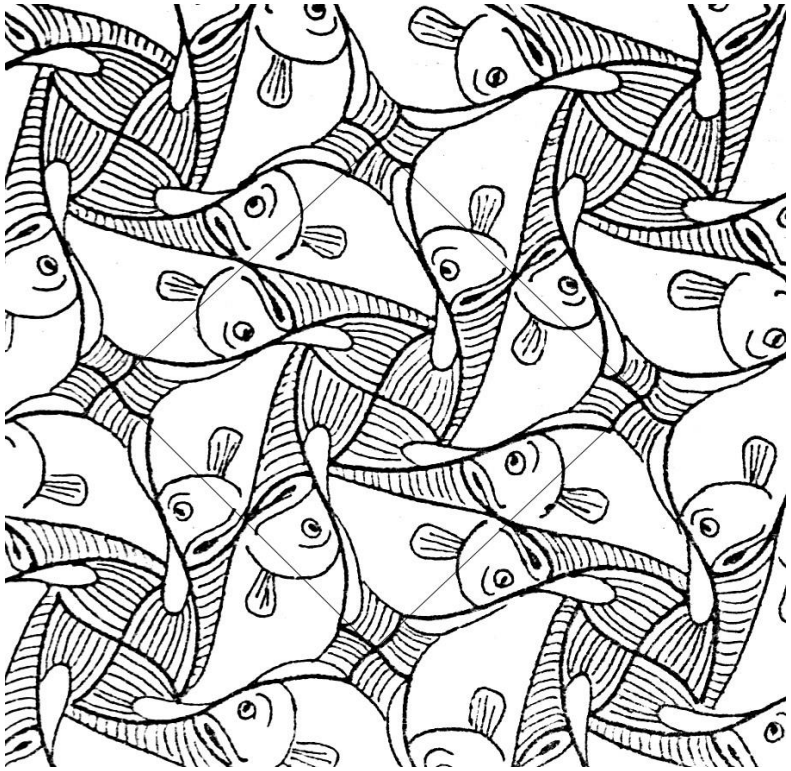
для **оси 3-го порядка** (α = 120°) $< OO_1 > = \frac{\vec{T}}{2 \cdot \sin 60^\circ} = \frac{\vec{T}\sqrt{3}}{3}$ и возникшая ось 3 переместится **в центр равностороннего треугольника, построенного на трансляционном векторе**

для **оси 4-го порядка** (α = 90°) $< OO_1 > = \frac{\vec{T}}{2 \cdot \sin 45^\circ} = \frac{\vec{T}\sqrt{2}}{2}$ и возникшая ось 4 переместится **в центр квадрата, построенного на трансляционном векторе**

Для оси 6-го порядка (α = 60°) $< OO_1 > = \frac{\vec{T}}{2 \cdot \sin 30^\circ} = \vec{T}$ и возникшая ось 6 переместится **в центр правильного шестиугольника**.



Данный рисунок показывает как смещаются оси 6, 3, 2 , и каждая взаимодействует с трансляцией по своему закону, центрируя : двуугольник, треугольник и гексагон.



Возникшая ось в центре квадрата также ось 4, но не эквивалентна исходной и есть ось 4’.

Примеры взаимодействия осей и плоскостей симметрии с векторами *t* или *T* позволяют сделать некоторые общие выводы.

Если есть перпендикулярные вектора *t* или *T* , соответствующие плоскостным, осевым трансляциям или трансляциям ячейки, то новые элементы симметрии не совпадают с исходными, а **смещаются в параллельное положение,** причем

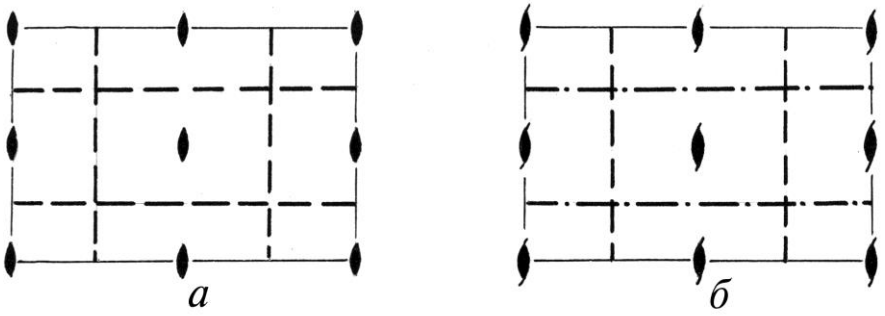
а) плоскости симметрии и центр инверсии смещаются в направлении трансляции на ее половину

б) оси симметрии порядка *n* перемещаются в центр *n*-угольника, построенного на этом векторе как стороне (двуугольник, треугольник, квадрат, шестиугольник)

в) если оси разных порядков и типов сливаются в одной оси, каждый элемент взаимодействует отдельно по собственным правилам

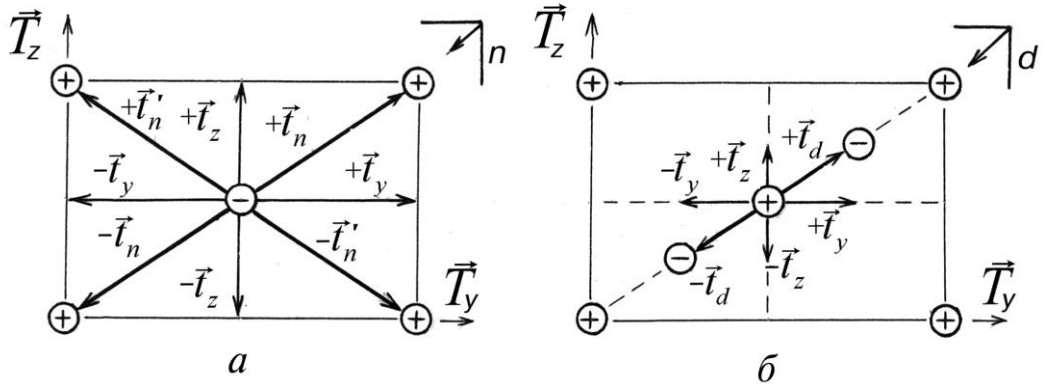
г) сложные оси перемещаются как поворотные, а их особые точки – как центры инверсии. Если сложная ось может быть заменена суммой простых операций (элементов симметрии), то каждая взаимодействует по своим правилам.

Итоговый график группы ***Pba2*** показан слева. При замене b_x ***на*** n_x мы получаем другую группу $Pna2_1$ **: п**оложения осей не меняются, а их характер теперь отвечает винтовой оси, т.к. появилась вертикальная компонента.



Для клиноплоскостей ***n*** компонента скольжения составляет 1/2 диагональной трансляции и для них безразлично вдоль какой из диагоналей направлен вектор $\vec{t}_n$ так как скольжение вдоль одной автоматически сопровождается скольжением вдоль другой. Не так для клиноплоскостей ***d :*** трансляционная компонента делает возможным скольжение лишь вдоль одной диагонали.

$$\vec{t}_d = \frac{\vec{T}_D}{4}$$

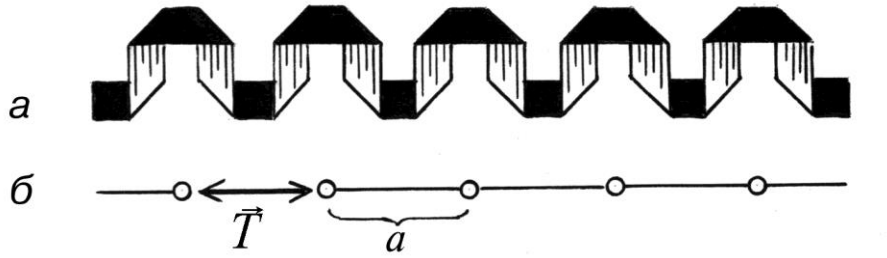


Рассмотрим взаимодействие элементов симметрии для простейшего ромбического случая точечной группы mm2 в их различных сочетаниях, рисуем вывод групп на доске совместно, исходя из группы *Pmm*2:

$a_y \,.\, m_x$, $a_y \,.\, c_x$, $n_y \,.c_x$, $n_y \,.\, c_x$, $m_y \,.\, n_x$, $a_y \,.\, n_x$ – задачи для желающих

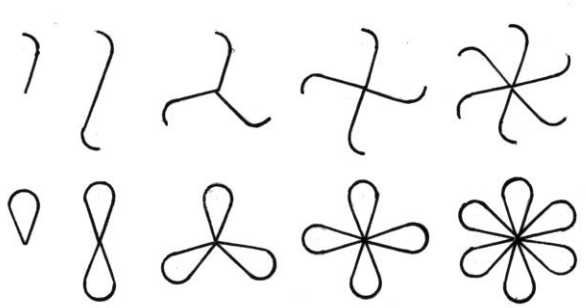
Одномерные группы симметрии – группы симметрии бордюров

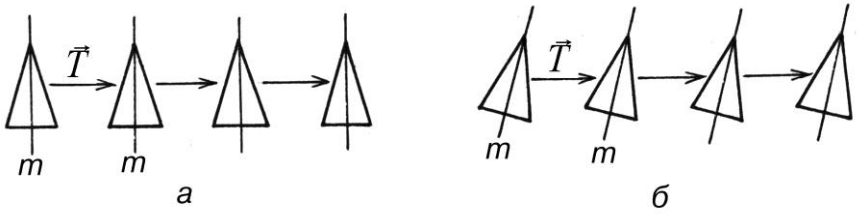
Изучение симметрии кристаллов логично начать с рассмотрения симметрии бесконечных одномерных регулярных построек - атомных рядов, бордюров и в общем - узоров. Операцией служит перенос – трансляция. Ряд эквивалентных точек – узлов, связанных операцией переноса, называется **узловым рядом**, показанным снизу. Каждая точка узора при этом преобразовании повторяется в эквивалентных позициях бесчисленное количество раз. Вектор $\pm\vec{T}$ имеет величину и направление, есть **элементарный перенос** или **период идентичности** ряда a_{min}. **В одномерной решетке не может быть промежуточных (дополнительных) узлов.** Она называется **примитивной** и обозначается буквой *p*. Решетка, как и всякий трансляционный элемент симметрии, с одной стороны, может создавать бесконечный узор **переносом фигуры**, и с другой **передавать этому узору симметрию исходной фигуры.**



Мы будем рассматривать **одномерно-бесконечные и односторонние узоры**. Симметрия решетки описывается группой ***mm2,*** где одна зеркальная плоскость совпадает с линией ряда, другая ему перпендикулярна и проходит через узлы и между ними, порождая оси 2.

Основываясь на **принципе Кюри,** заключающемся в том, что **при взаимодействии объекта (фигуры) и окружающей среды (решетки) в бесконечный узор перейдут лишь общие для них элементы симметрии**, можно вывести все одномерные группы симметрии. Для составления группы необходимо знать симметрию решетки и симметрию возможных фигур в нее помещаемых для составления плоского одностороннего одномерно-бесконечного узора.





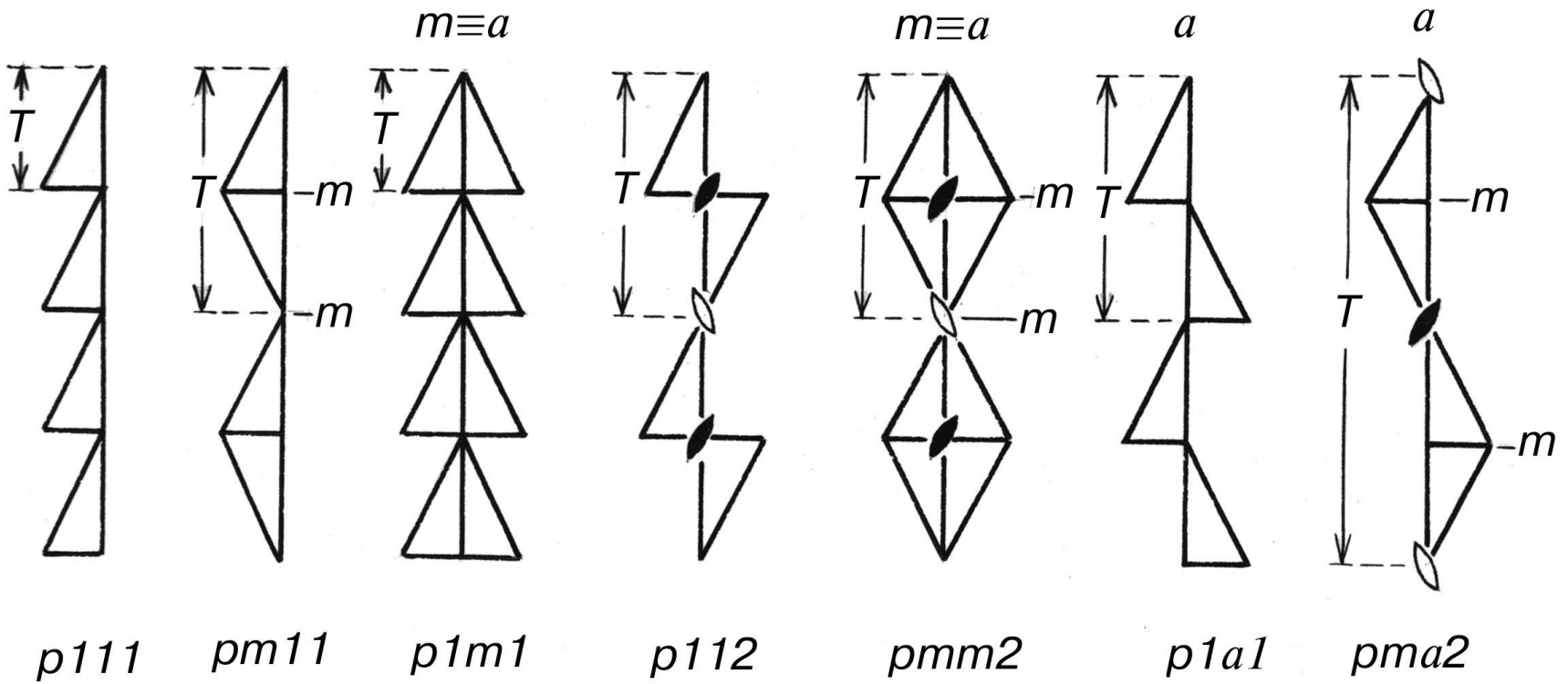
а б

Рассмотрим симметрию фигур: их по Н.В.Белову 10: 5 «крючочечных» и 5 «лепестковых», выбранных из 32-х точечных и отвечающих группам *1, 2, 3, 4, 6* и *m*, *mm2*, *3m*, *4mm*, *6mm.*

Условие одномерности и односторонности бесконечного узора заставляет отобрать из этих групп лишь четыре : ***1, 2, m, mm2,*** лишенные осей высшего порядка.

Совмещение элементов симметрии фигуры и решетки можно провести по-разному. Симметрия решетки ***mm2.*** Если ***m*** фигуры совпадает с ***m*** решетки, то получается симметрия узора с этой плоскостью. Если нет - узор потеряет симметрию фигуры и сохранит лишь трансляцию узлового ряда.

Совмещение фигур всеми возможными способами с элементами симметрии ряда, дает сразу 5 групп: ***p111, p112, pm11, p1m1, pmm2***, *симморфных** точечным. Замена в симморфных группах макроэлементов симметрии на возможный в одномерном одностороннем узоре трансляционный элемент симметрии, в данном случае a_y, приведет еще к двум группам: ***p1a1 и pma2***



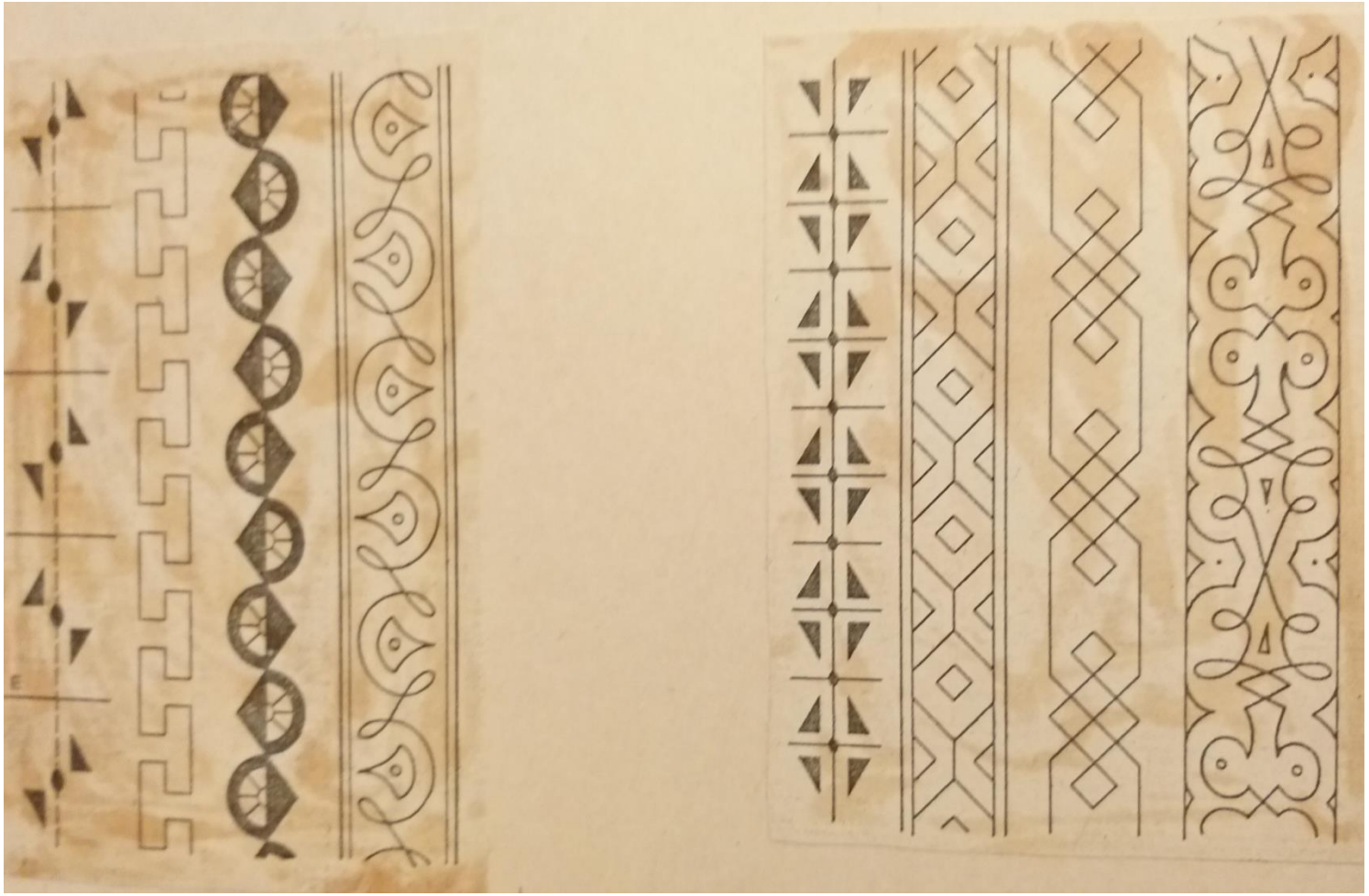
**Симморфными* называются группы бесконечных построек, в которые перешли без изменений все элементы симметрии соответствующих точечных групп, т.е. сохранился как осевой, так и плоскостной комплекс.

Гемисимморфные группы – это группы, в которых полностью сохранился лишь осевой комплекс их точечных групп.

Асимморфными называются группы, в которых ни осевой, ни плоскостной комплекс точечных групп полностью не сохранился. **Практикум с бордюрами.**

Бордюр с одной плоскостью скользящего отражения, группа *p1*а*1*

Бордюр с поперечными плоскостями симметрии, группа *pm*11



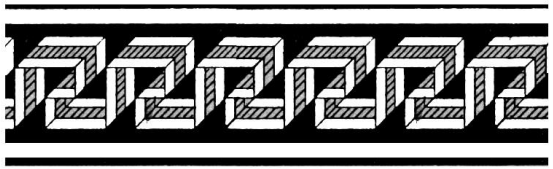
Бордюр с симметрией *pma*2

Бордюр с симметрией *pmm*2

p111

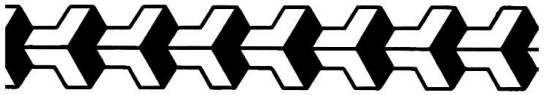
p1m1 (pm11)

p111

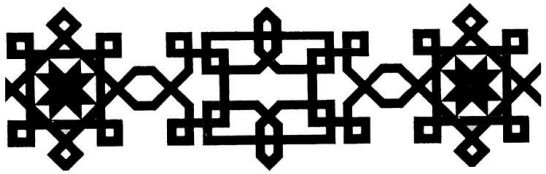


pm11(p1m1)

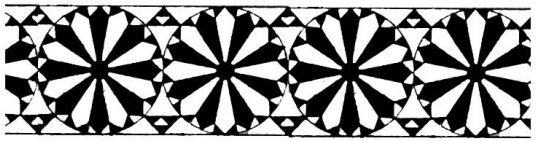
pm11(p1m1)



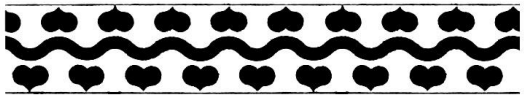
pmm2



pmm2

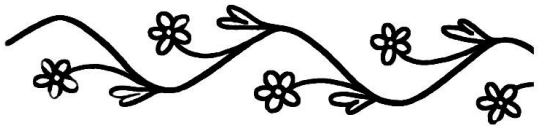


p1m1 (pm11)

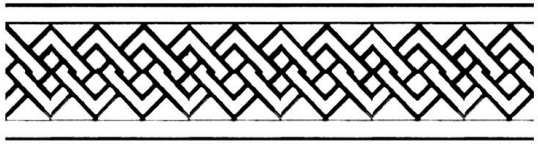


pbm2 (pma2)

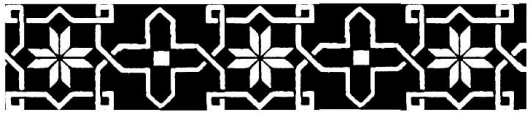
p112



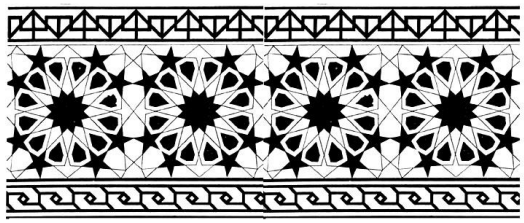
pb11 (p1a1)



“pmm2” –p112



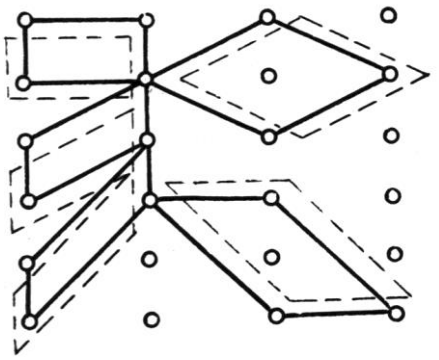
“pmm2” –p112



pbm2
pmm2
p112
} p2

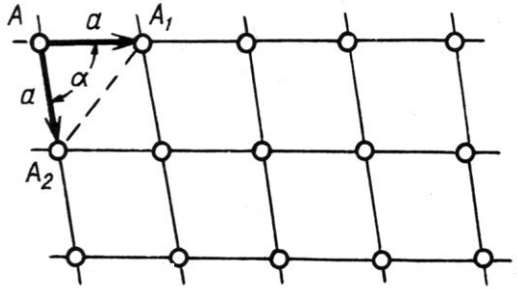
Двумерные (плоские) группы симметрии

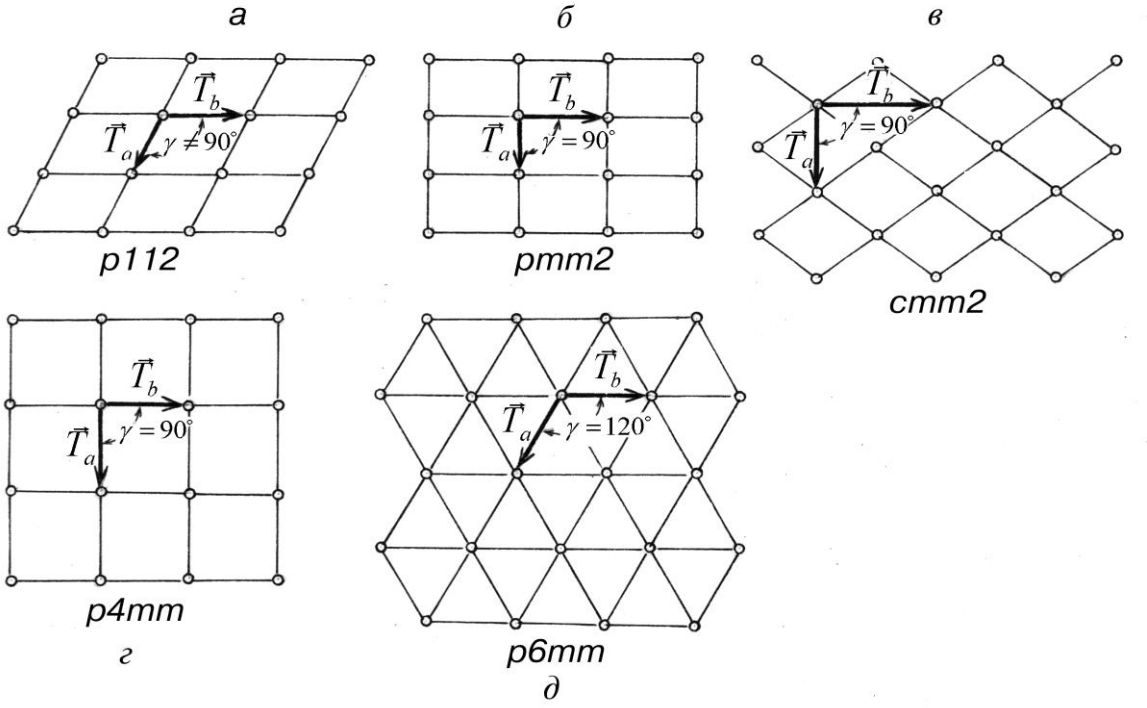
Одномерную решетку – узловой ряд – достаточно полно и однозначно характеризуют величина и направление **одного** трансляционного вектора, а в двумерной решетке выделяется параллелограмм, построенный на **двух минимальных неколлинеарных векторах** $\vec{T}_a$ **и** $\vec{T}_b$ **,** лежащих в одной плоскости. Выделенный параллелограмм называется **ячейкой двумерной решетки**. Подобные ячейки выполняют все двухмерное пространство без промежутков.



Двумерная решетка имеет некоторые **общие свойства**:

1) любая параллелограмматическая сетка всегда обладает **осью симметрии 2-го** порядка, перпендикулярной слою;
2) если оси 2 входят в оси более высоких порядков, то они оказываются **линиями пересечения зеркальных плоскостей;**
3) угол в сетке между узловыми рядами $\gamma \geq 60^\circ$ (A1A2$\geq a$), отсюда **порядок осей** $\leq$ **6;**
4) если перпендикулярно узловой сетке проходят оси нечетного порядка, то при их взаимодействием с осями 2 возникают четные оси с вдвое большим порядком: отсюда **нечетными осями могут быть только оси 1 и 3.**

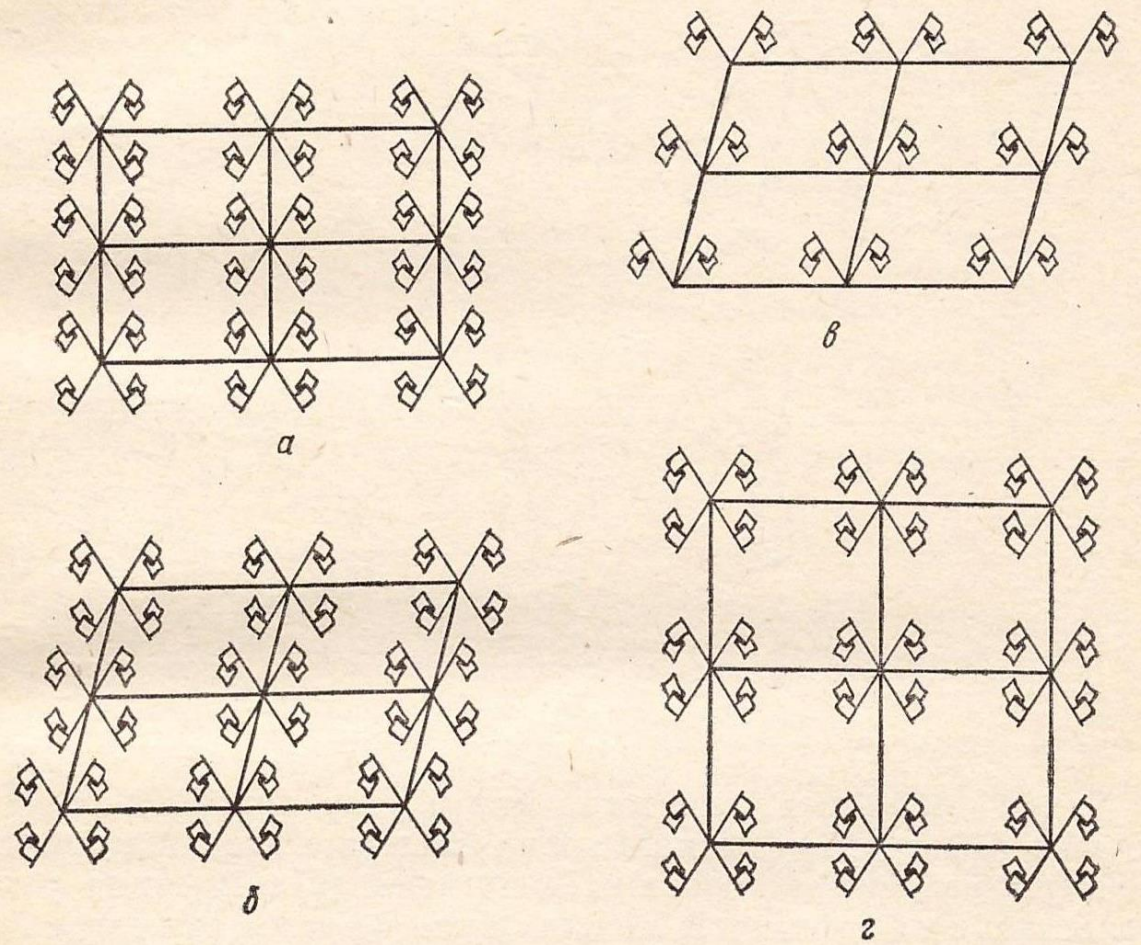


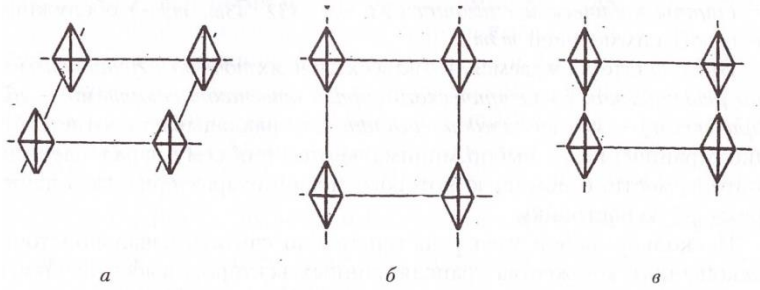


Учет выведенных свойств позволяет вывести пять типов плоских сеток- двумерных решеток: *а* – моноклинная; *б,в* – ромбические**;** *г* – тетрагональная; *д* – гексагональная

Как и ранее, будем рассматривать **односторонние слои, и в них будут запрещены горизонтальные плоскости, горизонтальные оси и центры инверсии**.

Как и ранее, применим принцип Кюри для вывода симметрии уже двумерного узора путем совмещения решетки и фигуры и вывода их общей симметрии. Это позволит найти все виды симметрии плоских сеток.





Другой пример:

(а) фигура ***mm2,*** решетка ***mm2,*** узор ***mm2***

(б) фигура ***mm2,*** решетка ***2,*** узор ***2***

(в) фигура ***m,*** решетка ***2,*** узор ***1***

(г) фигура ***mm2,*** решетка ***4mm,***узор ***mm2***

(а) фигура ***mm2,*** решетка ***2,*** узор ***2***

(б) фигура ***mm2,*** решетка ***4mm,*** узор ***mm2***

(в) фигура ***mm2,*** решетка ***mm2,*** узор ***mm2***

Решетка является «старшим» элементом симметрии при взаимодействиях, и в **узор может перейти максимально ее симметрия** . Поэтому, например, совмещение любых высокосимметричных фигур (квадратов, гексагонов) с более низкосимметричной решеткой (моноклинной или ромбической) занизит симметрию узора до симметрии решетки. Симметрия фигуры также накладывает ограничения – свою симметрию - на симметрию узора.

1)Для решетки ***p112*** годятся фигуры ***1, 2,*** узор ***p111, p112***

2)Для решетки ***pmm2*** и ***cmm2*** годятся фигуры ***m, mm2,*** узор ***pm11(= p1m1), cm11(= c1m1), pmm2, cmm2*** (фигуры ***1,2*** дадут предыдущий результат и их рассматривать нет смысла, и так и далее)

Если есть решеточный вектор ***c,*** то ***m*** будет чередоваться с ***b*** и возможны узоры с только скользящими элементами симметрии: ***pb11(=p1a1), pma2(= pbm2)*** и ***pba2.***

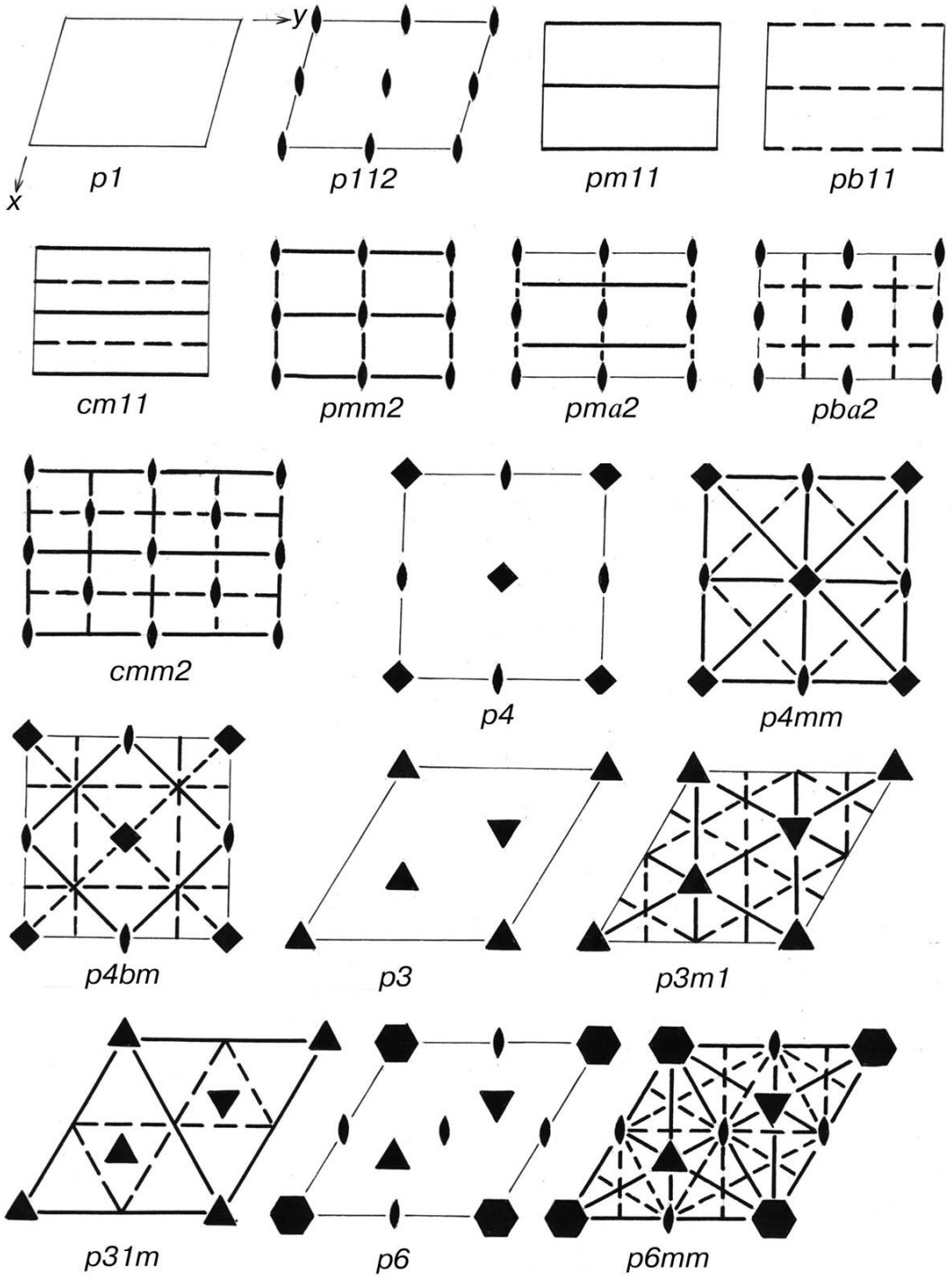
3)Для решетки ***p4mm*** годятся фигуры с симметрией подгрупп: ***4, 4mm*** и возможны узоры ***p4, p4mm***, а также ***p4bm.***

4)Для решетки ***p6mm*** годятся фигуры с симметрией ***3, 3m, 6, 6mm,*** причем в случае оси ***3*** ориентация плоскости ***m*** может быть двоякой и даст две группы**: *p3, p3m1, p31m, p6, p6mm.***

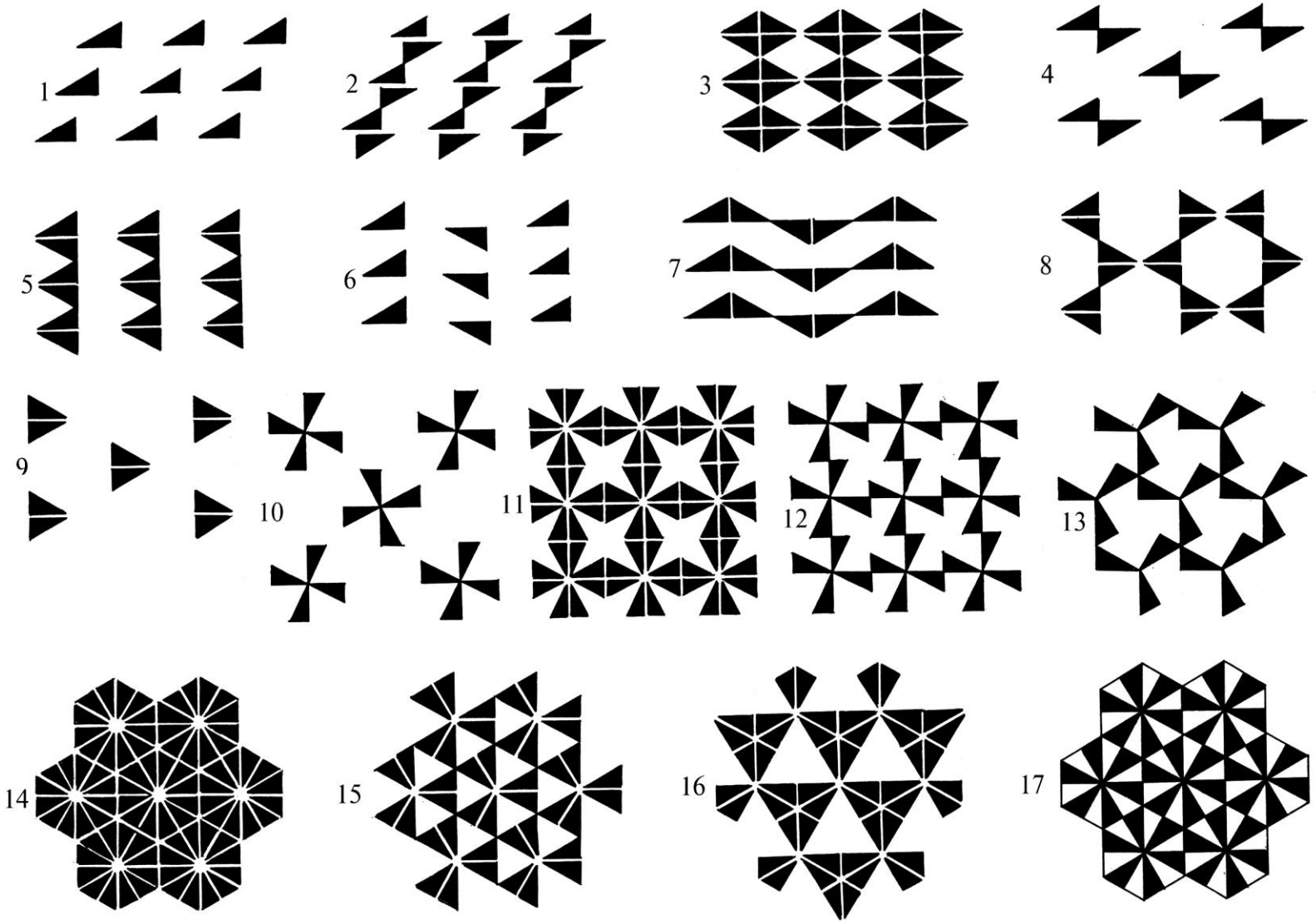
В результате легко приходим к

13 симморфным **группам**: *p111, p112, pm11(= p1m1), cm11(= c1m1), pmm2*, *cmm2, p4, p4mm, p3, p3m1, p31m, p6, p6mm* и

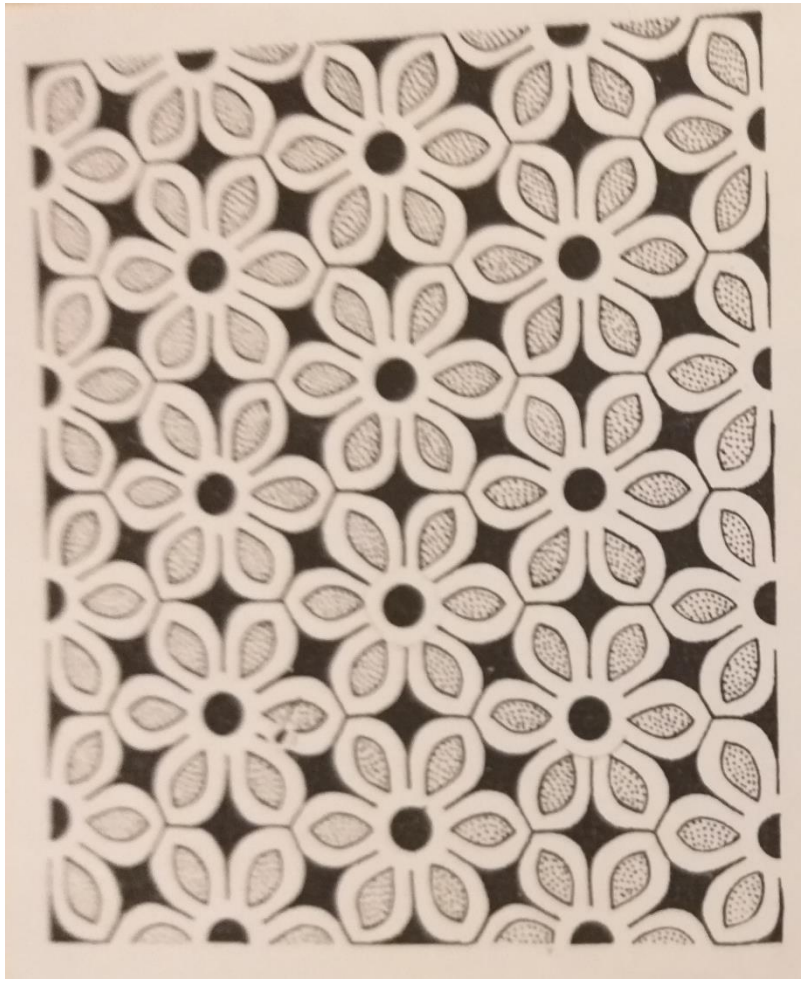
4 *несимморфным*, содержащим в качестве самостоятельных **трансляционные элементы симметрии**: *pb11(= p1a1), pma2(= pbm2), pba2, p4bm.* **Всего 17 плоских групп**



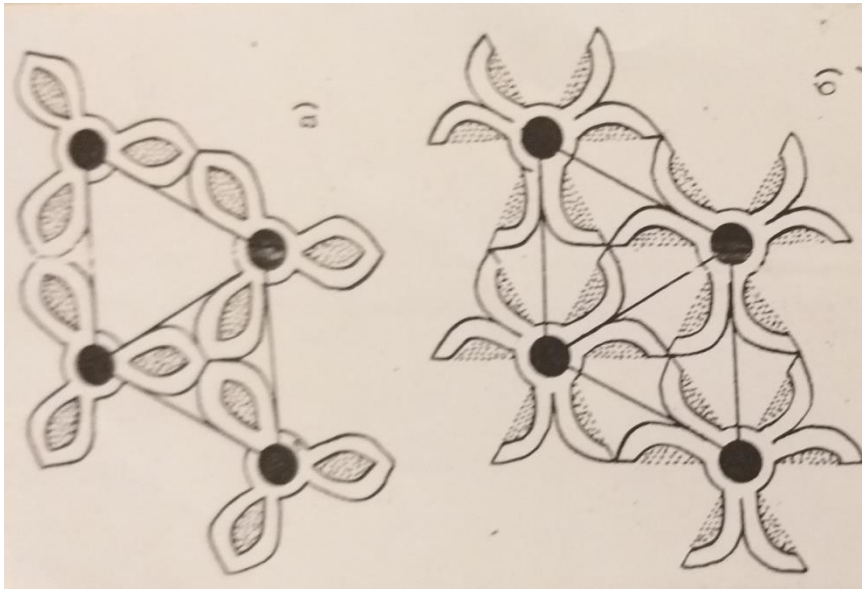
Графики 17 двумерных групп симметрии, описывающих симметрию плоских узоров – орнаментов



17 плоских групп симметрии – иллюстрация Бюргера с помощью асимметричных фигур – треугольников: ***p111, p112, pmm2, pba2*(! Найдите ошибку!), *pm11, pb11, pbm2, cmm2, cm11, p4bm, p4mm, p4, p3, p6mm, p31m, p3m1, p6.***



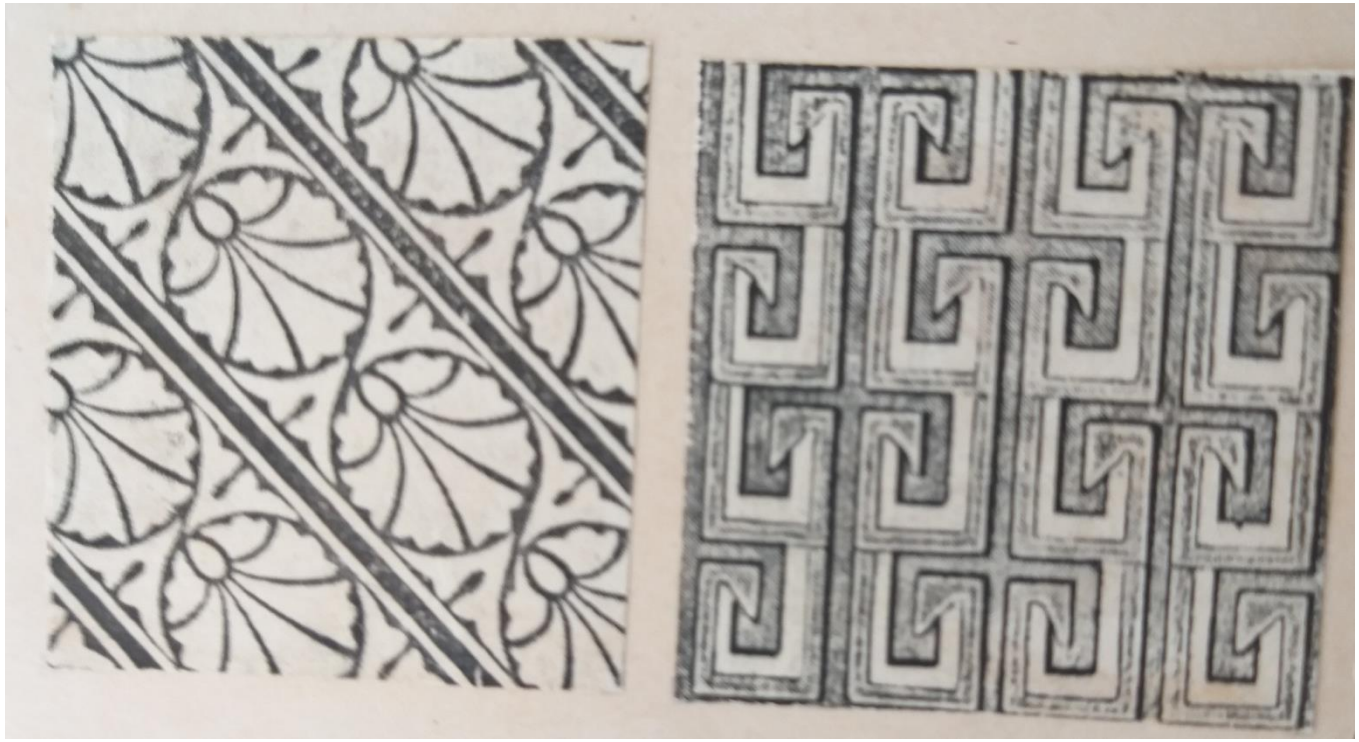
Определить плоскую группу мозаики и записать ее 2 максимальные подгруппы



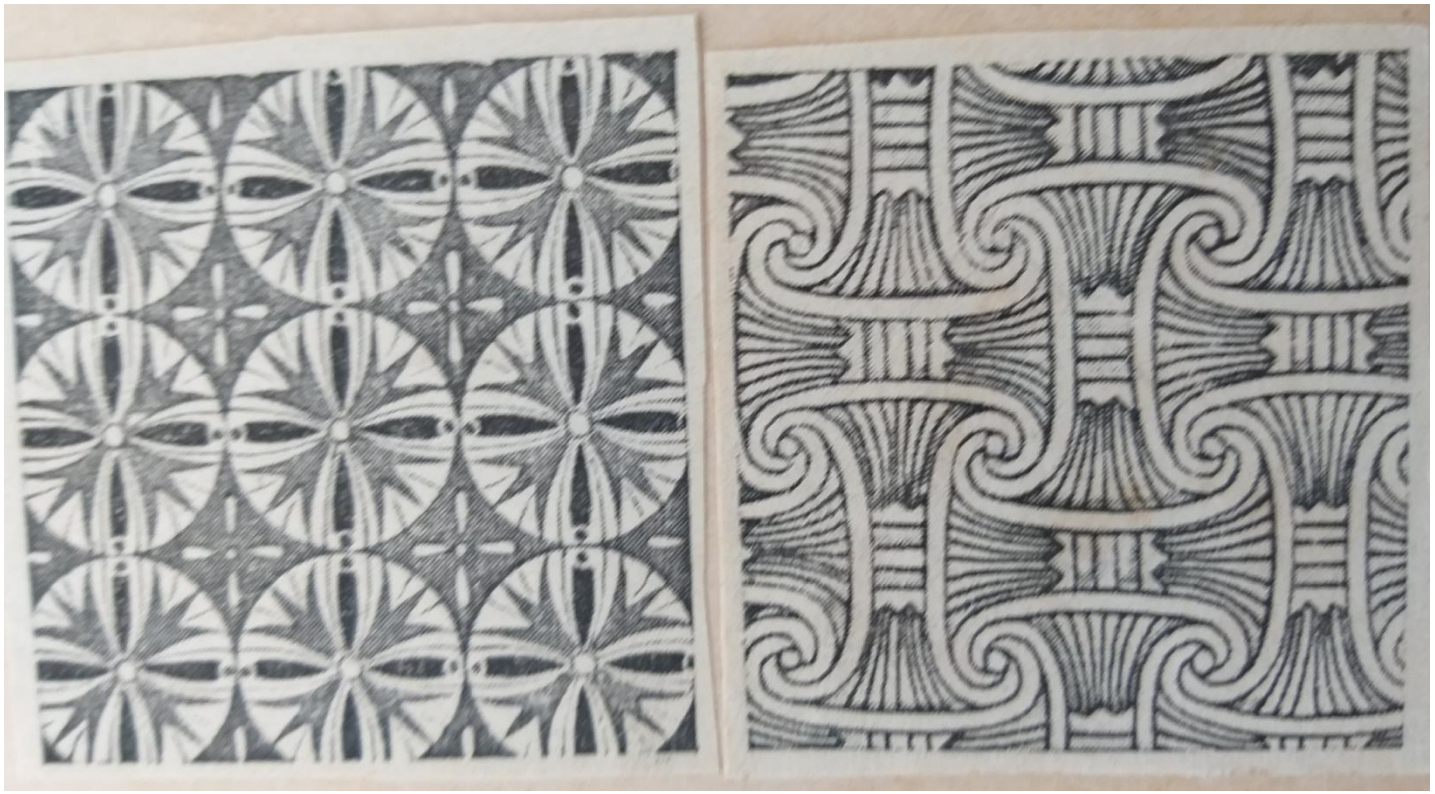
Определить плоские группы мозаик и найти их надгруппу

Мавританский орнамент симметрии *cm(b*)11

Орнамент симметрии *p*111



Индийский орнамент симметрии *p*1*m*1 Китайский орнамент симметрии *c*1*m*1



Египетский орнамент симметрии *p4mm* Египетский орнамент симметрии *p4bm*

Рисунок симметрии *pg*11 (*pa*11)

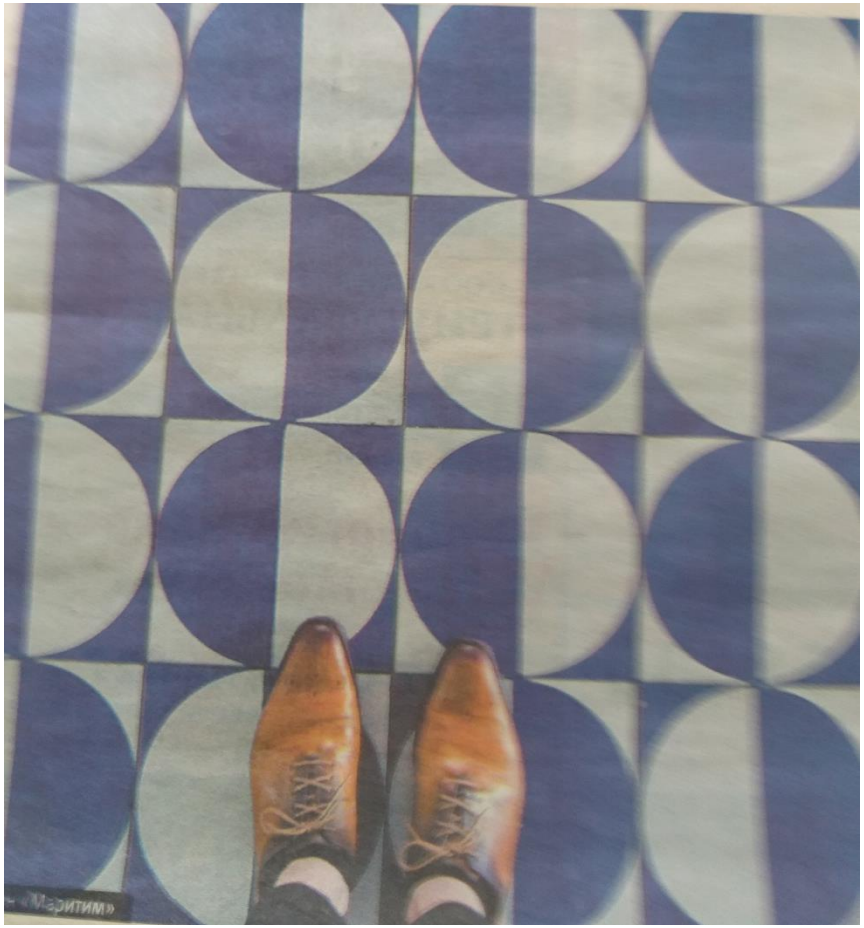
Рисунок Эшера симметрии p411

Узор Эшера симметрии *pgg*2

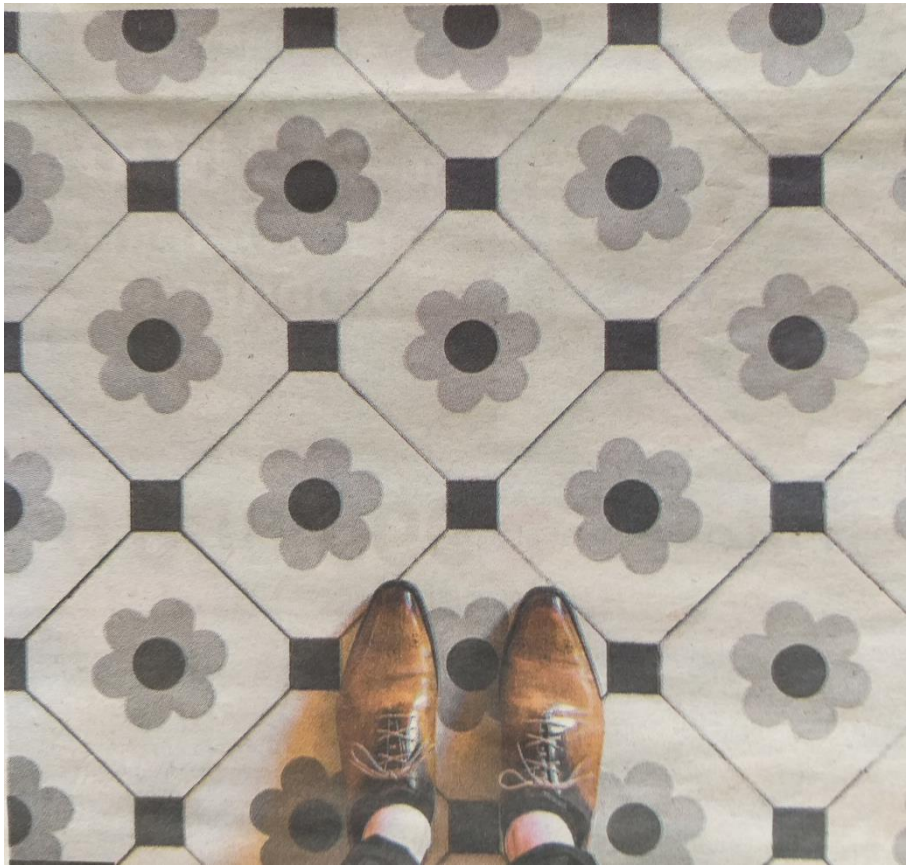
Рисунок Эшера симметрии p111

Орнаменты исторических памятников полы Барселоны

Узор пола отвечает симметрии *p4mm* с учетом симметрии розеток по принципу Кюри



Узор пола отвечает симметрии *pma*2



Узор пола отвечает симметрии *p4bm*