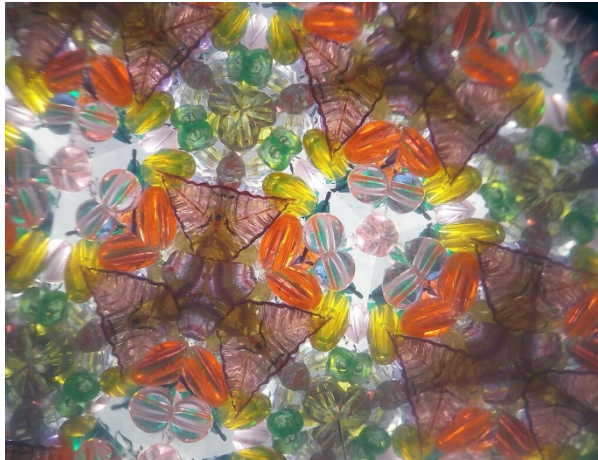
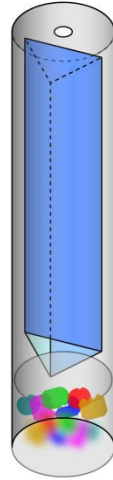


1. Элементы симметрии. Операции симметрии.
2. Способы представления элементов и операций симметрии
3. Взаимодействие элементов симметрии.
4. Теория абстрактных математических групп в теории симметрии. Квадраты Кейли.

Любую операцию симметрии можно представить последовательным отражением в плоскостях



Поворот на сколько?



Поворот на  $120$  можно заменить последовательным отражением в двух пересекающихся под углом  $60$  плоскостях

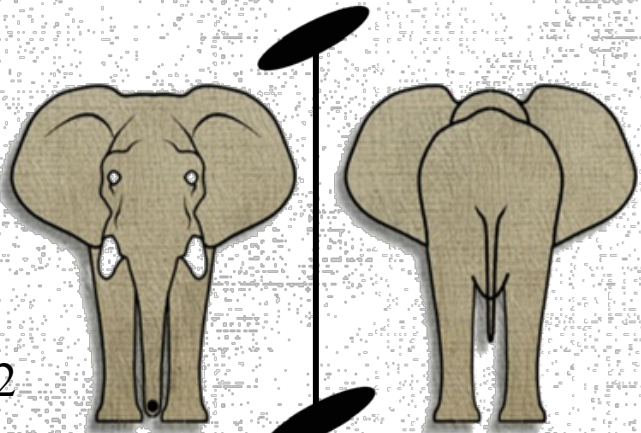


Поворот на сколько?

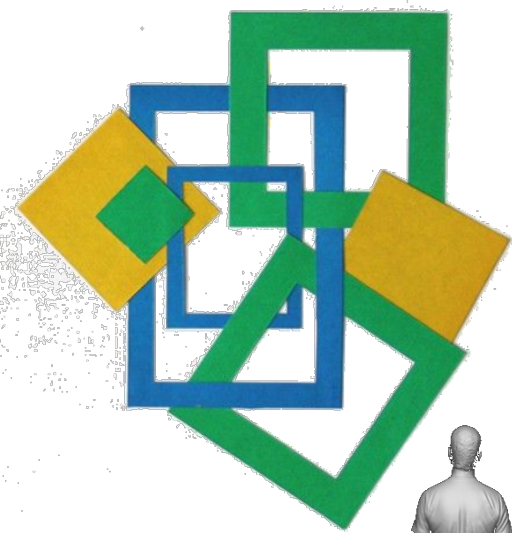
# ЗАКРЫТЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ СИММЕТРИИ. ПРОСТЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

ОСЬ 1

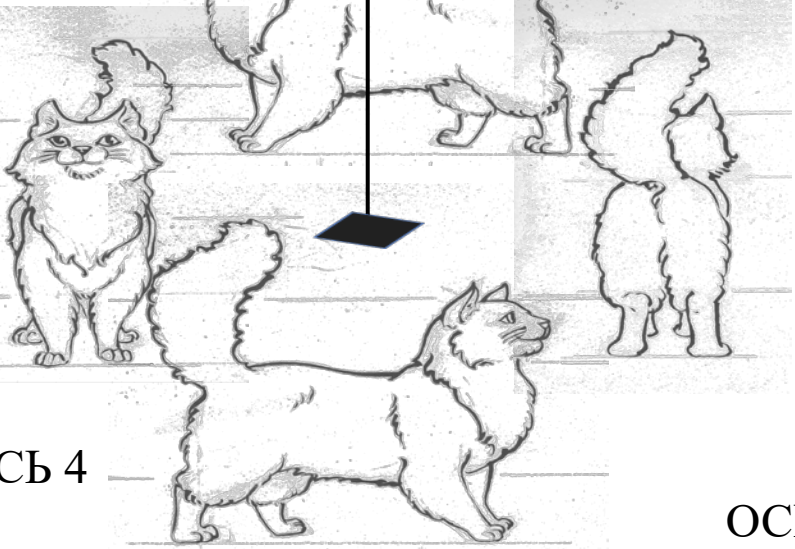
ОСЬ 2



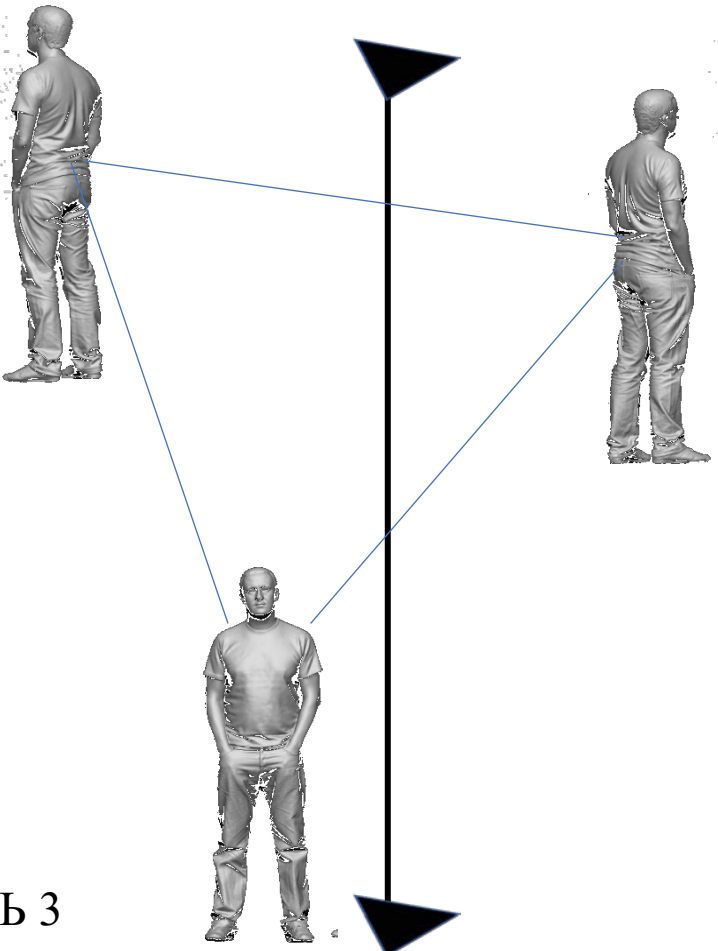
К простым закрытым элементам симметрии относятся *только поворотные оси*



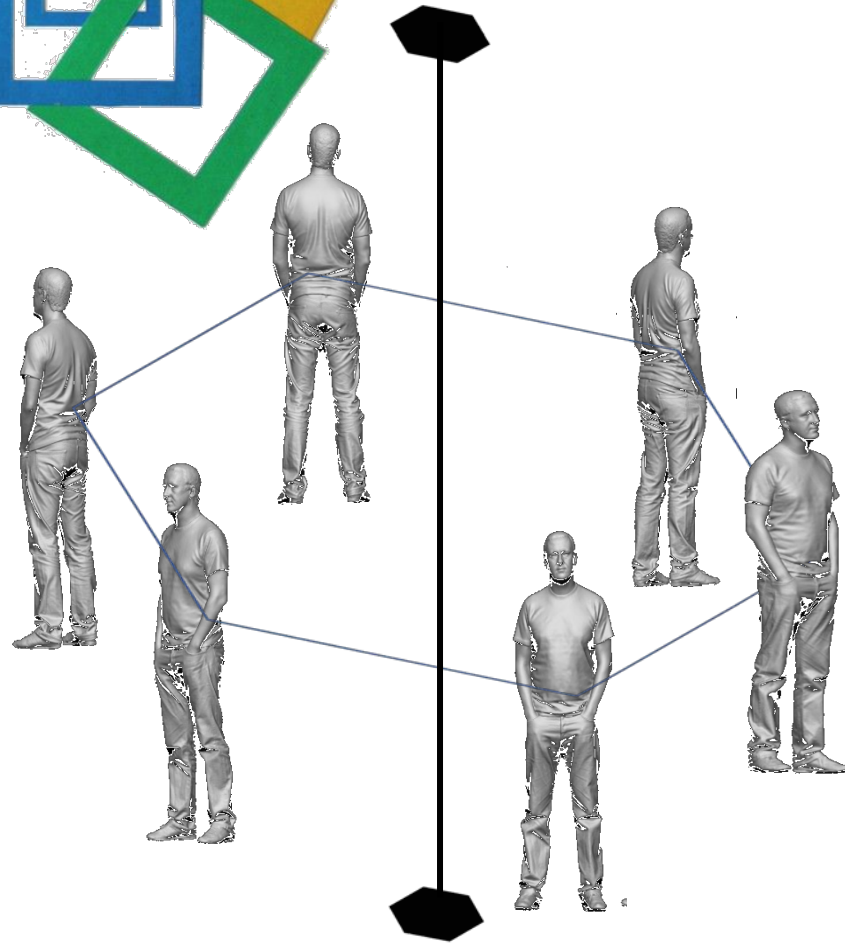
ОСЬ 4



ОСЬ 3



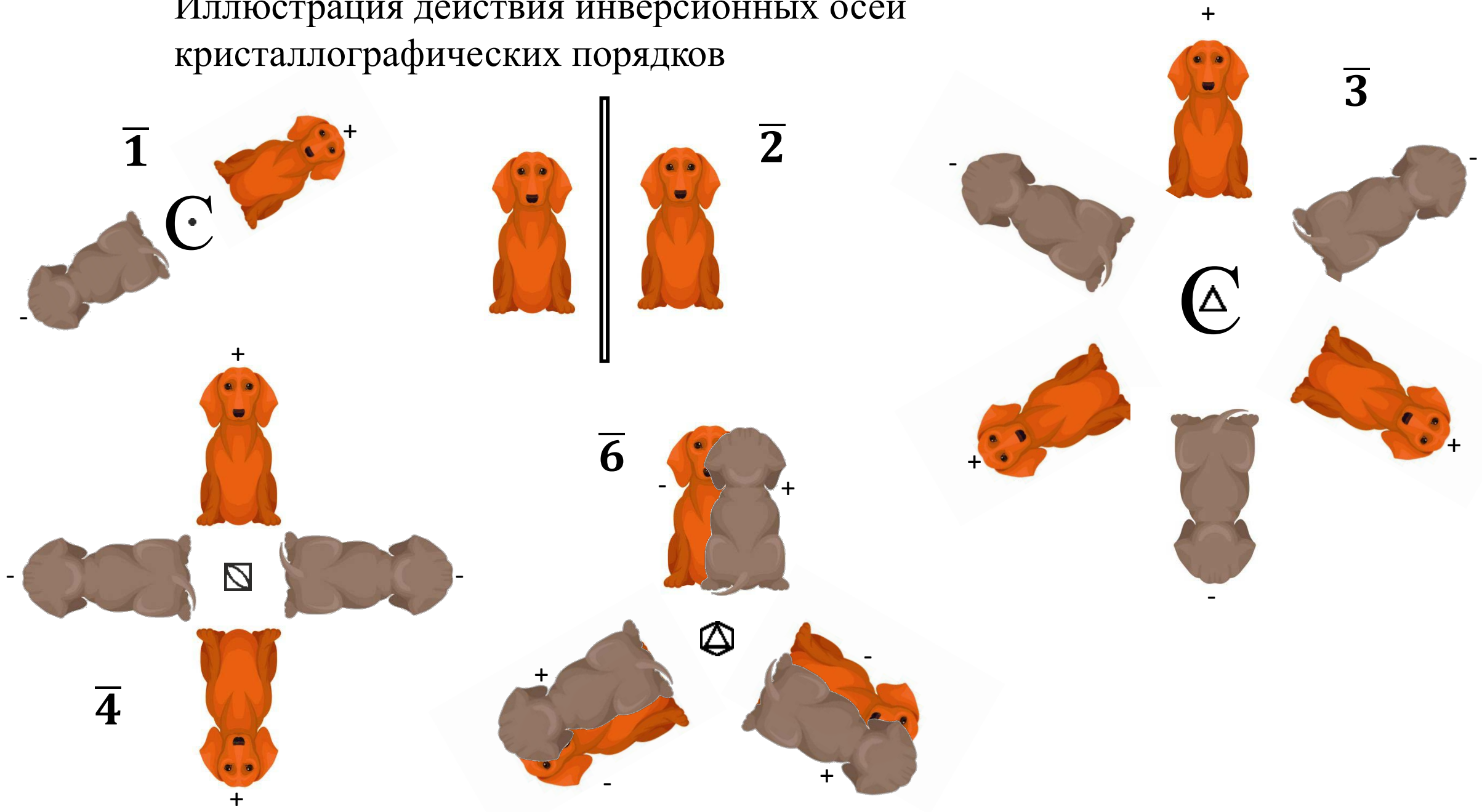
ОСЬ 6



## ЗАКРЫТЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ СИММЕТРИИ. ПРОСТЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

№	Эл. симм	Гр. знак	n	$\alpha$	I/II род	Низш/ высш	Вел. симм.	Операции симметрии	Матрицы операций симметрии
1	1		1	360	I	Низш.	1	$\{e\}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$
2	2		2	180	I	Низш.	2	$\{e, 2^1\}$	$\begin{matrix} \bar{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2_z & 0 & \bar{1} & 0 & 2_x & 0 & \bar{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \bar{1} \end{matrix}$
3	3		3	120	I	Высш .	3	$\{e, 3^1, 3^2\}$	$\begin{matrix} \bar{1} & \bar{1} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3^1_z & 1 & 0 & 0 & 3^2_z & \bar{1} & \bar{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$
4	4		4	90	I	Высш .	4	$\{e, 4^1, 4^2=2, 4^3\}$	$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \bar{1} & 0 \\ 4^3_z & \bar{1} & 0 & 0 & 4^1_z & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$
5	6		6	60	I	Высш .	6	$\{e, 6^1, 6^2=3^1, 6^3=2, 6^4=3^2, 6^5\}$	$\begin{matrix} 0 & \bar{1} & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 6^1_z & 1 & 1 & 0 & 6^5_z & \bar{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$

# Иллюстрация действия инверсионных осей кристаллографических порядков



## ЗАКРЫТЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ СИММЕТРИИ. СЛОЖНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

№	Эл. симм	Гр. знак	n	$\alpha$ / пов.*	I/II род	Низш/ высш	Вел. симм.**	Операции симметрии	Матрицы операций симметрии
6	$\bar{1}$		1	360	II	Низш.	2	$\{1=e, \bar{1}\}$	$\begin{matrix} \bar{1} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{1} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{1} \end{matrix}$
7	$\bar{2}$ m		2	180/3 60	II	Низш.	2	$\{1=e, m\}$	$\begin{matrix} \bar{2}_z & \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{1} \end{matrix} & \bar{2}_x & \begin{matrix} \bar{1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \end{matrix}$
8	$\bar{3}$		3	120	II	Высш .	6	$\{1=e, 3^1, 3^2\}$	$\begin{matrix} \bar{3}_z^1 & \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ \bar{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{1} \end{matrix} & \bar{3}_z^2 & \begin{matrix} 1 & \bar{1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{1} \end{matrix} \end{matrix}$
9	$\bar{4}$		4	90/ 180	II	Высш .	4	$\{1=e, \bar{4}^1, \bar{4}^2=2, \bar{4}^3\}$	$\begin{matrix} \bar{4}_z^1 & \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ \bar{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{1} \end{matrix} & \bar{4}_z^3 & \begin{matrix} 0 & \bar{1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{1} \end{matrix} \end{matrix}$
10	$\bar{6}$		6	60/ 120	II	Высш .	6	$\{1=e, \bar{6}^1, \bar{6}^2=3^1, \bar{6}^3=2, \bar{6}^4=3^2, \bar{6}^5\}$	$\begin{matrix} \bar{6}_z^1 & \begin{matrix} \bar{1} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{1} \end{matrix} & \bar{6}_z^5 & \begin{matrix} 0 & \bar{1} & 0 \\ 1 & \bar{1} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{1} \end{matrix} \end{matrix}$

\*Для осей нечетного порядка элементарный угол поворота равен минимальной поворотной составляющей, а для осей четного – вдвое больший.

\*\*А величина симметрии наоборот: для осей четного порядка соответствует порядку, а для нечетных – вдвое большая.

Категория	НИЗШАЯ $a \neq b \neq c$			СРЕДНЯЯ $a = b \neq c$			ВЫСШАЯ $a = b = c$		
	Триклинная $\alpha \neq \beta \neq \gamma$	Моноклиная $\alpha = \beta = 90^\circ$ $\gamma \neq 90^\circ$	Ромбическая $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	Тетрагональная $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	Гексагональная $\alpha = \beta = 90^\circ$ $\gamma = 120^\circ$		Кубическая $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$		
Сингония					Тригональная подсингония	Гексагональная подсингония			
$C_n$	$L_1 C_1$  1 моназдр	$L_2 C_2$  2 осевой диэдр		$L_4 C_4$  4 тетрагональная пирамида	$L_3 C_3$  3 тригональная пирамида	$L_6 C_6$  6 гексагональная пирамида	Обозначения Символ Браве Символ Шенфлиса 		
$C_{ni}$ ( $S_n$ )	$L_1 C_1 S_2$  1 пинакloid	$L_2 P C_2 S_1$  2 плоскостной диэдр		$L_4 C_4 S_4$  4 тетрагональный тетраэдр	$L_3 C_3 S_6$  3 ромбоэдр	$L_6 C_6 S_3$  6 тригональный бипирамид	Международный символ Форма общего положения		
$C_{nh}$		$L_2 PC C_{2h}$  2 ромбическая призма		$L_4 PC C_{4h}$  4 тетрагональная бипирамида		$L_6 PC C_{6h}$  6 тригональная бипирамида			
$C_{nv}$			$L_2 P C_{2v}$  2 ромбическая пирамида	$L_4 P C_{4v}$  4 тетрагональная пирамида	$L_3 P C_{3v}$  3 тригональная пирамида	$L_6 P C_{6v}$  6 гексагональная пирамида			
$D_n$			$3L_2 D_2$  222 ромбический тетраэдр	$4L_2 D_4$  422 тетрагональный трапецеэдр	$3L_3 D_3$  32 тригональный тетраэдр	$6L_2 D_6$  622 гексагональный трапецеэдр	$3L_2 4L_3 T$  23 лантан-трипентаэдр	$3L_2 4L_3 O$  432 лантан-триоктаэдр	
$D_{nd}$				$4L_2 2L_2 P D_{2d}$  4m2 тетрагональный скаленэдр	$3L_3 3L_2 P C D_{3d}$  3m тригональный скаленэдр		$3L_2 4L_3 P T_d$  43m акса-тетраэдр		
$D_{nh}$				$3L_3 PC D_{2h}$  mmm ромбическая бипирамида	$4L_2 4L_2 PC D_{4h}$  4/mmm тетрагональная бипирамида		$6L_2 7PC D_{6h}$  6/mmm гексагональная бипирамида	$3L_2 4L_3 PC T_h$  m3 дидодекаэдр	$3L_2 4L_3 6L_2 9PC O_h$  m3m октаэдр


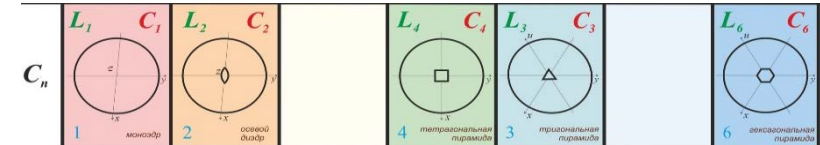
Скачать оригинал этой таблицы в формате А4 можно по гиперссылке <http://cryst.geol.msu.ru/appliances/pics/32.jpg>.

# Немного об абстрактной теории групп в теории симметрии

*Группой* называется множество объектов ( $G$ ) любой природы с заданной бинарной операцией ( $*$ ), если для любой пары элементов ( $a$  и  $b$ ) этого множества  $G$  определен третий результирующий элемент  $c = a * b$  того же множества. В общем случае  $a * b \neq b * a$ . Это значит, что результат зависит от того, в какой последовательности производится умножение элементов группы. Применительно к операциям симметрии это означает, что результирующие операции могут оказаться различными, если поменять порядок выполнения исходных операций.

При этом группой будет лишь такое множество с заданной бинарной операцией, для которого выполняются следующие условия:

- **ассоциативности** –  $(a * b) * c = a * (b * c)$ ,
- существования **единичного члена** ( $e$ ) - такого единичного элемента, что для любого элемента группы будет выполняться равенство  $e * a = a * e = a$ ,
- **обратимости** – для любого элемента  $a$  существует элемент  $a^{-1}$  из того же множества, называемый **обратным элементом** к элементу  $a$ , такой, что  $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ .

Некоторые определения теории групп	В приложении к группам симметрии																											
<i>Порядок группы</i> – число элементов группы G	Размножающая способность или величина симметрии																											
<i>Подгруппа</i> – множество $H \subset G$ , замкнутое относительно той же групповой операции, что и G, удовлетворяющее всем условиям группы	Все классы сингонии являются подгруппами голоэдри этой сингонии.																											
<i>Надгруппа</i> – множество G для H,	Кубическая голоэдрия – надгруппа для всех классов, кроме гексагональной подсингонии. Голоэдрия гексагональной подсингонии – надгруппа для всех классов гексагональной сингонии																											
<i>Теорема Лангранжа</i> - порядок подгруппы в целое число раз меньше порядка содержащей ее группы	<p>Величина симметрии группы <math>P3m</math> (6) в 2 раза меньше таковой для ее надгруппы <math>P\bar{3}m</math> (12)</p>  <p>Общая простая форма класса 222 – ромбический тетраэдр - содержит в 2 раза меньше граней ромбической бипирамиды - простой формы класса mmm</p>																											
<i>Абелевы группы</i> – все операции симметрии коммутативны: $a * b = b * a$ .	Группы $C_{nv}$ , $D_n$ , $D_{nd}$ , $D_{nh}$ – при $n > 2$ все неабелевы, а, например $C_{4h}$ – абелева																											
<i>Циклические группы</i> – все элементы группы можно получить умножением одного элемента на самого себя	<p>Все группы <math>C_n</math></p> 																											
<i>Генераторы группы</i> – такие элементы, произведениями которых можно получить всю группу	<p>Элементы симметрии <math>m_x</math>, <math>3^1_z</math> и <math>2_x</math> – генераторы группы <math>\bar{3}m</math></p> <table border="0" data-bbox="1146 1199 1911 1342"> <tr> <td><math>\bar{1}</math></td> <td><math>\bar{1}</math></td> <td>0</td> <td>1</td> <td>0</td> <td>0</td> <td><math>\bar{1}</math></td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td><math>3^1_z</math></td> <td>1</td> <td>0</td> <td>0</td> <td><math>2_x</math></td> <td>0</td> <td><math>\bar{1}</math></td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td></td> <td>0</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>0</td> <td>0</td> <td><math>\bar{1}</math></td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> </table>	$\bar{1}$	$\bar{1}$	0	1	0	0	$\bar{1}$	0	0	$3^1_z$	1	0	0	$2_x$	0	$\bar{1}$	0	0		0	0	1	0	0	$\bar{1}$	0	1
$\bar{1}$	$\bar{1}$	0	1	0	0	$\bar{1}$	0	0																				
$3^1_z$	1	0	0	$2_x$	0	$\bar{1}$	0	0																				
	0	0	1	0	0	$\bar{1}$	0	1																				