

ЛЕКЦИЯ 2

Волшебные оси
(это выдумка или нет?)

Проецирование
(или как изумить Скотта и Амундсена)

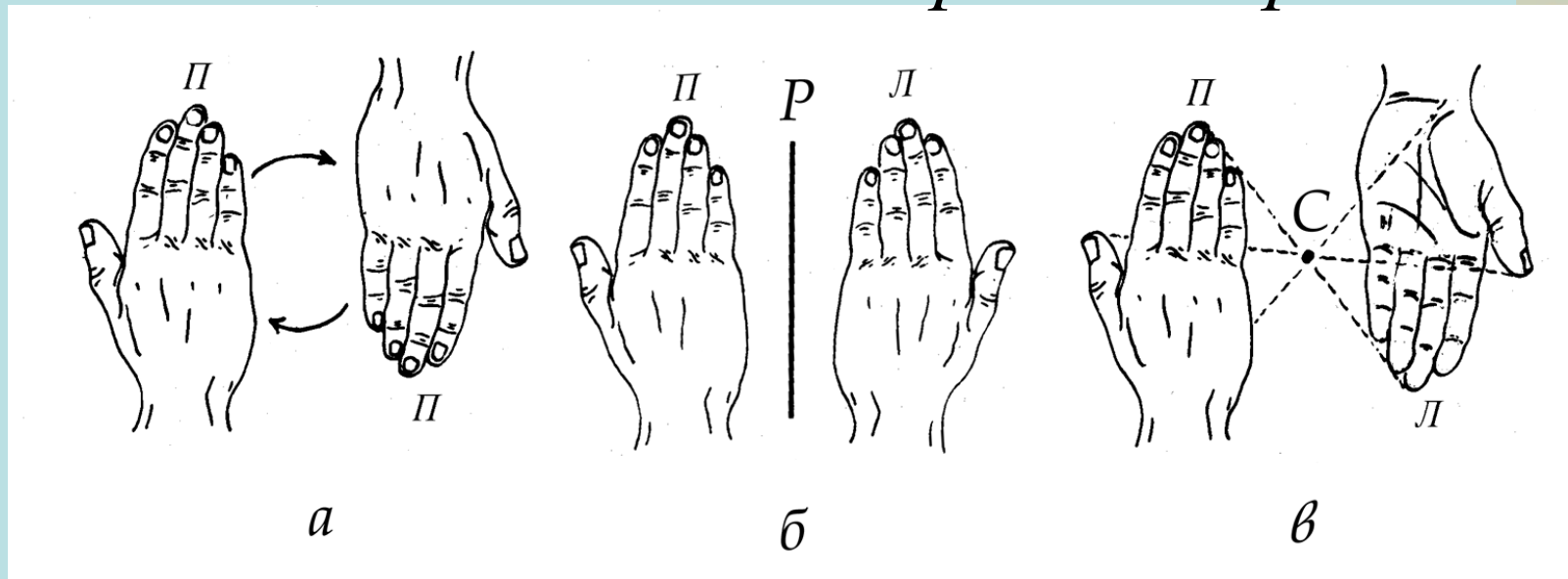
Теорема Эйлера
(и ее наглядное доказательство с помощью машины времени).

Разминка





В зависимости от характера преобразования различают *элементы симметрии I и II родов*.



Элементы симметрии I рода связывают друг с другом **конгруэнтно равные** фигуры (греч. *congruens* - совмещающийся), т.е. фигуры, совмещающиеся при наложении (вложении) – правые (П) с правыми, левые (Л) с левыми.

Элементы симметрии II рода связывают друг с другом **энантиоморфные** (греч. *enantios* – противоположный, *morphe* – форма), т.е. зеркально равные фигуры или их части – П с Л.

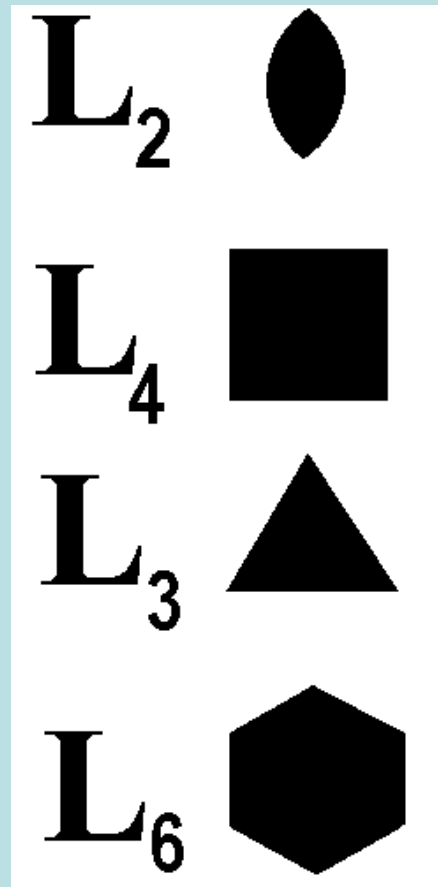


Операция симметрии I рода - **Поворот**

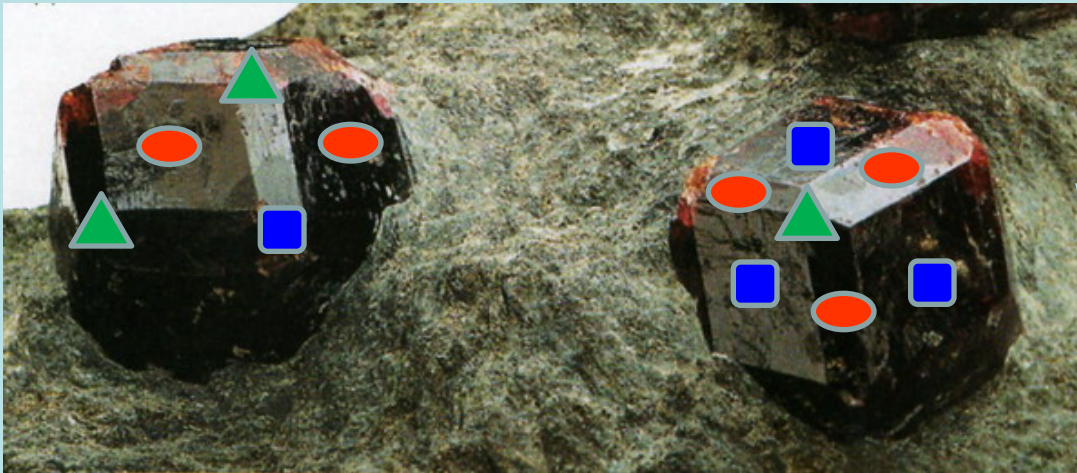
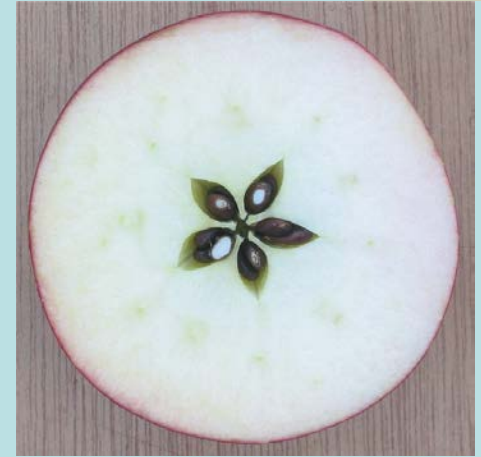
**Элемент симметрии - Поворотная ось $L_n = 360^\circ/\alpha$,
где n – порядок оси, α - элементарный угол поворота**

Обозначение

В предложенной французским кристаллографом О.Браве символике, которой удобно воспользоваться на начальной стадии учебного процесса, оси симметрии обозначаются буквами L_n , где подстрочный индекс n соответствует порядку оси. Графически поворотные оси обозначаются прямыми линиями со значками, соответствующими порядку оси. Ось 1-го порядка L_1 графического значка не имеет.



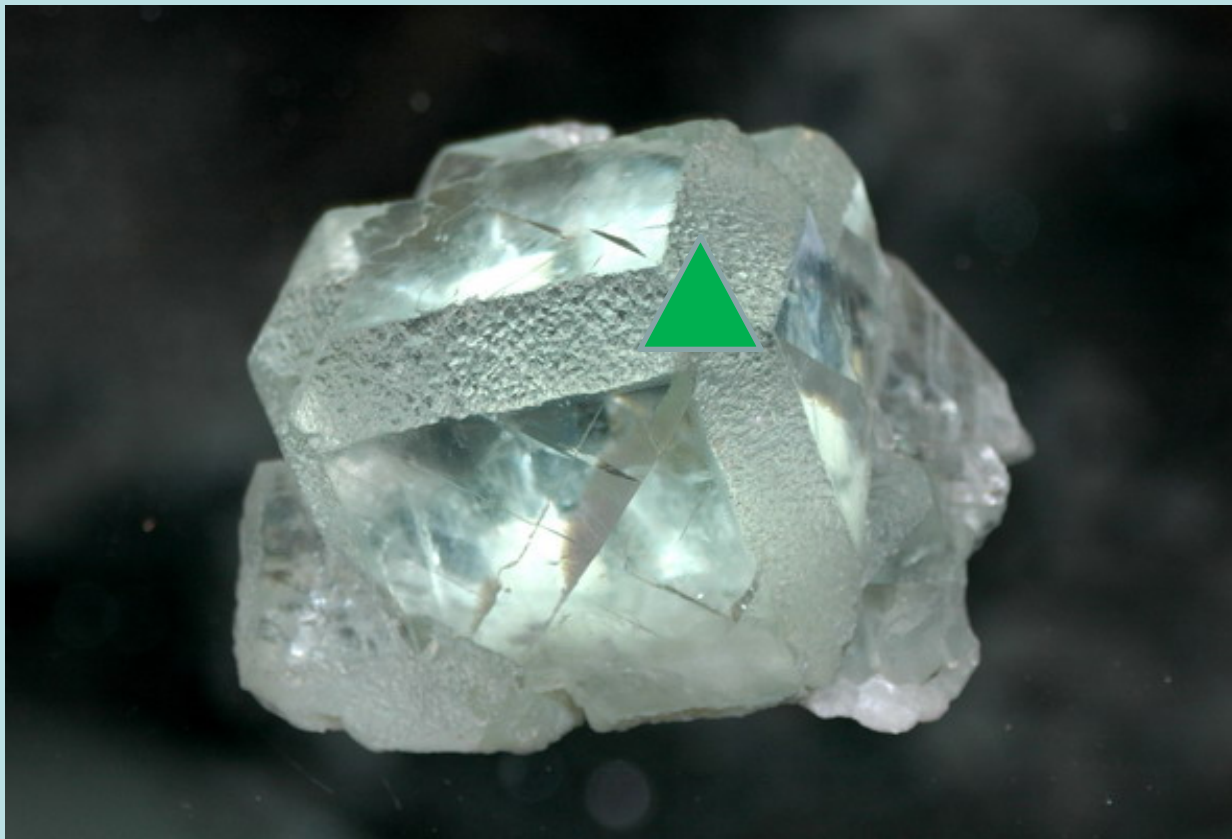
Поворотных осей в природе полно!



Кристалл граната –
альмандина.
 $\text{Fe}_3\text{Al}_2[\text{SiO}_4]_3$

Можно увидеть
оси **2**, **3** и **4** порядков

Кристаллы – очень даже симметричные объекты!



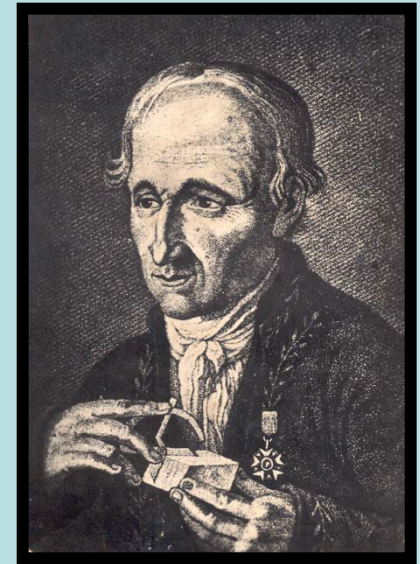
Флюорит
(CaF_2)



*В кристаллах нет осей 5-го
и выше 6-го порядков.*

*Основной закон симметрии
кристаллов*, установленный
эмпирически, но впоследствии
подтвержденный «решетчатым»
строением кристаллов.

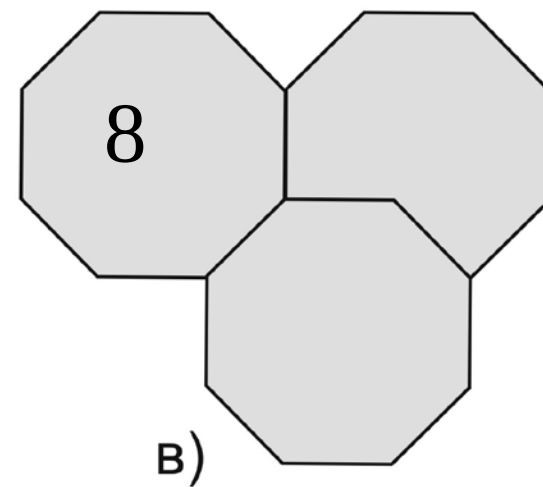
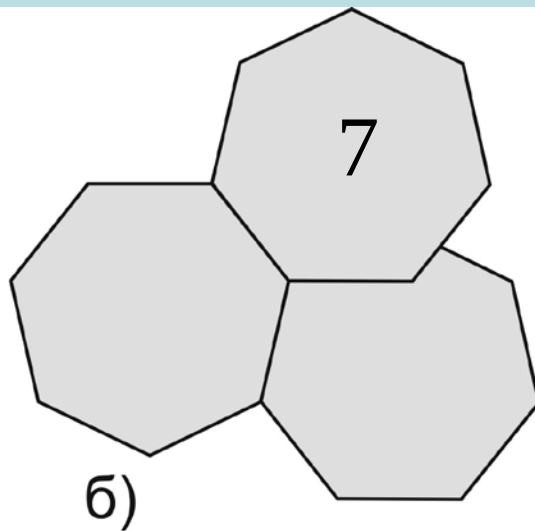
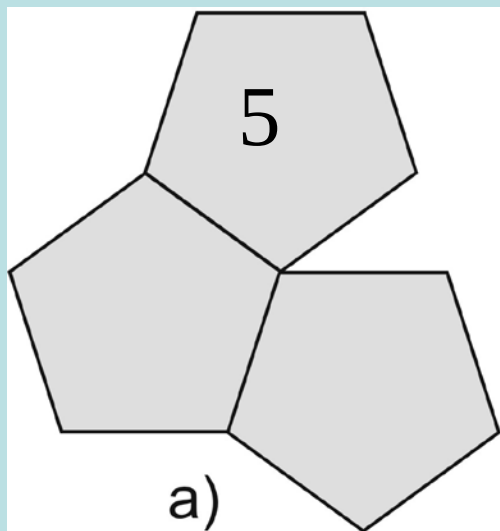
*В кристаллических
многогранниках порядок осей
ограничен числами
 $n = 1, 2, 3, 4, 6$.*



*Рене Жюст Гаюи
(1743 – 1822 гг.)*



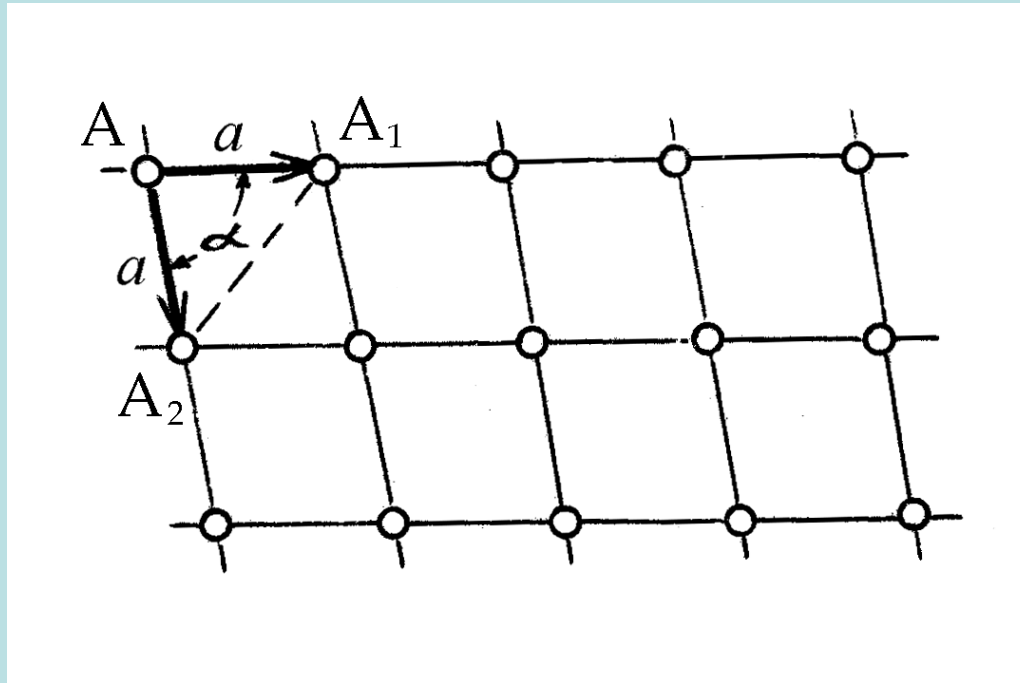
Следствие - на плоскости нельзя правильными n -угольниками (где $n > 6$) выполнить все двумерное пространство без зазоров или перекрытий



(6-угольниками можно
— доказано пчелами)

Этот закон можно доказать, предположив
решетчатое строение кристаллов.

Рассмотрим для простоты 2 мерный случай:

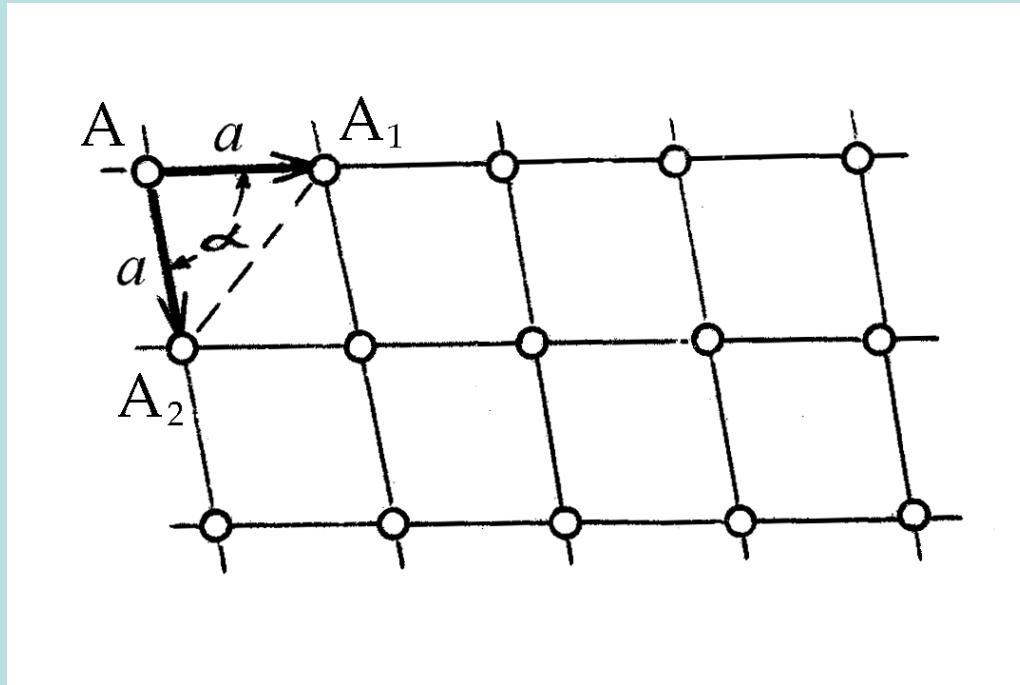


Пусть два пересекающихся в точке A узловых ряда определяются одним и тем же межузловым расстоянием, минимальным для данной пространственной решетки ($a = a_{\text{мин}}$). Тогда в треугольнике AA_1A_2 сторона A_1A_2 должна быть равна a , либо больше a . Следовательно, $\geq 60^\circ$. Это значит, что порядок оси не может превышать шести

В кристаллах нет осей порядка >6

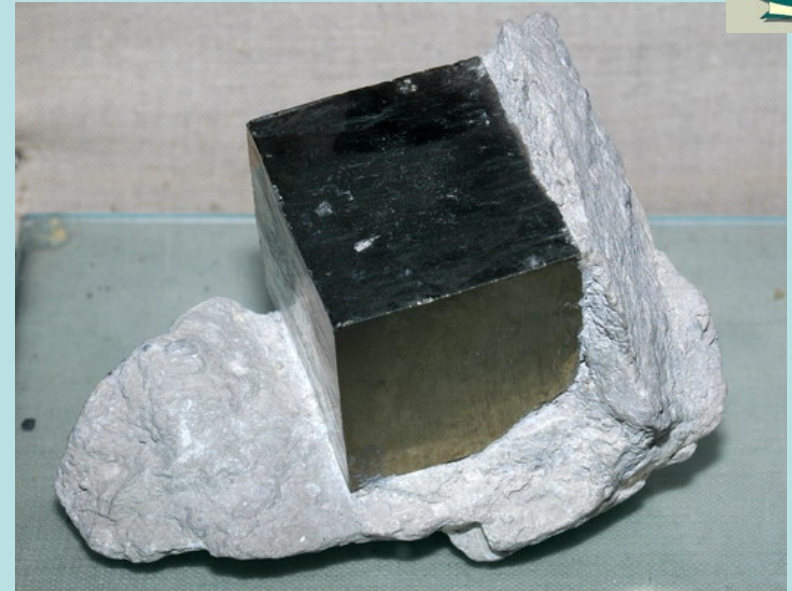


В кристаллах нет осей 5-го порядка



Любая параллелограмматическая сетка обладает расположенной перпендикулярно к ней осью симметрии 2-го порядка. Если же в кристалле есть ось нечетного порядка, то результат ее взаимодействия с параллельной ей осью 2-го порядка, присущей каждой сетке, обусловит появление четной оси вдвое большего порядка. Следовательно, если предположить возможность присутствия в кристалле оси 5-го порядка, то окажется, что перпендикулярно узловой сетке должна возникнуть ось вдвое большего – **10-го порядка**, что противоречит доказанному выше ($n \geq 6$)

В кристаллах нет осей 5-го порядка



А В живых организмах ЕСТЬ! $N=5$





3) Страх перед неживой природой



**К элементам симметрии II-го рода
относятся обычные элементы
известные каждому в быту:**

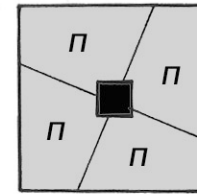
зеркальные плоскости

центр инверсии

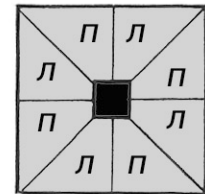
Операция симметрии - Отражение

Элемент симметрии – Зеркальная плоскость

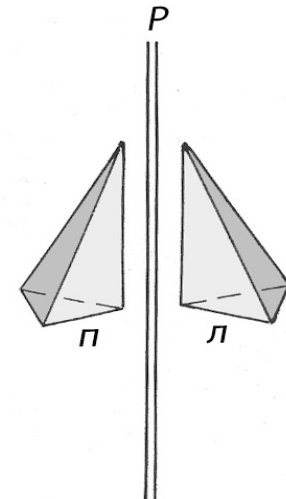
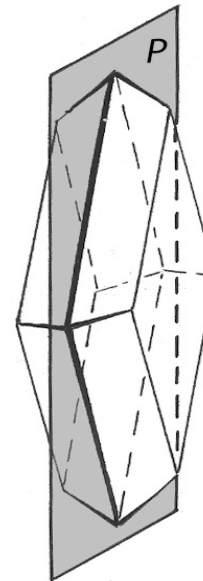
Зеркальная плоскость симметрии задает операцию отражения, при которой правая часть фигуры (или П-фигура), отражаясь в плоскости, как в двухстороннем зеркале, совмещается с левой ее частью (Л-фигурой). Кристалл, обладающий зеркальной плоскостью, разбивается этим элементом симметрии на две зеркально равные – энантиоморфные – части



а

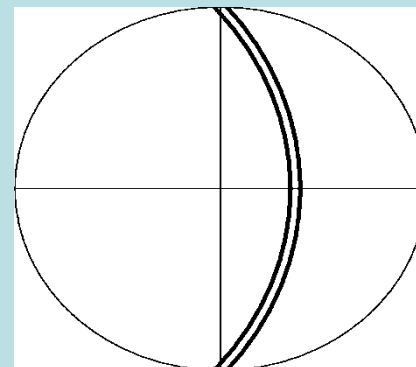
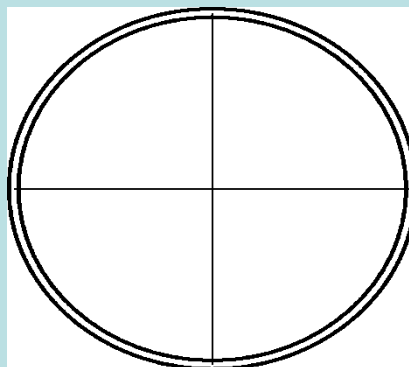
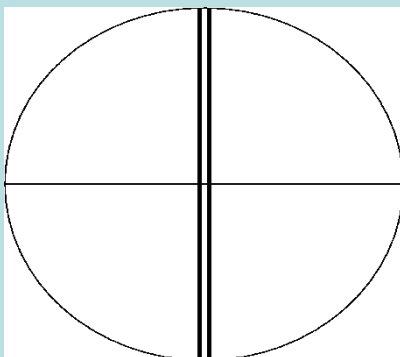
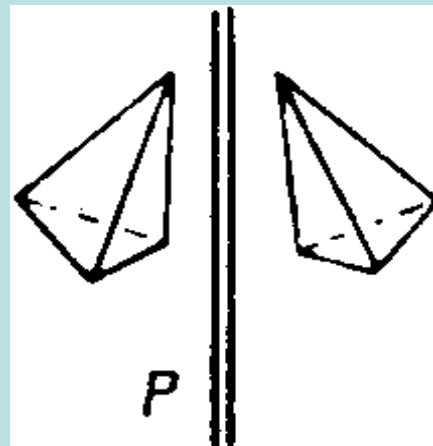
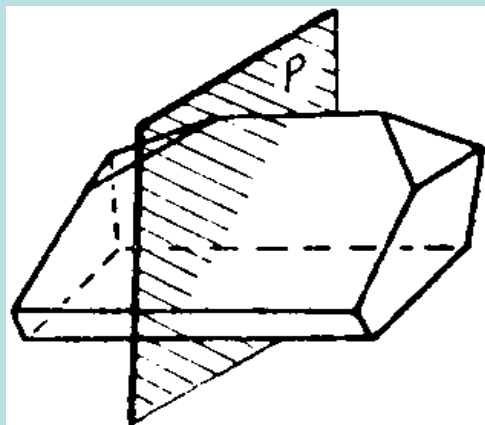


б



Операция симметрии - Отражение

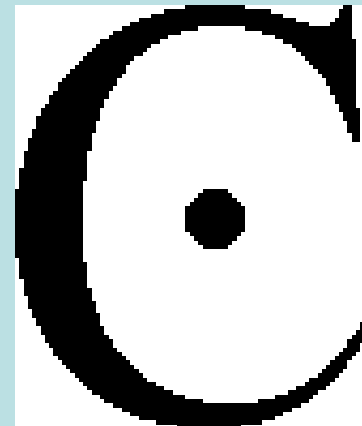
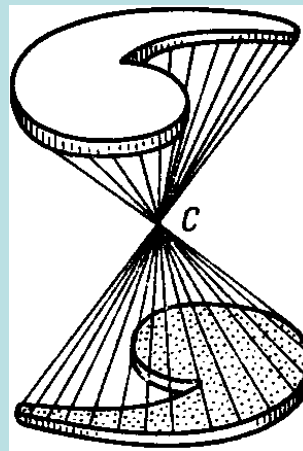
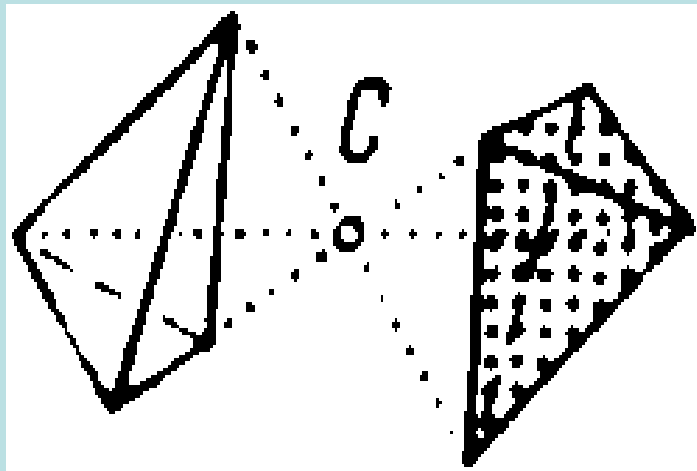
Обозначение





Операция симметрии - **Отражение**

Элемент симметрии – **Центр симметрии = центр инверсии**

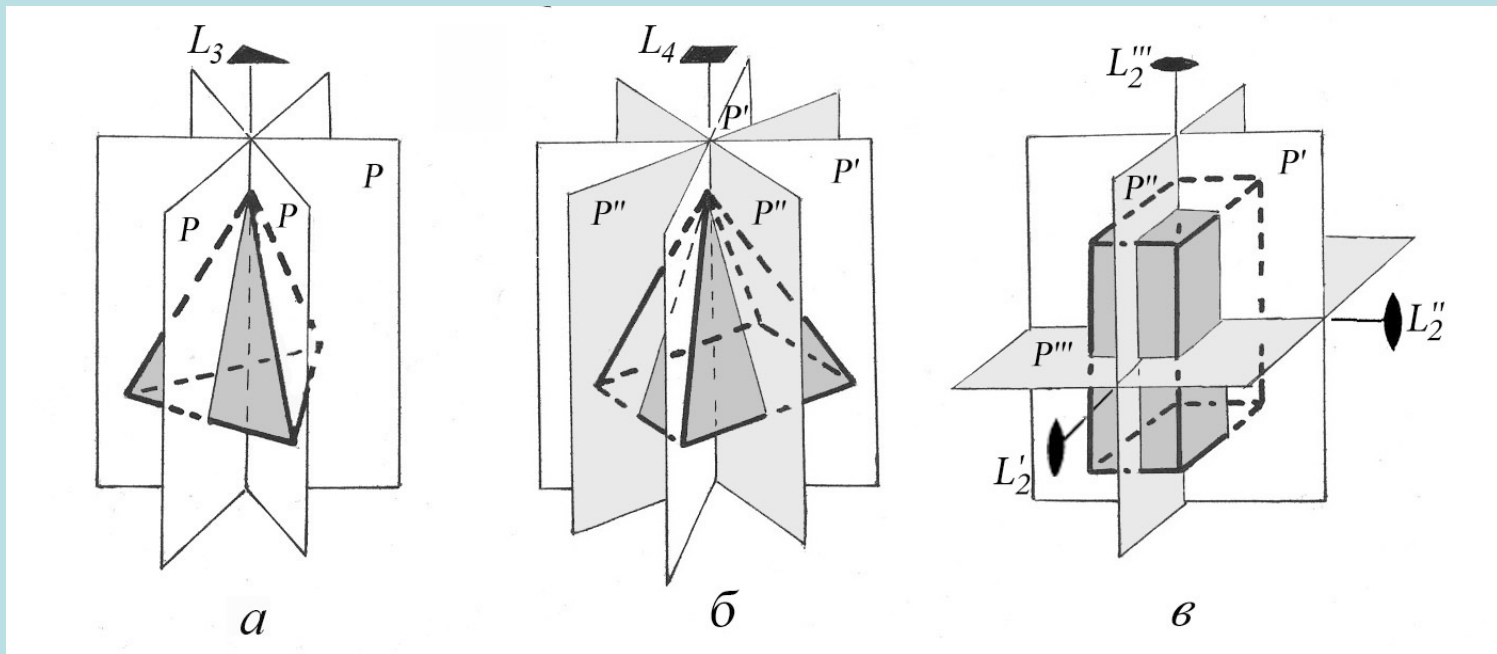


Центр симметрии – это особая как бы «зеркальная» точка внутри фигуры, совпадающая с ее центром тяжести, «отражаясь» (инвертируясь) в которой, правая фигура не только переходит в левую, но и, поворачиваясь на 180° , становится антипараллельной исходной.



Эквивалентные и неэквивалентные элементы симметрии

Эквивалентные элементы симметрии, связаны какими-либо операциями симметрии данного кристалла.



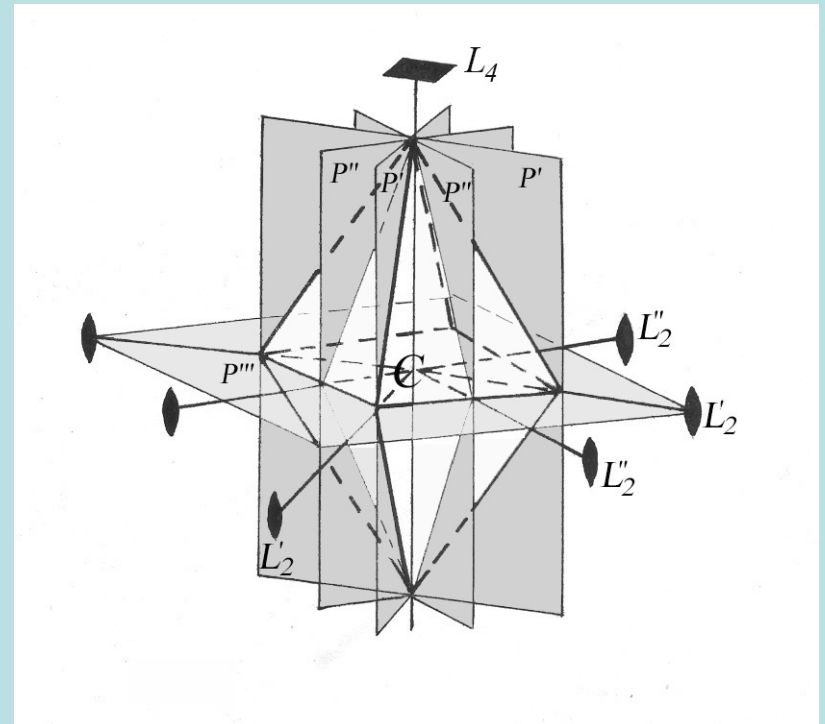
Эквивалентные и неэквивалентные элементы симметрии:
 $a - L_3 3P$, $б - L_4 4P = L_4 2P' 2P''$; $в - 3L_2 3P = L_2' L_2'' L_2''' P' P'' P''' C$

Описание элементов симметрии

При описании симметрии кристаллов выявленный комплекс элементов симметрии, называемый *классом* (или *группой*) *симметрии*, записывается в строчку в следующей последовательности:

- 1) поворотные оси высшего порядка ($n > 2$) (конечно, если они присутствуют),
- 2) поворотные оси 2-го порядка,
- 3) зеркальные плоскости симметрии,
- 4) центр инверсии (если есть).

$$L_4 \text{ } 2L_2 \text{ } 2L_2 \text{ } 2P \text{ } 2P \text{ } P \text{ } C$$



Сколько всего есть элементов
симметрии в кристаллах?

$$L_1, L_2, L_3, L_4, L_6$$

$$P, C$$

Все?

Для маглов из других вузов все,
а для нас — **не совсем...**

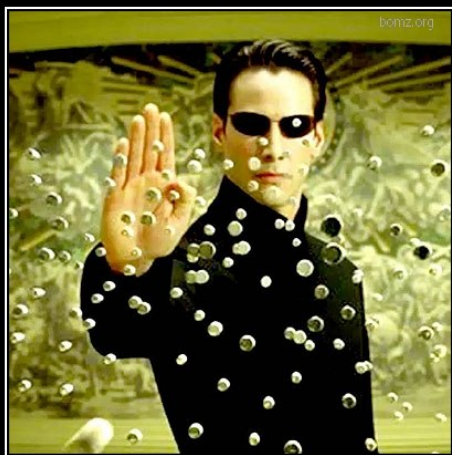


Дело в том, что к элементам симметрии
II-го рода относятся не только обычные
элементы известные в быту:

зеркальные плоскости

центр инверсии

но и **волшебные** элементы доступные
кристаллографам и незаметные «маглам»:



КРИСТАЛЛОГРАФЫ

Видят то, что остальным незаметно

bomz.org

*зеркально-
поворотные оси*

инверсионные оси



БЫТЬ СЛИЗЕРИНЦЕМ:

ПЛЮСЫ:

- + ВЫ СЛИЗЕРИНЕЦ.
- + ВЫ ЛУЧШЕ ВСЕХ.
- + МАЛФОЙ.
- + ВАМ МНОГОЕ СХОДИТ С РУК.
- + ВЫ ЛЮБИМЧИК СНЕЙПА
- + ВАС БОЯТСЯ, А ЗНАЧИТ - УВАЖАЮТ
- + ЧЕРНЫЙ ЦВЕТ ВСЕМ ИДЕТ.

МИНУСЫ:

У ВАС НЕ МОЖЕТ БЫТЬ МИНУСОВ. ВЫ ПРЕКРАСНЫ.

Волшебные элементы симметрии



Начиная с этого момента вся информация секретная!

СТРОГО СЕКРЕТНО!



Для служебного
пользования

**МАГЛАМ
С ДРУГИХ ПРОФИЛЕЙ
И ТЕМ БОЛЕЕ
ФАКУЛЬТЕТОВ
ПОКАЗЫВАТЬ
КАТЕГОРИЧЕСКИ
ВОСПРЕЩАЕТСЯ!**

Волшебные элементы симметрии.

Есть ли они в кристаллах или это выдумка?

Волшебные (сложные) элементы симметрии позволяют совмещать фигуры путем двойной мнимой операции – фиктивного поворота (операции **I**-го рода) и одновременного фиктивного отражения в плоскости или инверсии в точке (операции **II**-го рода).

При этом промежуточного результата нет!

Отдельных операций тоже нет!

Вещественна только суперпозиция

зеркально-поворотные оси ϕ_n

инверсионные оси $\pm_n$

Теория прохождения виртуальной плоскости и отражения в мнимом центре

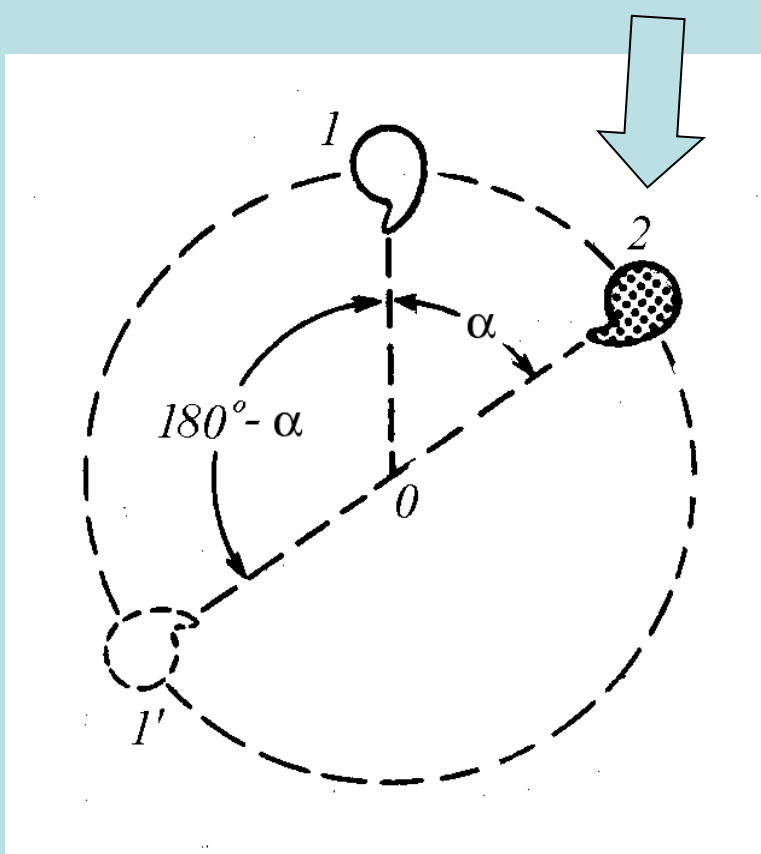


Как работает

- 1) поворот (операция **I**-го рода) но после него фигура не остается на месте, а **сразу**
- 2) подвергается действию отражению в плоскости σ_n или в точке τ_n (операции **II**-го рода).

$$\text{II} \rightarrow \text{II} \rightarrow \text{I}$$

то есть это операция 2-ого рода!



Взаимосвязь между зеркальным (угол поворота α) и инверсионным (угол поворота $\alpha' = 180^\circ - \alpha$) поворотами

(Операция каждой зеркальной оси с элементарным углом поворота α может быть заменена операцией инверсионной оси с элементарным углом поворота $\alpha' = 180^\circ - \alpha$)

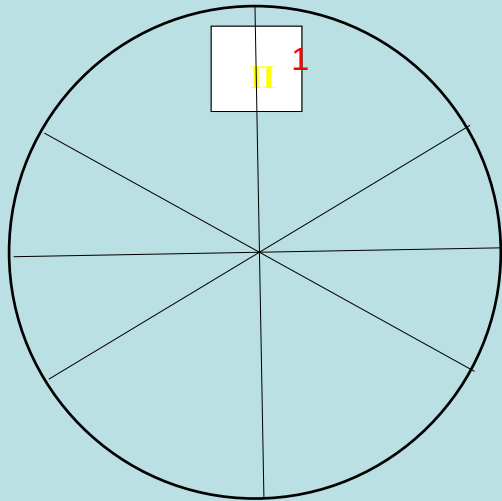
**Давайте теперь зададим
сами себе вопрос:**



- Нельзя ли эти сложные (на первый взгляд надуманные) преобразования заменить набором простых, уже знакомых нам, элементов симметрии?
- Действительно ли для описания симметрии некоторых кристаллов простых элементов симметрии недостаточно?

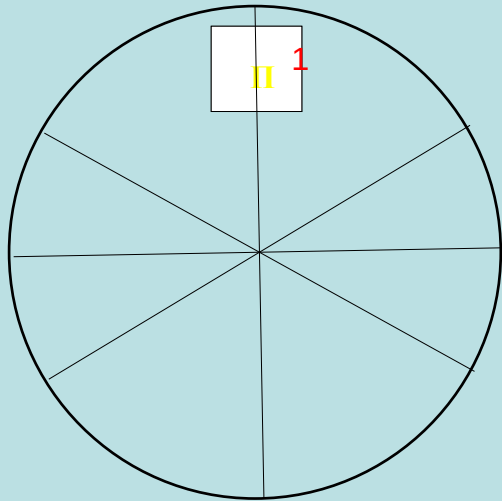
Для ответа на эти вопросы давайте проанализируем все кристаллографические порядки осей и посмотрим взаимосвязь между **зеркально-поворотными**, **инверсионными** и **простыми элементами симметрии**.

*Проверим все варианты. Есть ли
на свете место чуду?*



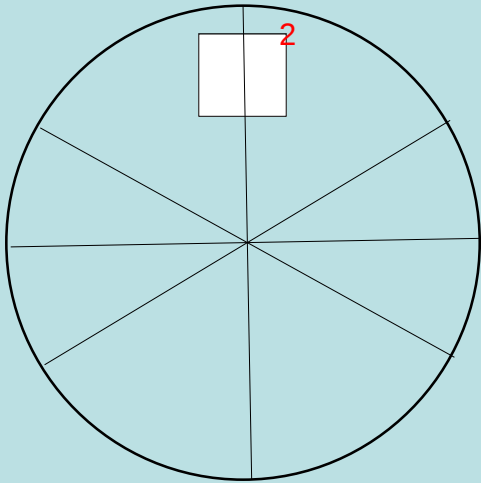
N	$L_n(\alpha)$	$L_n(\alpha')$	Что это?
1	$n=1 \ (\alpha=0)$	$n=2 \ (\alpha=180)$	
2			
3			
6			
4			

*Проверим все варианты. Есть ли
на свете место чуду?*



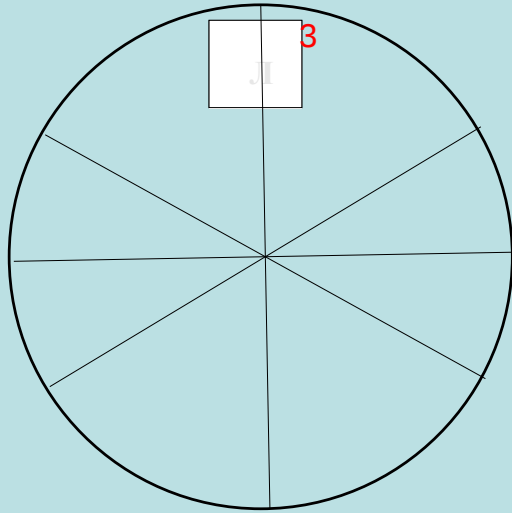
N	$L_n(\alpha)$	$L_n(\alpha')$	<i>Что это?</i>
1	$n=1 \ (\alpha=0)$	$n=2 \ (\alpha=180)$	
2			
3			
6			
4			

*Проверим все варианты. Есть ли
на свете место чуду?*



N	$L_n(\alpha)$	$L_n(\alpha')$	<i>Что это?</i>
1	$n=1$ ($\alpha=0$)	$n=2$ ($\alpha=180$)	
2			
3			
6			
4			

Проверим все варианты. Есть ли на свете место чуду?



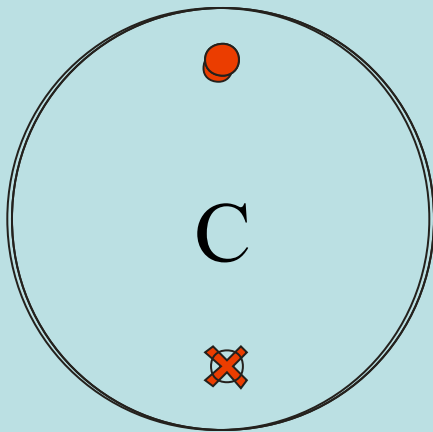
N	$L_n(\alpha)$	$L_n(\alpha')$	Что это?
1	$n=1 (\alpha=0)$	$n=2 (\alpha=180)$	плоскость! (P_z)
2			
3			
6			
4			

Оказывается, по утрам мы смотримся в
инверсионную ось второго порядка



Типичная инверсионная ось второго порядка

*Проверим все варианты. Есть ли
на свете место чуду?*

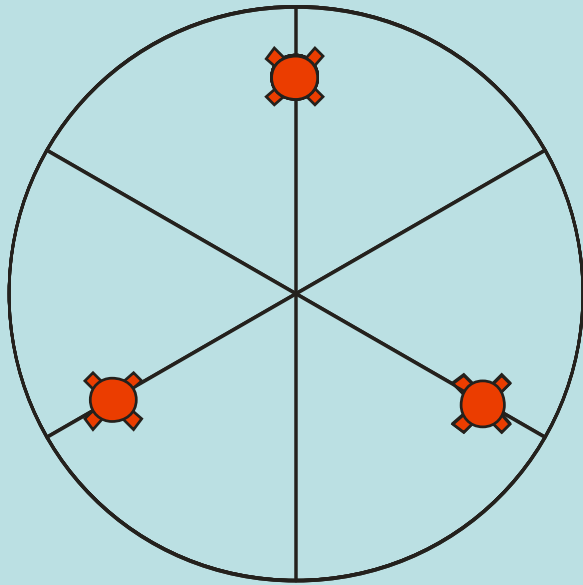


N	$\perp_n(\alpha)$	$\perp_n(\alpha')$	<i>Что это?</i>
1	$n=1$ ($\alpha=0$)	$n=2$ ($\alpha=180$)	плоскость! (P_z)
2	$n=2$ ($\alpha=180$)	$n=1$ ($\alpha=360$)	центр!
3			
6			
4			



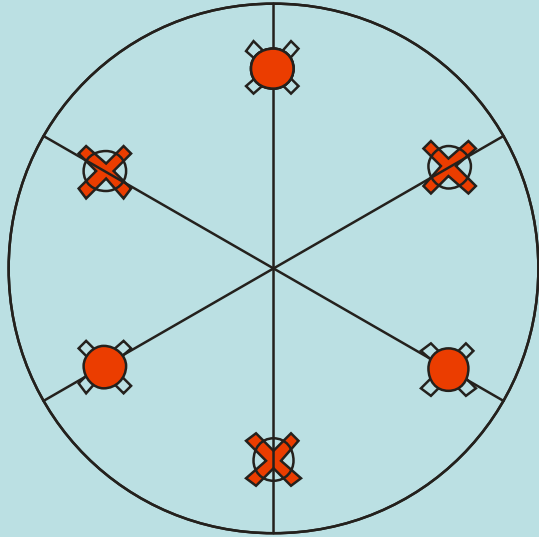
Типичная инверсионная ось первого порядка

Проверим все варианты. Есть ли на свете место чуду?



N	$L_n(\alpha)$	$L_n(\alpha')$	Что это?
1	$n=1 (\alpha=0)$	$n=2 (\alpha=180)$	плоскость! (P_z)
2	$n=2 (\alpha=180)$	$n=1 (\alpha=360)$	центр!
3	$n=3 (\alpha=120)$	$n=6 (\alpha=60)$	$L_3 + P_z!$
6			
4			

*Проверим все варианты. Есть ли
на свете место чуду?*



N	$L_n(\alpha)$	$L_n(\alpha')$	Что это?
1	$n=1 (\alpha=0)$	$n=2 (\alpha=180)$	плоскость! (P_z)
2	$n=2 (\alpha=180)$	$n=1 (\alpha=360)$	центр!
3	$n=3 (\alpha=120)$	$n=6 (\alpha=60)$	$L_3+P_z!$
6	$n=6 (\alpha=60)$	$n=3 (\alpha=120)$	L_3+C
4			

Похоже чудес на свете нет...

Появилась инверсионная ось 4-ого порядка!



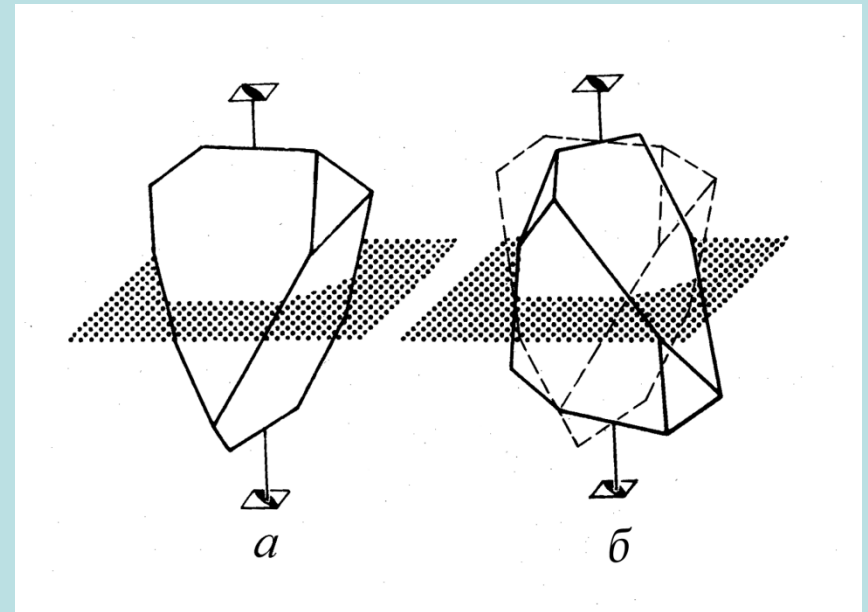
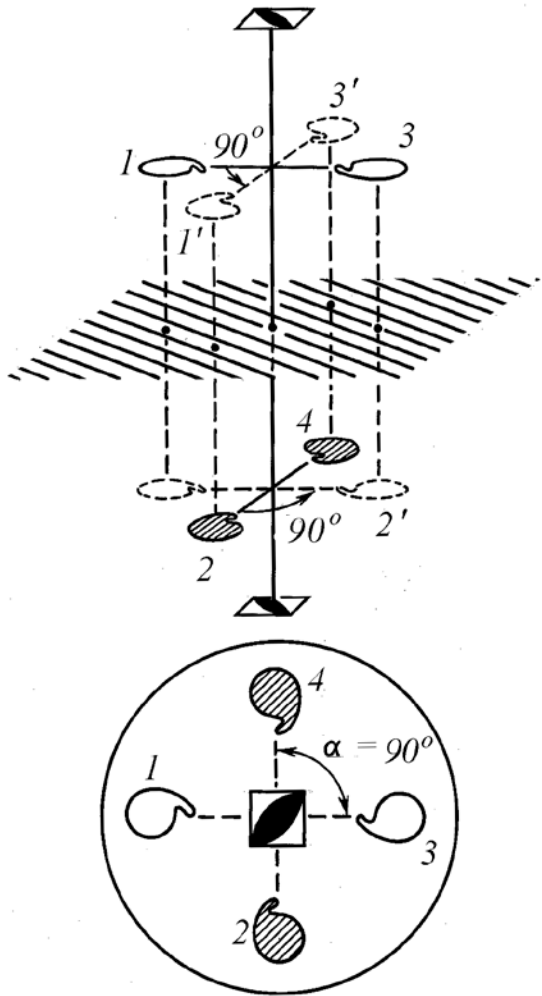
N	$\bar{L}_n(\alpha)$	$L_n(\alpha')$	Что это?
1	$n=1 (\alpha=0)$	$n=2 (\alpha=180)$	плоскость! (P_z)
2	$n=2 (\alpha=180)$	$n=1 (\alpha=360)$	центр!
3	$n=3 (\alpha=120)$	$n=6 (\alpha=60)$	$L_3+P_z!$
6	$n=6 (\alpha=60)$	$n=3 (\alpha=120)$	L_3+C
4	$n=4 (\alpha=90)$	$n=4 (\alpha=90)$	Чудо

Что это?

Зеркально-поворотную ось 4-го порядка невозможно заменить простыми реальными элементами симметрии! Именно поэтому эта ось имеет свое графическое обозначение – темный знак Фюзю в светлом квадратике. Более того, она присутствует в реальных кристаллах, что «узаконивает» все учение о зеркально-поворотных осях.

Иллюстрация действия
зеркально-поворотной (инверсионной)
оси 4-го порядка

L_4



Многогранник с единственным элементом симметрии

а) -зеркально-поворотной осью 4-го порядка

б) иллюстрация мнимых операций симметрии 4-го порядка

– поворота на 90° и отражения в зеркальной плоскости симметрии

Иллюстрация действий простых и сложных элементов симметрии приводящих к похожему расположению граней:

a – трех взаимно перпендикулярных осей 2-го порядка $L_2' L_2'' L_2'''$,

б – поворотной оси 4-го порядка L_4 ,

в – зеркально-поворотной оси 4-го порядка $\bar{L}_4$. Цветом выделены лицевые и изнаночные стороны треугольников.

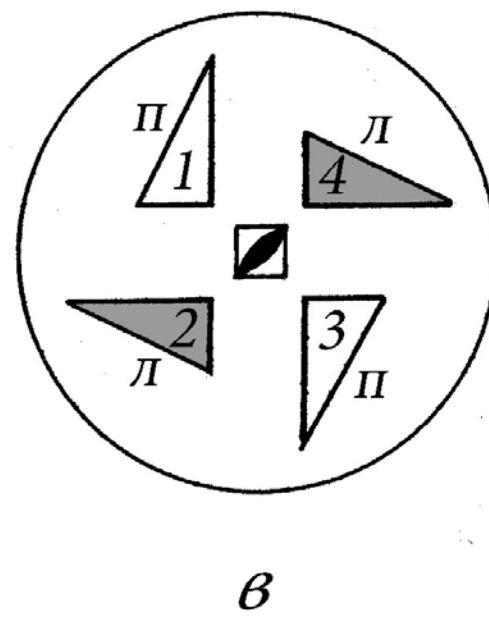
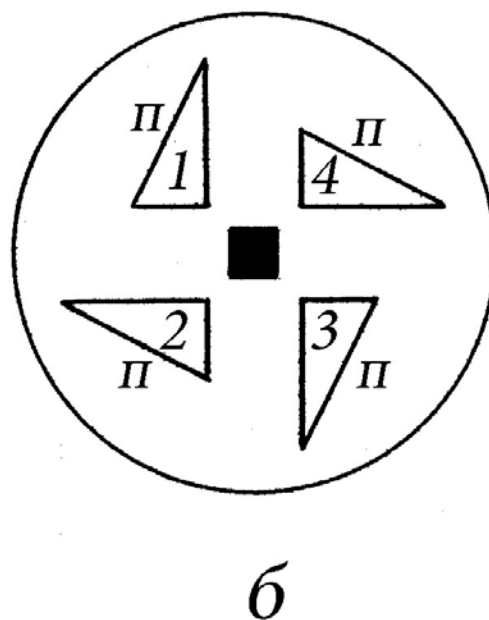
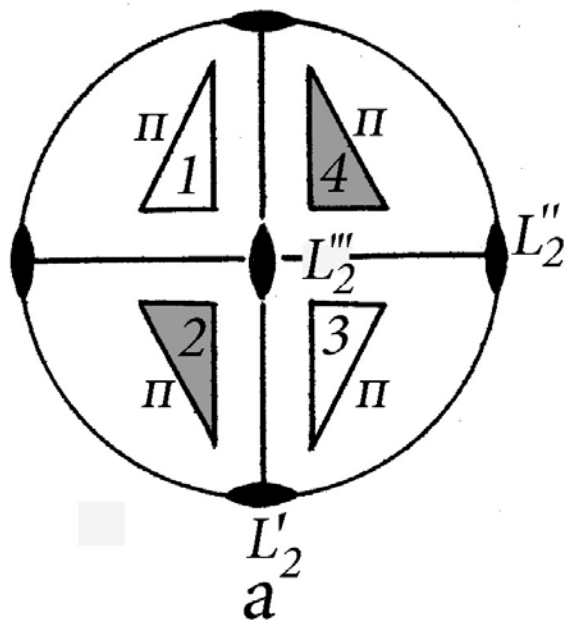
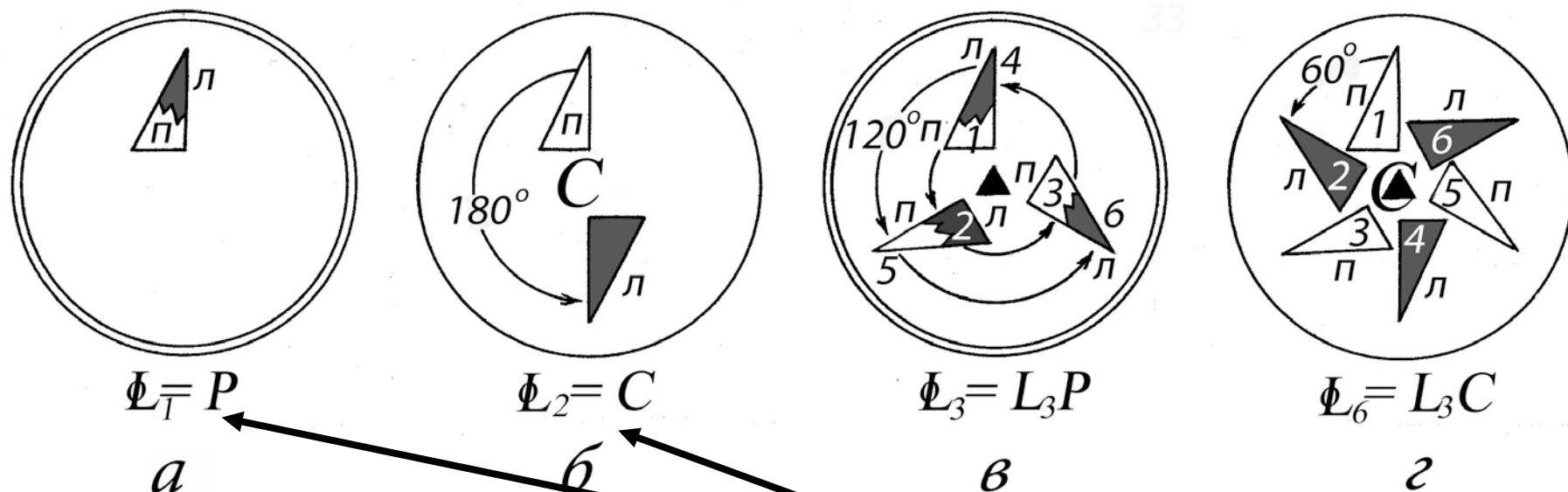


Иллюстрация замены некоторых сложных осей простыми элементами симметрии



ВАЖНО! Все операции симметрии – оси
(обычные или волшебные!)

Итого. Сколько всего есть элементов симметрии в кристаллах?

Легко
просто 😊

L_1, L_2, L_3, L_4, L_6

$L_1(C), L_2(P), L_3(L_3C), L_4(\text{нет}), L_6(L_3P)$

Кристаллы живут в мире
простых и волшебных
осей симметрии!

Проецирование *(или как изумить Скотта и Амундсена)*



Проецирование кристаллов и элементов симметрии

Для получения полной характеристики огранки кристалла необходимо не только найти и зафиксировать в пространстве элементы его симметрии, но и, используя основной закон постоянства углов между соответствующими гранями, зафиксировать положения граней относительно элементов симметрии.

Для этого следует последовательно прибегнуть к трем способам проецирования кристаллов:

- 1) Мысленно построить *сферическую проекцию* (сфера условно бесконечного радиуса)
- 2) Построить *стереографическую проекцию* (плоский образ *сферической проекции*) элементов симметрии кристалла
- 3) Нанести *гномотереографические* проекции граней.

Проецирование кристаллов и элементов симметрии

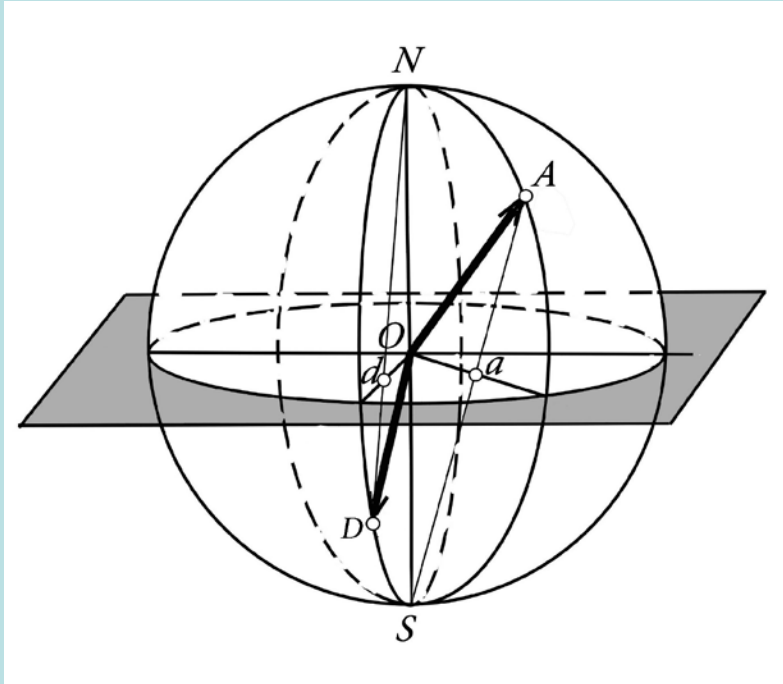
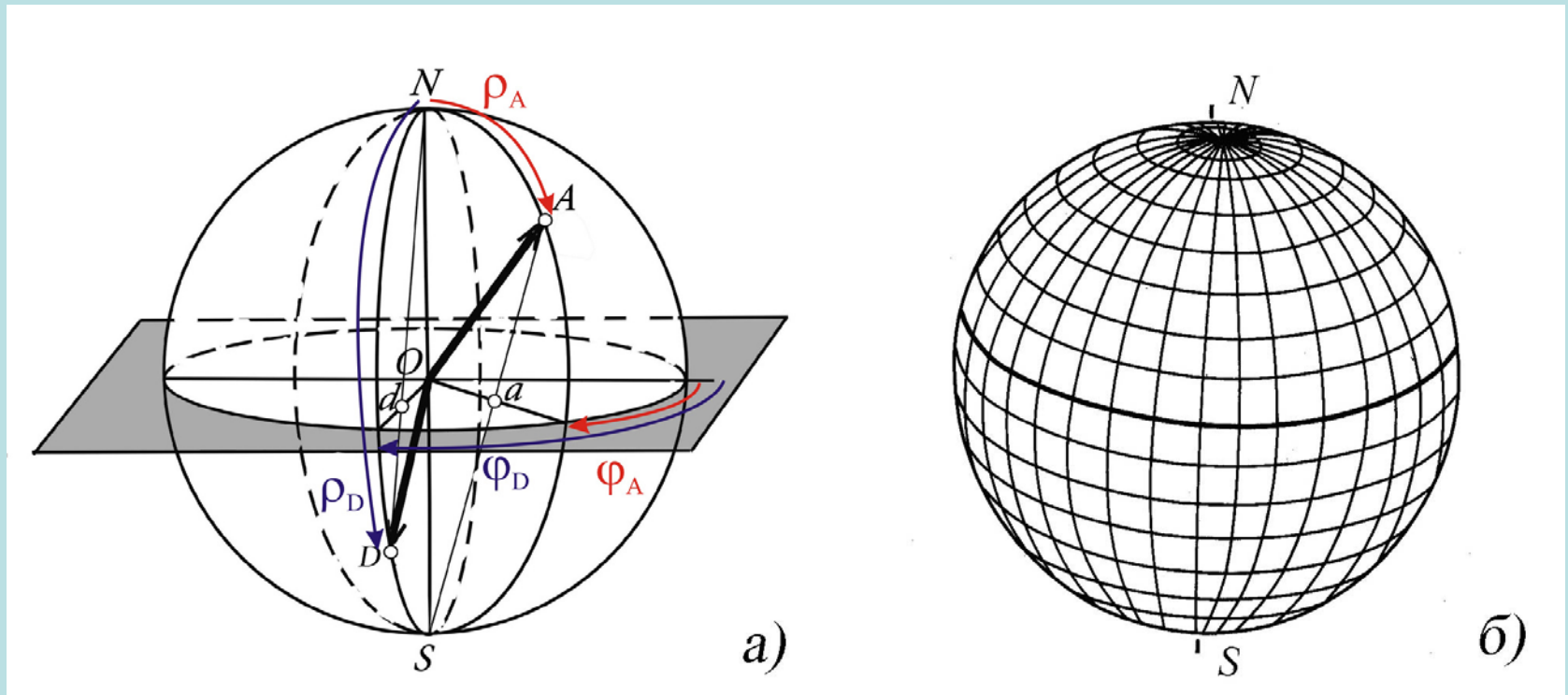


иллюстрация взаимосвязи
положения точек A и D на сфере
проекций и их
стереографических образов a и d
на экваториальной плоскости



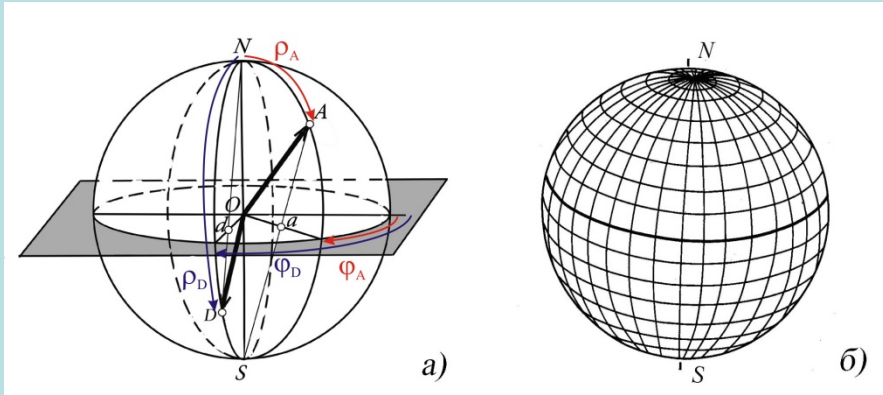
модель для изучения
основ стереографического
проецирования

Проецирование



- a) измерение сферических координат точек A и D в верхней и нижней полусфере;
- б) градуировка сферы проекций системой меридианов и параллелей.

Проецирование



Каждая точка на сфере проекций имеет две координаты (как в географии) – широта (обозначается греческой буквой ρ) и долгота (обозначается греческой буквой φ).

В кристаллографии и географии эти координаты снимаются различными способами (у нас проще и лучше!): в кристаллографии **долгота** отсчитывается не от Гринвича, а от меридиана, совпадающего с положительным выходом оси у. Этот меридиан выбирается в качестве 0-ого ($\varphi = 0^\circ$, он же имеет $\varphi = 360^\circ$). Таким образом, каждая точка на сфере имеет долготу от 0 до 360° (**без дурацких ВД и ЗД**). **Широта** (координата ρ) отсчитывается по меридиану, проведенному через исследуемую точку «А» в направлении от северного полюса N к южному полюсу (S). ρ на северном полюсе $= 0^\circ$, на экваторе $\rho = 90^\circ$, а на южном полюсе S $\rho = 180^\circ$ (**без дурацких СШ и ЮШ**). (Скотт и Амундсен были бы слегка удивлены).



Роберт Фалкон Скотт
Достиг точки $\rho = 180^\circ$
17 января 1912 года,
погиб на обратном пути



Руаль Амундсен
Достиг точки $\rho = 180^\circ$
14 декабря 1911 года
(погибнет потом в 1928).



Почему погибла экспедиция Скотта?

Версия

<http://ru.wikipedia.org/wiki>

«Оловянная чума» — одна из причин гибели экспедиции Скотта к Южному полюсу в 1912 г. Она осталась без горючего из-за того, что топливо просочилось через запаянные оловом баки...



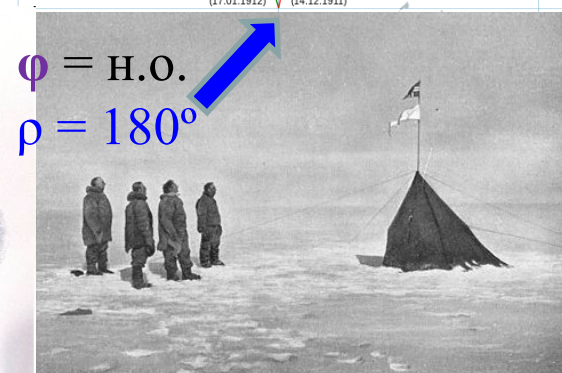
Роберт Фалкон Скотт
англ. Robert Falcon Scott



17 января 1912 года.

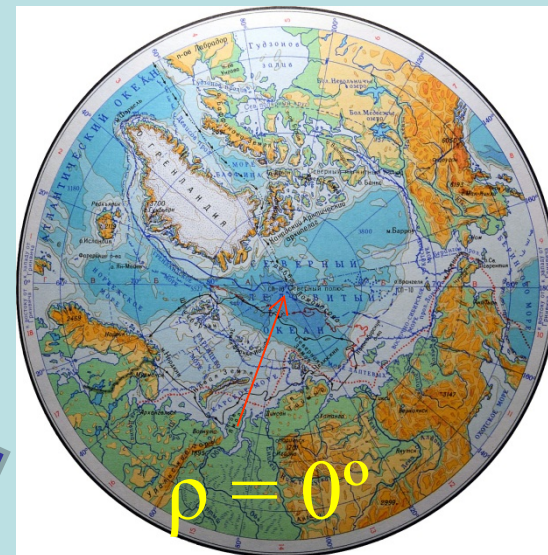
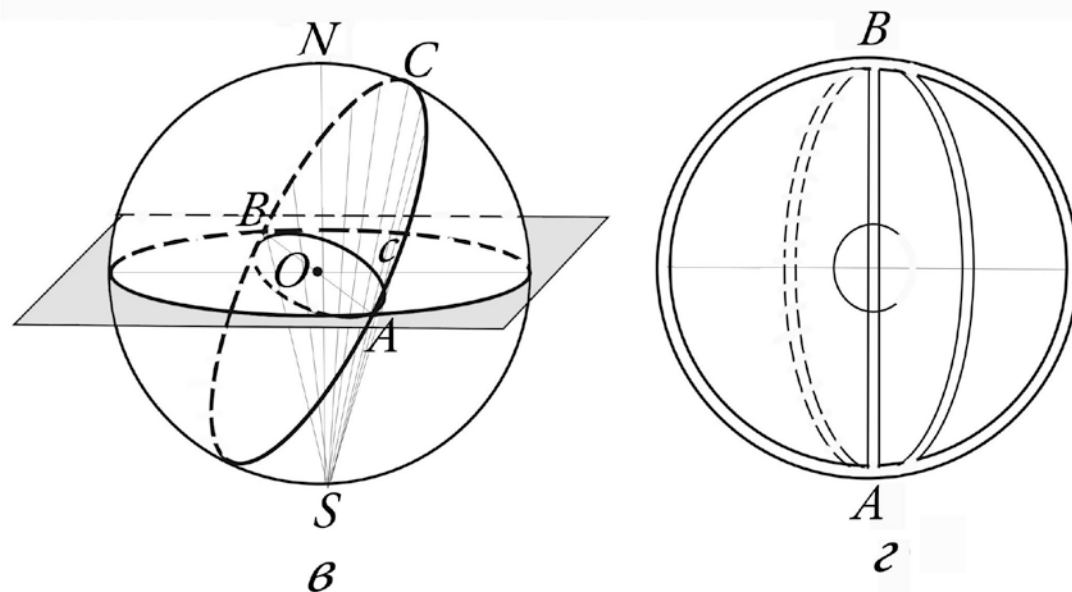
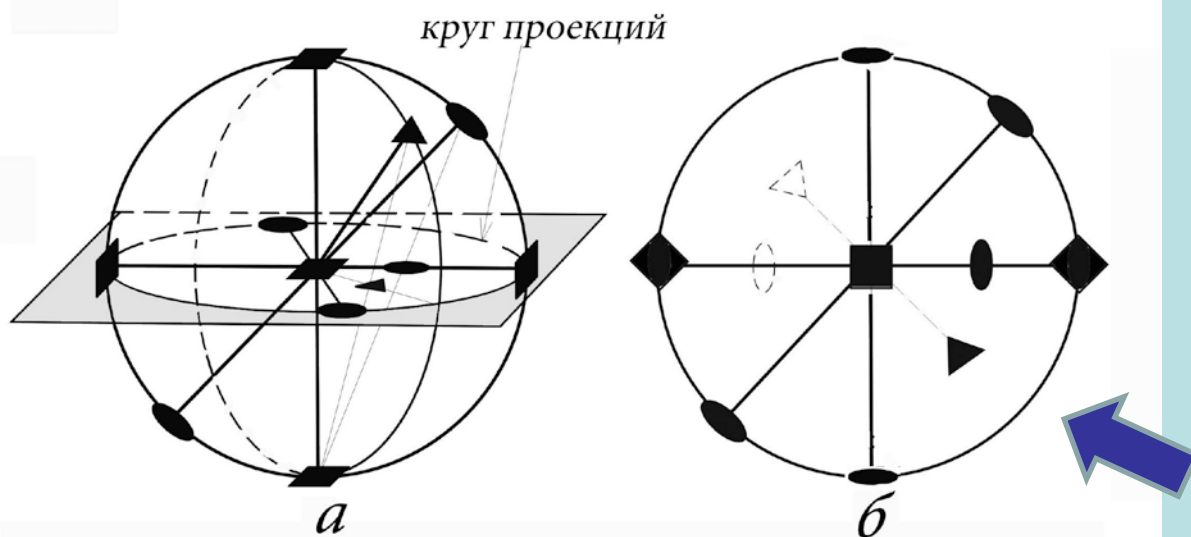


Рӯаль Амундсен

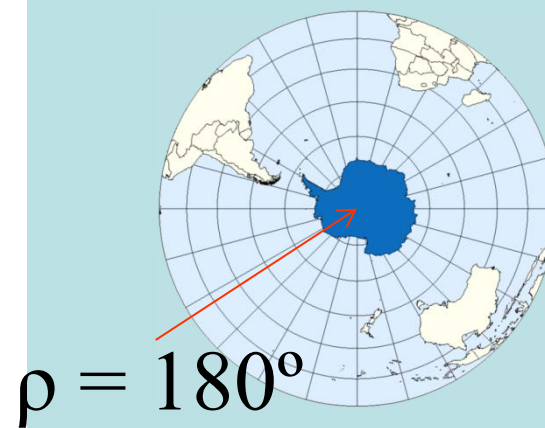


14 декабря 1911 года.

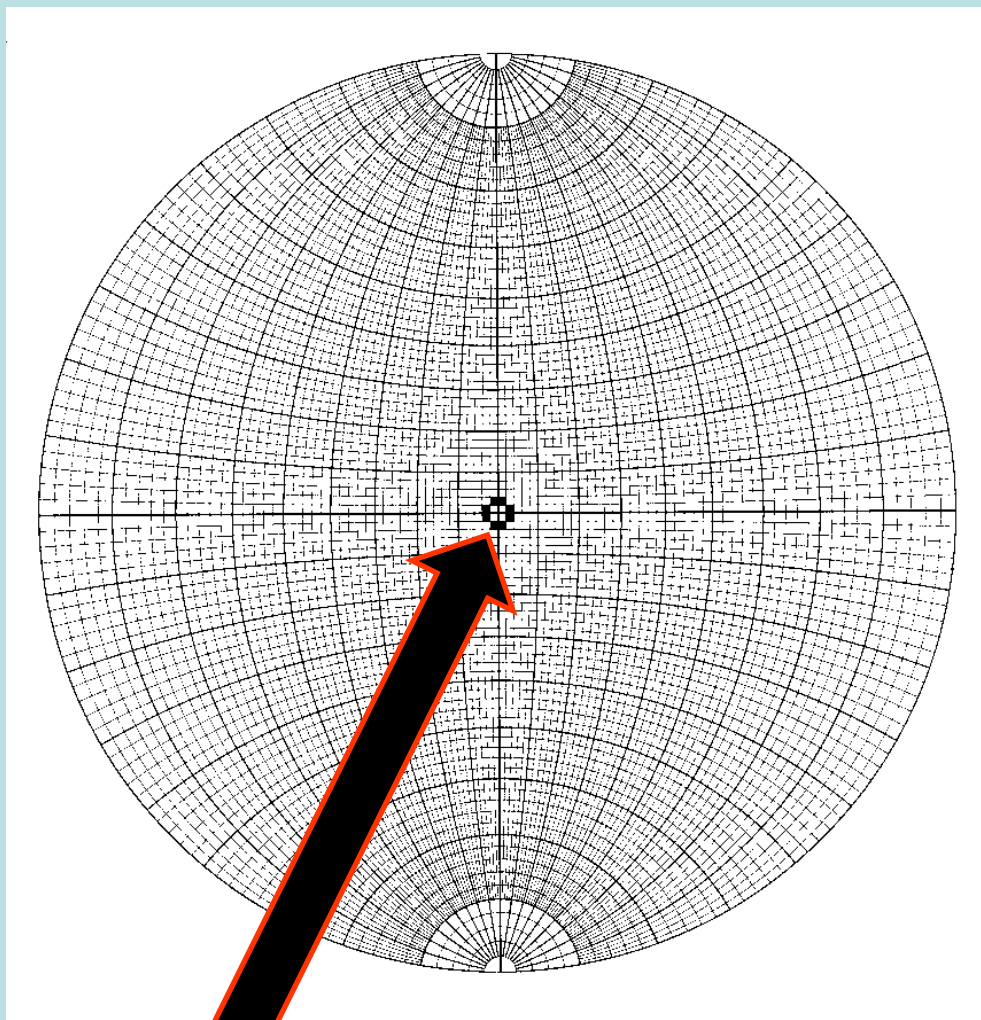
Стереографические проекции элементов симметрии



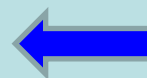
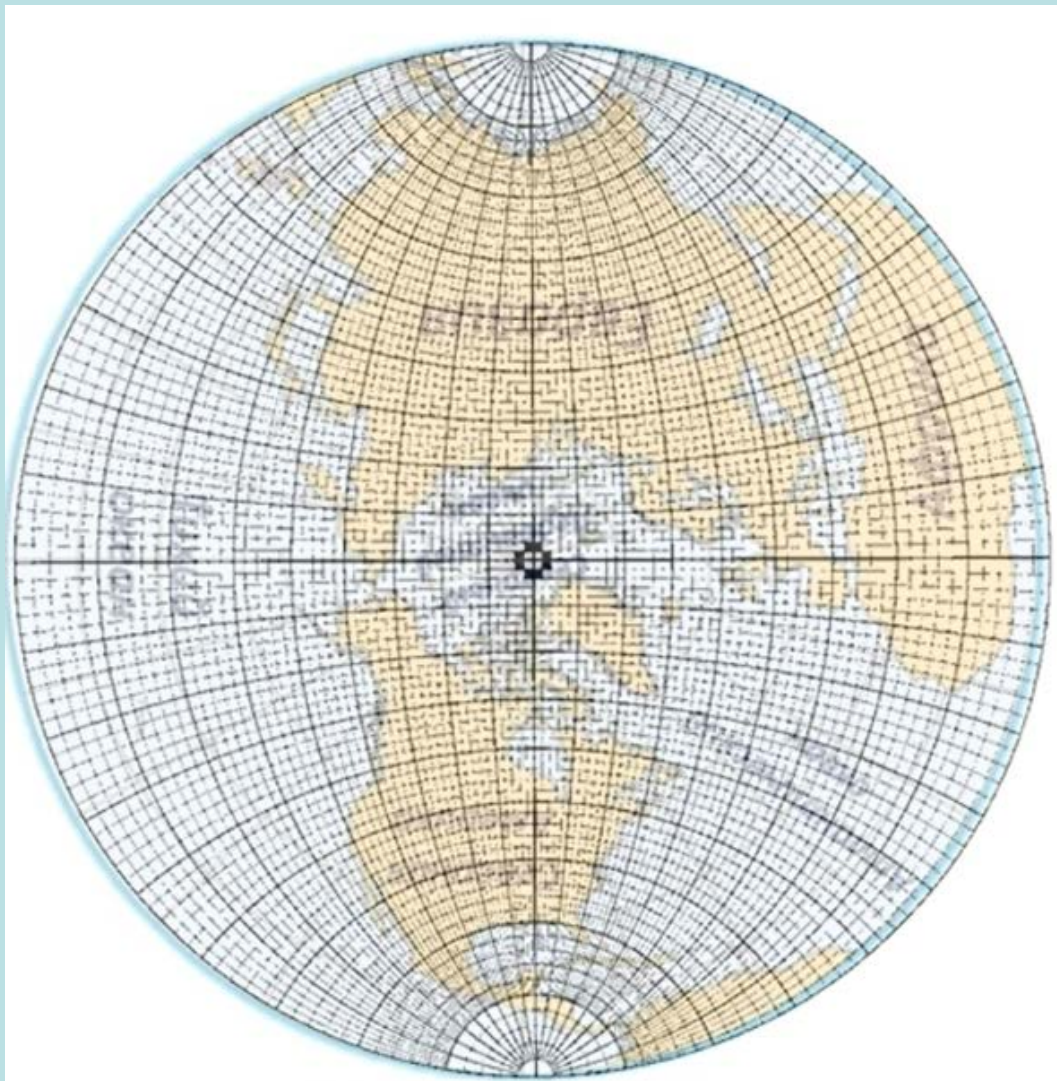
Вид на северный
полюс!



Место севера



Север и юг у нас тут!



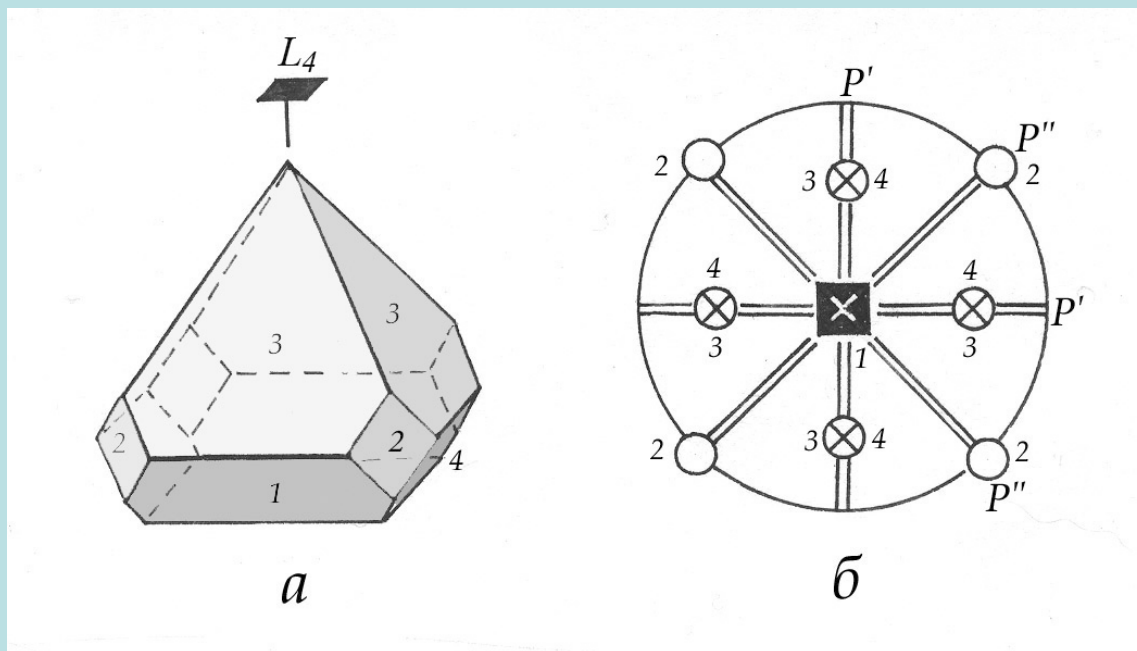
**Если
Гринвич тут
($\phi=0$), то
крутанем
Землю**

Объект	Сферическая проекция	Стереографическая проекция	Гномо- стерео- графическая проекция
Ось симметрии	2 точки – места выхода оси на сфере	Образ на плоскости <u>точка (точки)</u>	дуга большого круга
Плоскость симметрии	Окружность по поверхности сферы	Образ окружности в верхней полусфере <u>(половина дуги – двойная линия)</u>	Точка – нормаль к плоскости
Грань кристалла	Окружность по поверхности сферы. Важно! Поскольку сфера бесконечного радиуса, то все грани проходят через начало координат!	Образ окружности в верхней полусфере (половина дуги – двойная линия)	Точка – нормаль к плоскости <u>(кружок в верхней полусфере или экваторе с $\rho = 90$ в нижней полусфере крестик)</u>

Красным шрифтом – что обычно изображается на чертеже при полном описании кристалла

Гномостереографическая проекция граней

L_4
смотрит
на север

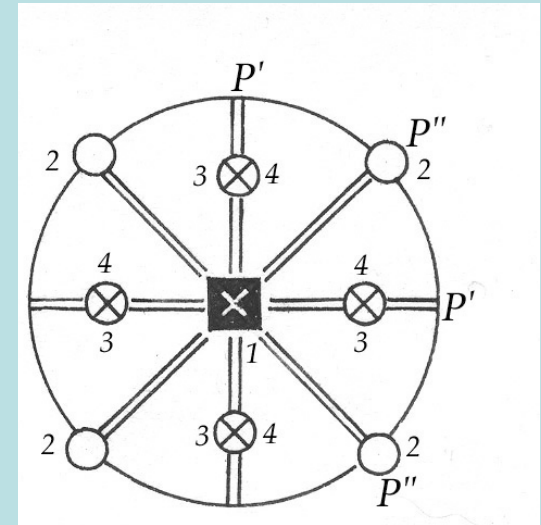


Простая форма – это совокупность (семейство) граней, связанных между собой симметрическими операциями.

Отметим, что грани, принадлежащие одной простой форме, **равны по своим физическим свойствам**. Для идеальных кристаллов они равны также и геометрически - т.е. обладают одинаковой формой и площадью поверхности.

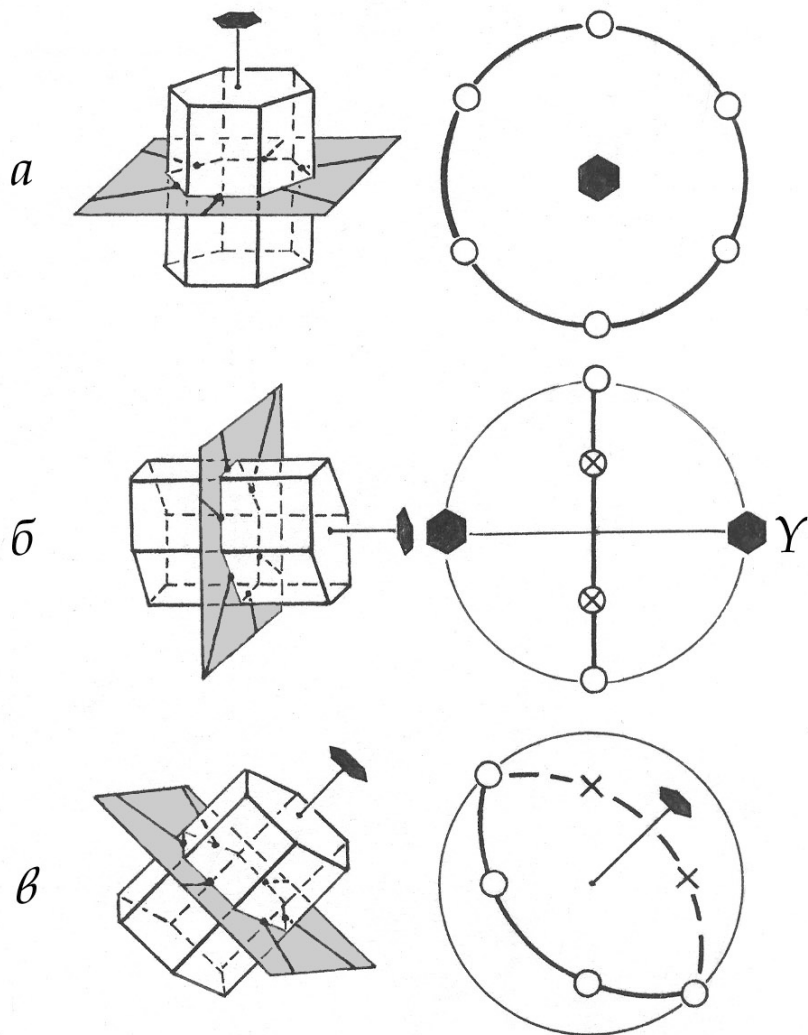
Описание кристалла (пока такое)

- Класс симметрии: $L_42P'2P''$
- Наносим элементы симметрии на чертеж
- Наносим гномостереографические проекции граней и заполняем таблицу с характеристикой простых форм.



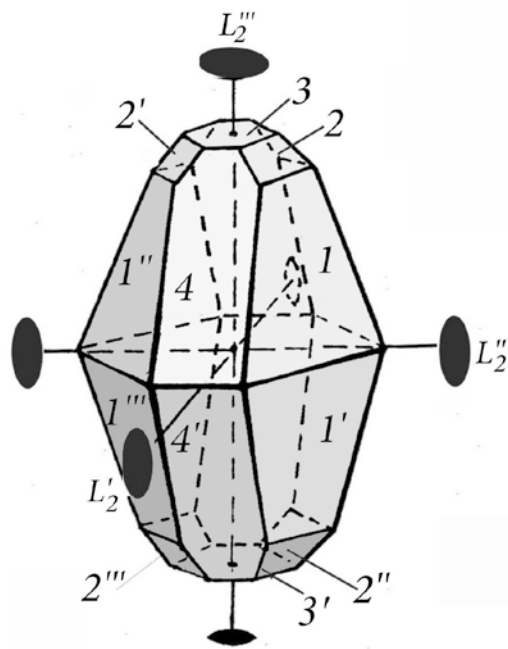
№ на чертеже	Число граней	Откр-закр	Общ - частная
1			
2			
3			
4			

Таутозональные грани - грани, пересекающиеся по параллельным ребрам

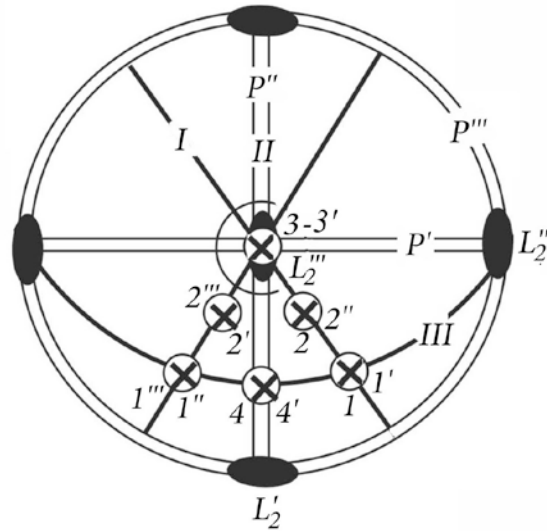


Проецирование таутозональных граней, связанных между собой осью 6-го порядка (L_6) и расположенных на горизонтальной (а), вертикальной (б) наклонной (в) зонах.

При этом в каждом случае осью зоны является ось L_6



a

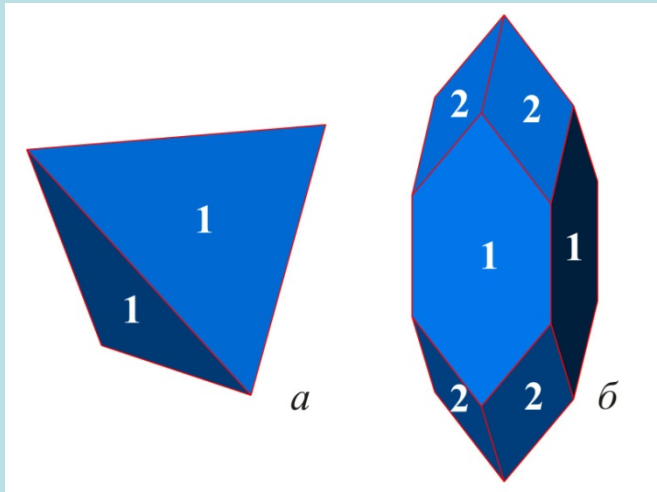


б



Иллюстрация закона зон (поясов) на кристалле ромбической серы (*a*), в котором можно выделить несколько семейств таутозональных граней (т. е. граней, пересекающихся по параллельным ребрам, а следовательно, принадлежащих одной зоне): зона I проходит через грани 3 – 2 – 1 – 1' – 2'' – 3', зона II – содержит грани 3 – 4 – 4' – 3', зона III – грани 1'' – 4 – 1. На стереограмме кристалла (*б*) зоны выделены жирными линиями

Комбинационные многогранники



a – четырехгранный кристалл огранен одной простой формой (тетраэдр);

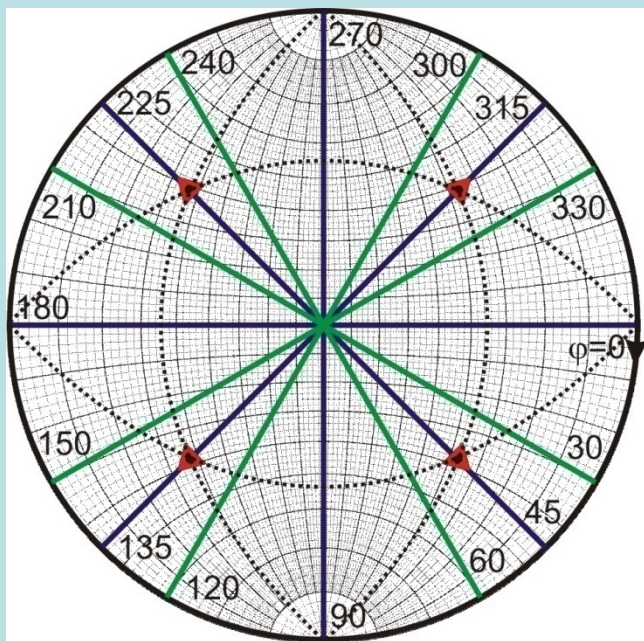
б – двенадцатигранный кристалл огранен двумя простыми формами (четыре грани принадлежат одной простой форме, а восемь других – к другой).

Сколько простых форм может быть в одном кристалле?

Формально – сколько угодно, на практике – не больше десятка, а чаще всего меньше.

Минимальное число простых форм равно одному (если форма закрытая - способна оконтурить собой трехмерное пространство). Чаще в огранке кристалла могут участвовать грани нескольких простых форм, при этом образуются **комбинационные многогранники**.

Трафареты для рисования



<http://cryst.geol.msu.ru/courses/crgraf/trafaret8mm.jpg>

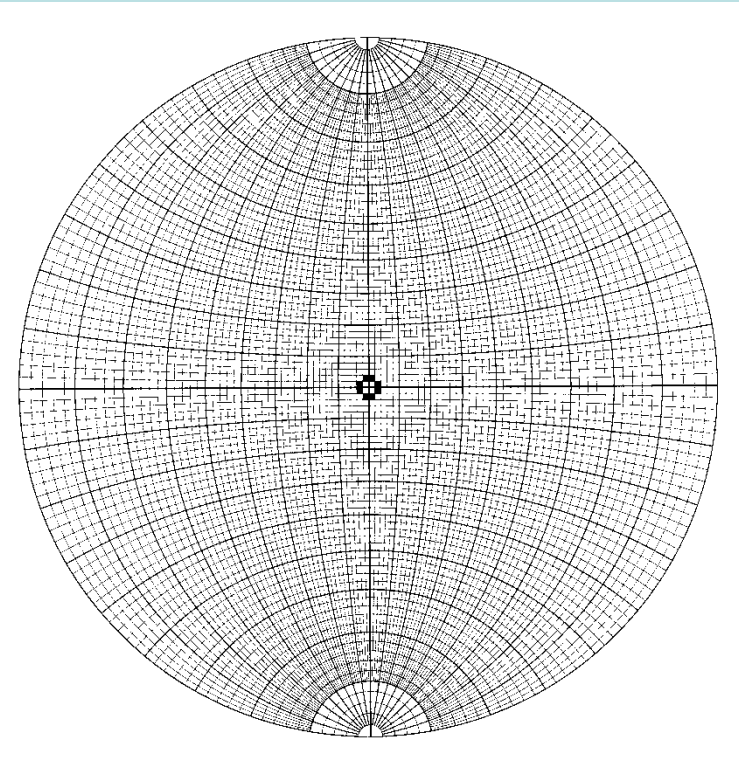
Трафарет необходимо распечатать (удобно распечатать этот трафарет диаметром в 8 см, что позволит нанести на круг все элементы симметрии и положения граней даже для достаточно сложных кристаллов), наклеить на картон и аккуратно вырезать по контуру окружности. В центре желательно иголкой проткнуть отверстие для отметок остро оточенным карандашом. Не мешают отверстия и в четырех красных треугольниках (они пригодятся нам чуть позднее).

Трафареты для рисования

Принято пользоваться сеткой Вульфа диаметром 20 см. В таком разрешении с системой маркированных через 2° меридианов и параллелей погрешность работы будет составлять всего 1° .

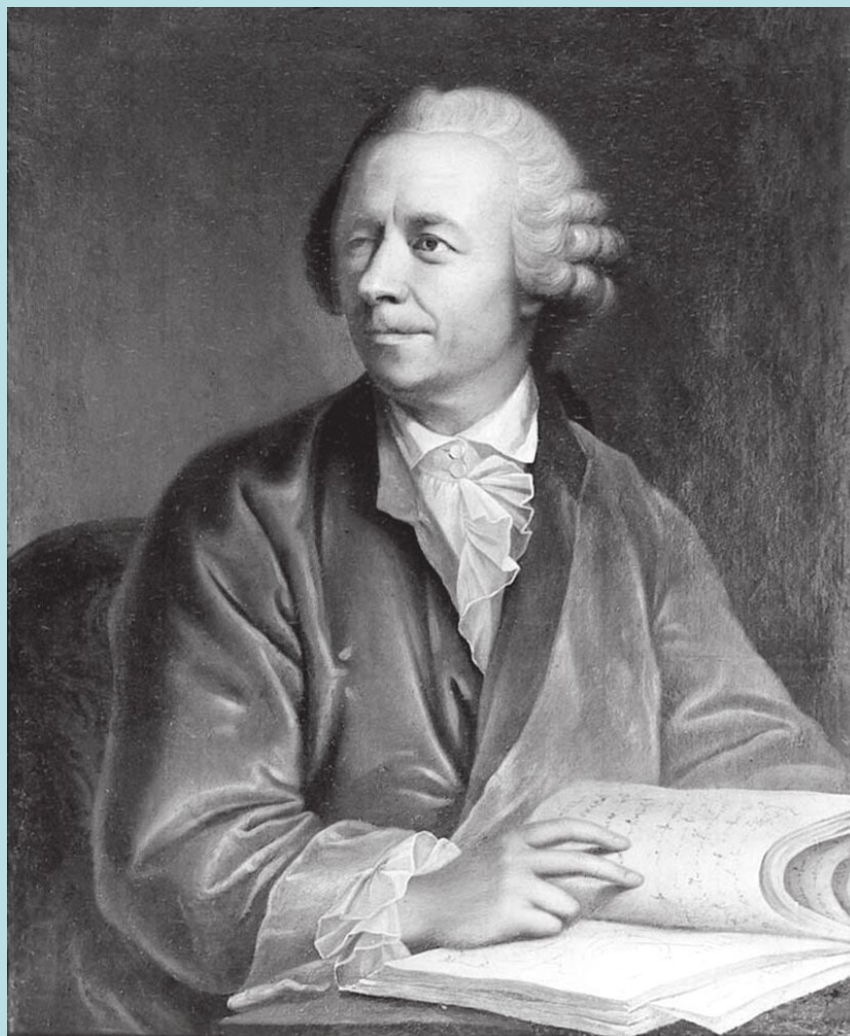
С помощью сетки Вульфа используя сферические координаты φ° и ρ° (результат гониометрических исследований) можно:

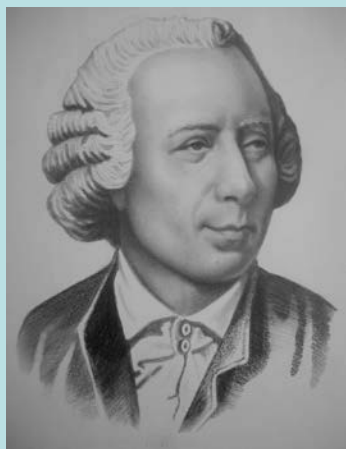
- строить стереограммы кристаллов,
- наносить проекции граней и ребер,
- определять между ними углы
- решать другие задачи (например, рассчитывать расстояния между городами или прокладывать путь в океане).



Теорема Эйлера

**(и ее наглядное доказательство
с помощью машины времени)**





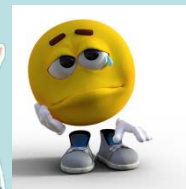
Леонард Эйлер (1707-1783 гг.)

Современный вид сферической тригонометрии придал Эйлер - математик, физик, астроном. Швейцарец по происхождению. Автор более 800 работ, оказавших значительное влияние на развитие науки.

с 1727 г. работал в России (Анна Иоанновна),



с 1741 г. – в Берлине



(а с 1766 г. – опять в России - Екатерина II).



Теория групп (очень кратко)

Полезно
знать

Группой называется множество объектов (G) любой природы с заданной бинарной операцией ($*$), если для любой пары элементов (a и b) этого множества G определен третий результирующий элемент $c = a * b$ того же множества.

При этом группой будет лишь такое множество с заданной бинарной операцией, для которого выполняются следующие условия:

1) ассоциативности : $(a * b) * c = a * (b * c)$

2) существования единичного члена (e) - такого единичного элемента, что для любого элемента группы будет выполняться равенство $e * a = a * e = a$

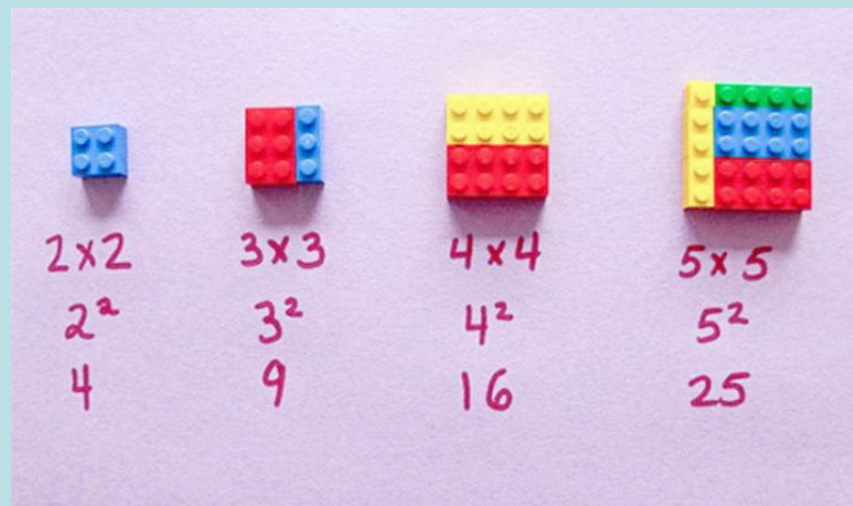
3) обратимости – для любого элемента a существует элемент a^{-1} из того же множества, называемый обратным элементом к элементу a , такой, что $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.



Главной особенностью симметрических операций является то, что полная их совокупность для любого объекта *всегда образует группу*.

Это позволяет теорию симметрии кристаллов рассматривать как раздел математической теории множеств и **использовать математический аппарат теории абстрактных групп** при изучении законов симметрии кристаллов, придавая им конкретное геометрическое или физическое содержание.

И наоборот:
позволяет понять математические абстракции



с использованием живых
кристаллографических примеров

Итак, мы живем в мире волшебных и обычных осей, осуществляющих операцию поворота. При этом объект наблюдения, допустим, точка выхода на сферу линии нормали к грани совершает некоторое путешествие по сфере проекций из точки 1 в точку 2 вокруг некоторой воображаемой оси, проходящей через начало координат.

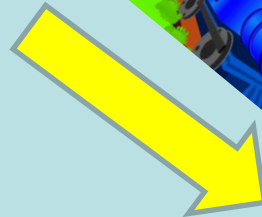
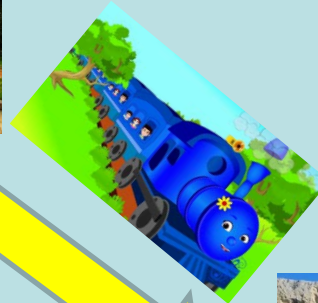
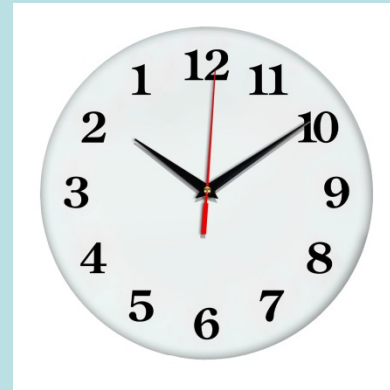


Для наглядности сядем в машину времени, перенесемся на 20 месяцев вперед и давайте ощутим себя студентами геохимиками второго курса геологического факультета МГУ. Мы сдали (на отлично) 3-юю весеннюю сессию и отправляемся на геологическую практику из Москвы в Симферополь

Москва



ИЮНЬ



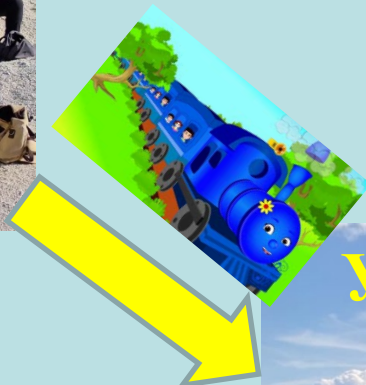
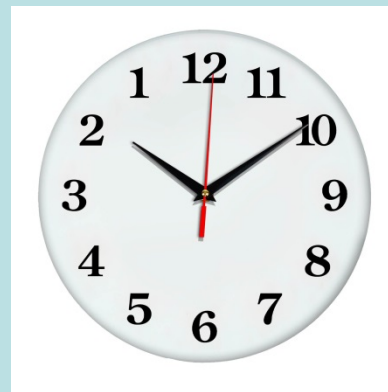
Крым



Крым



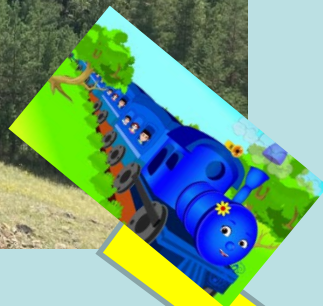
ИЮЛЬ



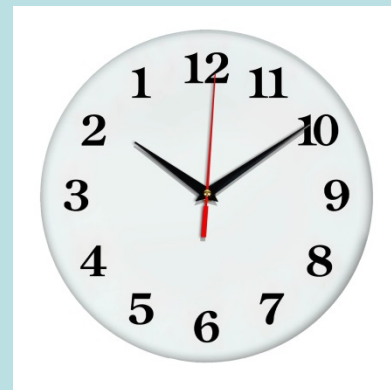
Урал



Урал



АВГУСТ



Москва





Стрелками показано перемещение студентов при последовательном вращении вокруг пересекающихся в центре Земли поворотных осей симметрии. А, В и С – путь по поверхности Земли:

А – Москва - Симферополь,
В – Симферополь - Миасс,
С – Миасс – Москва.

Сформулируем это в виде правила:

две операции симметрии (А и В), встретившись вместе, всегда порождают третью (С).

При этом они равноправны: А и С порождают В, В и С → А.

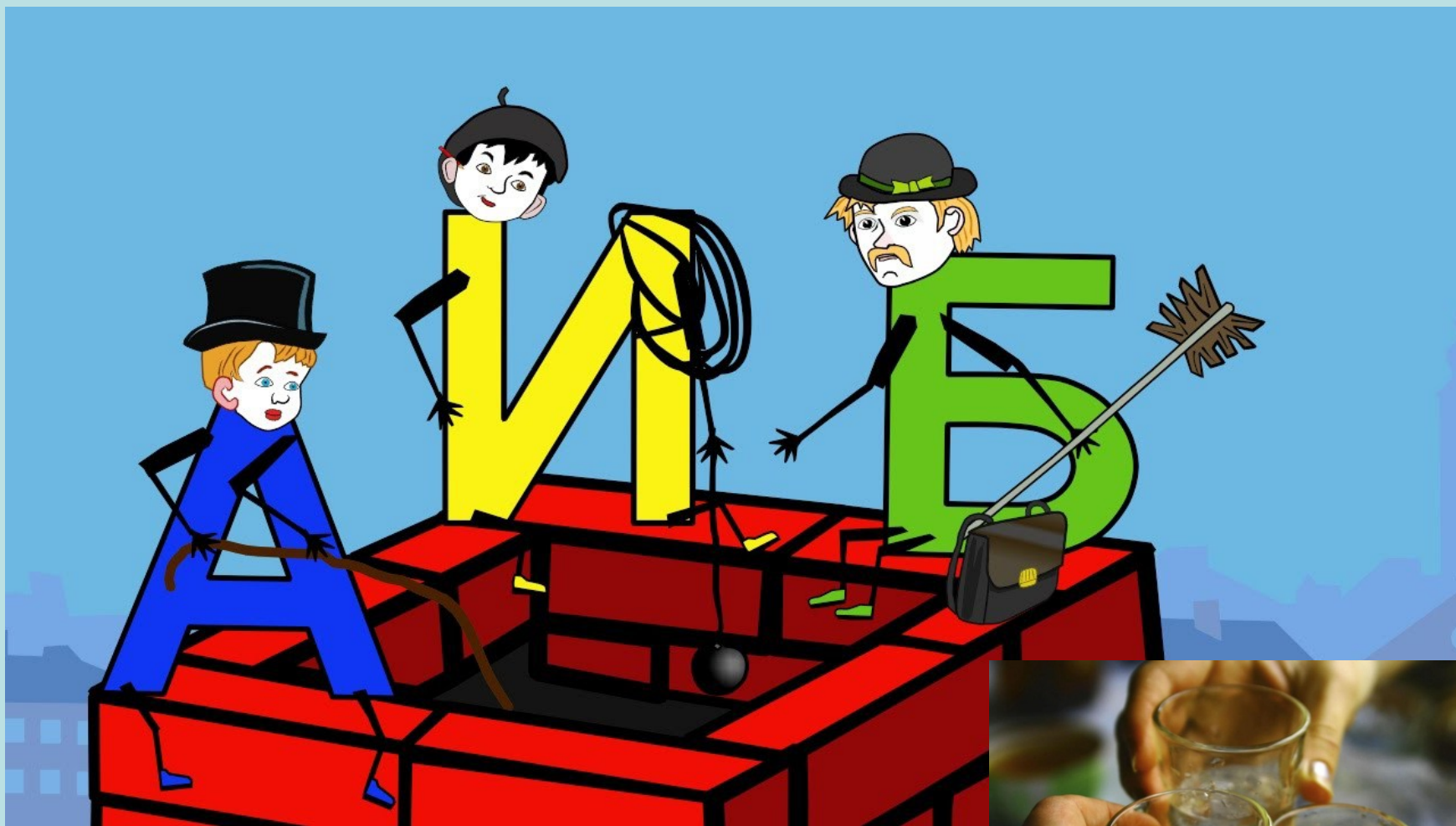
Более того, $A+B+C=1$ (возникает операция идентичности: студенты изначально были в Москве, в ней в итоге и оказались, правда, уже в августе).

Осевая теорема Эйлера

*Взаимодействие двух осей симметрии
n-го порядка,
поворотных или **инверсионных**,
приводит к возникновению проходящей
через точку их пересечения третьей оси
симметрии.*

*При этом результирующая ось окажется
поворотной, если исходными будут
две однотипные оси
(обе поворотные или обе инверсионные),
и **инверсионной**, если исходные оси будут
разного типа.*

Графические интерпретации

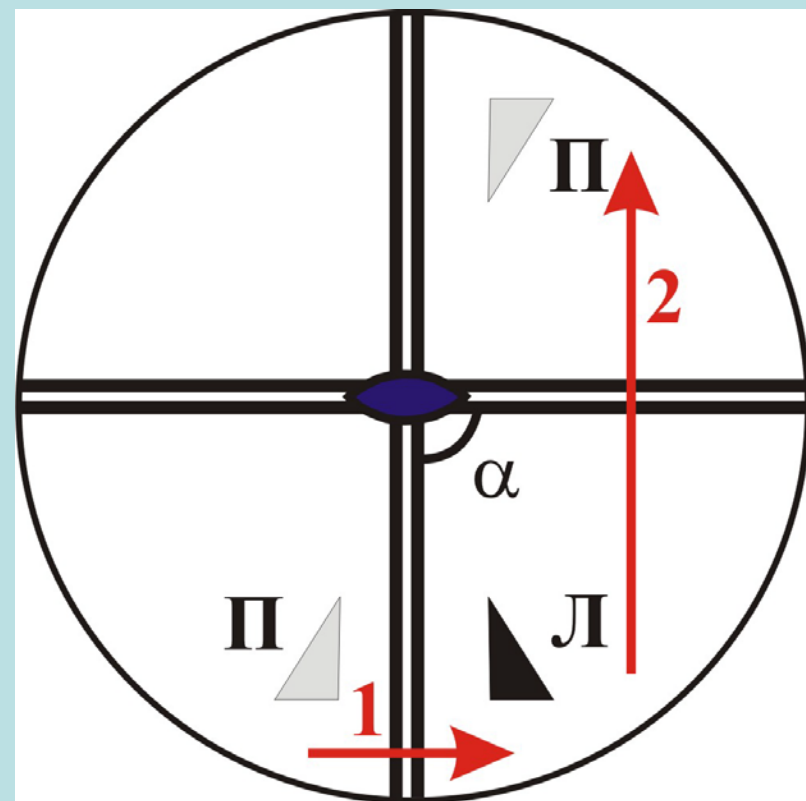


*Ладно, вроде ясно что появится третья ось.
А где ее искать???*



Частные случаи

Случай 1. ($A = P$, $B = P$). Две плоскости пересекаются под определенным углом, например 90 градусов.

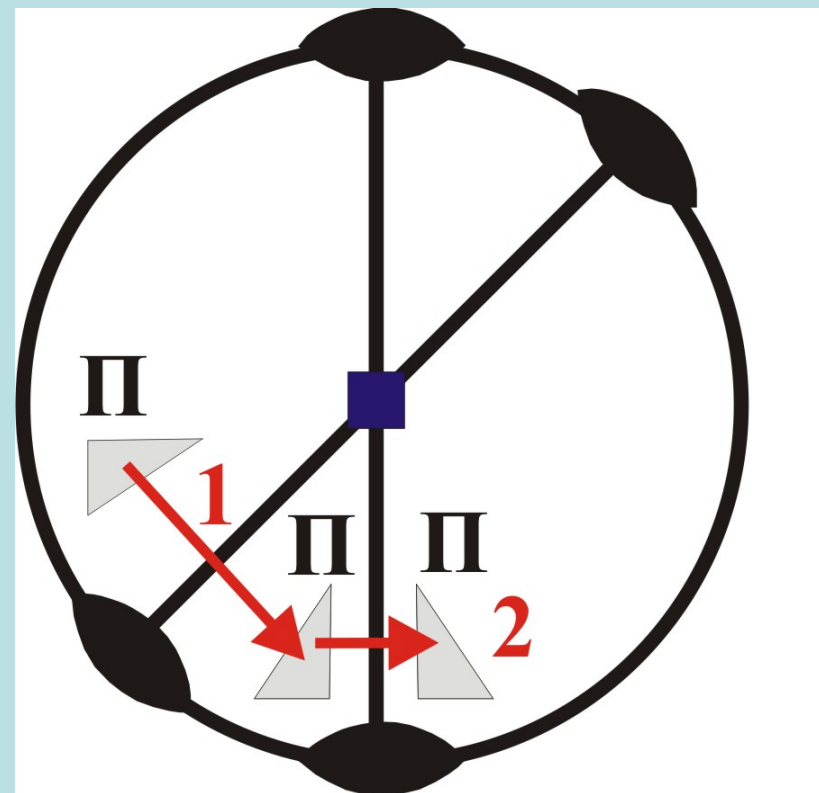


Если рассмотреть этот пример **в общем виде**, то получится следующее правило:

*Если встречаются под углом α две **инверсионные** оси 2 порядка, то результатом их взаимодействия будет **поворотная** ось порядка $360/2\alpha$.*

Частные случаи

Случай 2. ($A = L_2$, $B = L_2$). Две оси второго порядка пересекаются под определенным углом, например, 45°

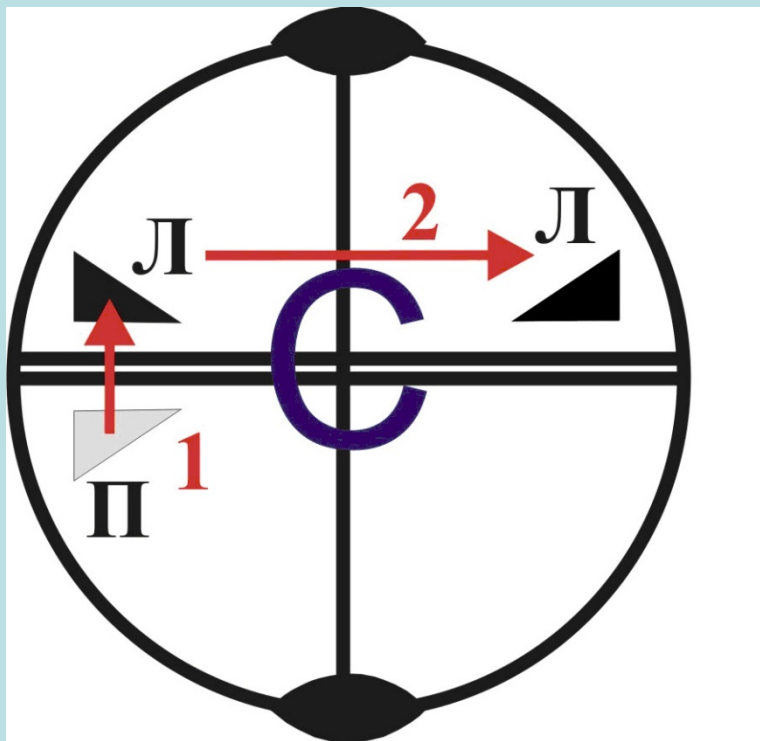


Если рассмотреть этот пример в **общем виде**, то получится следующее правило:

*Если встречаются под углом α две **поворотные** оси второго порядка, то результатом их взаимодействия будет **поворотная ось порядка $360/2\alpha$** .*

Частные случаи

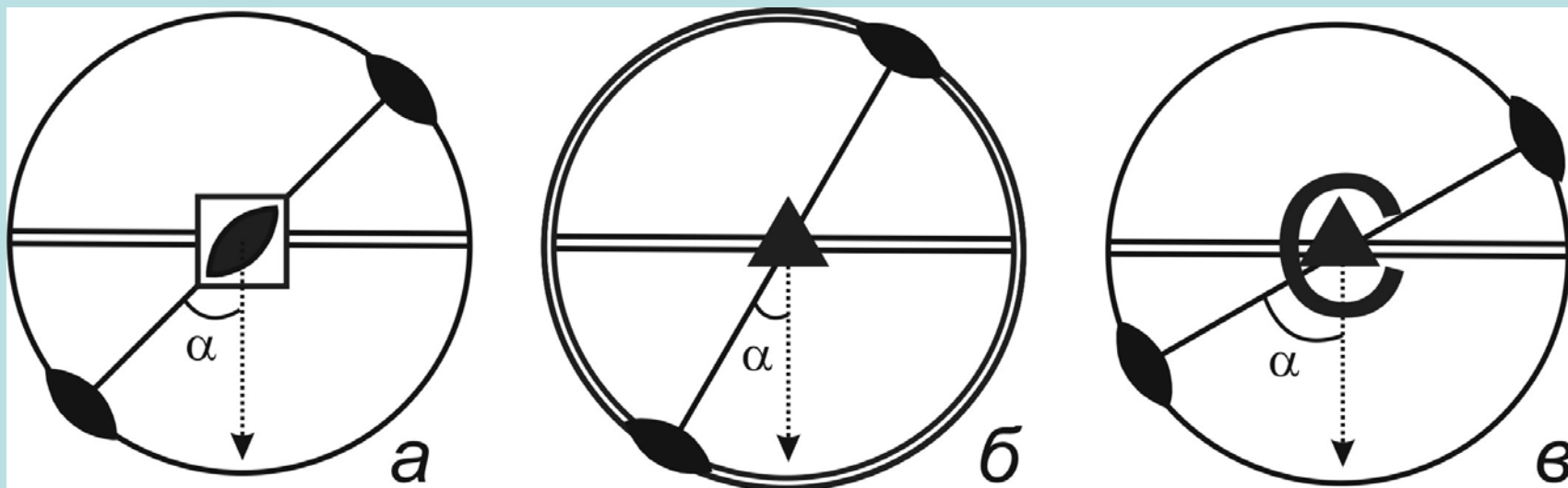
Случай 3. ($A = P$, $B = L_2$)



Операция отражения в зеркальной плоскости с последующим поворотом вокруг вертикальной оси 2-го порядка, перпендикулярной этой плоскости, приводит к появлению нового элемента симметрии – центра инверсии $C = \langle C \rangle$.

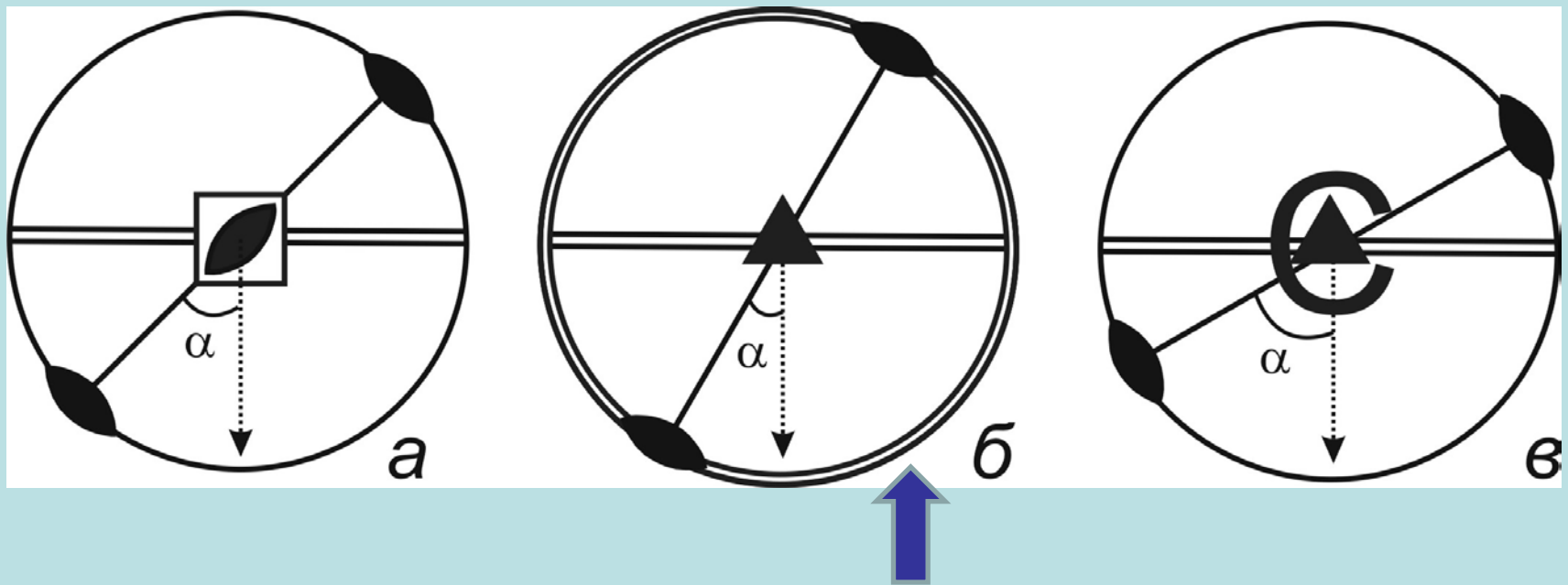
Это сочетание (L_2 - P - C) очень важно и часто встречается в кристаллах. Обратим внимание, что **при наличии центра и плоскости возникнет ось второго порядка**, а **при наличии центра и оси второго порядка – плоскость**. А если рассмотреть этот пример в общем виде?

Если встречаются под углом α поворотная и инверсионная ось второго порядка, то результатом их взаимодействия будет инверсионная ось порядка $360/2\alpha$.



В результате взаимодействия инверсионной и поворотной оси

- а) под 45 градусов возникнет инверсионная 4-ого
- под 30 градусов инверсионная 6-ого ($= L_3P$)
- под 60 градусов инверсионная 3-его ($= L_3C$)



В устаревших учебниках по кристаллографии для обозначения инверсионной оси 6-го порядка (либо зеркально-поворотной 3-его) использовали особый графический знак -

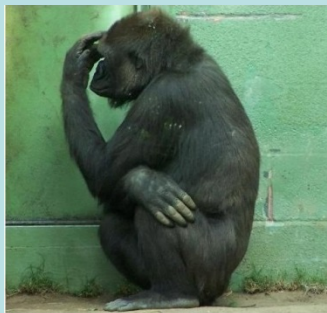


Но так как эти оси можно заменить простыми элементами симметрии – L_3 и P , имеющими на графиках свои условные обозначения, этот знак в настоящее время использовать не принято так как он

фактически дублирует обозначения простых элементов.

В следующий раз

Некоторые основы сферической тригонометрии. Вывод классов симметрии



! Материал трудно-думательный, готовьтесь
слегка думать и воображать в уме

Я улетаю на неделю на Камчатку



Лекцию прочтет Татьяна Александровна

