

ЛЕКЦИЯ 3

*Немного о
сферической тригонометрии.*

Вывод классов симметрии

А также: *некоторые кристаллографические аспекты войны
1854-1855г. (применительно к кампании на Белом море)*

Работая с кристаллами, исследователи обратили внимание на то, что элементы симметрии располагаются в них не случайно, закономерным образом.



Полный набор элементов симметрии строго определенным образом располагающихся по отношению друг к другу называется классом симметрии.

Можно убедиться в том, что сочетания симметрических операций (а, следовательно и элементов симметрии) не случайны, а образуют группы симметрии *с конечным числом членов*.

Число классов симметрии бесконечно (узнаем позже), но в кристаллах, где могут существовать только оси определенных целочисленных порядков, число классов закономерно сокращается до **32**.



Мориц Людвиг
Франкенгейм
(1801 – 1869)

*В 1826 г. немецкий физик, географ и
кристаллограф
М. Л. Франкенгейм
вывел 32 класса симметрии .*



Иоганн Фридрих
Христиан Гессель
(1796 – 1872)

*В 1830 г. немецкий минералог и
кристаллограф
И. Ф. Х. Гессель вывел 32
класса симметрии*

**Однако их работы были
недопоняты и забыты!**



И лишь в 1867 г.

Аксель Вильгельмович Гадолин
дал строгий математический

ВЫВОД

32 групп симметрии.

В 1868 Санкт-Петербургская Академия наук присудила ему за это Ломоносовскую премию).



Святи Его Величества генерал-майоръ
АКСЕЛЬ ВИЛЬГЕЛЬМОВИЧЪ
ГАДОЛИНЪ.

Съ фотографіи
Захарина.

Собственность
А. А. Гадолина.

1828-1892 гг.

Его награды: (Российской империи):

Орден Святого Георгия 4-й степени (1871) Орден Святой Анны 3-й степени (1859)

Орден Святого Владимира 4-й степени (1862) Орден Святой Анны 2-й степени (1864)

Орден Святого Владимира 3-й степени (1868) Орден Святого Станислава (Российская империя) 1-й степени (1870) Орден Святой Анны 1-й степени (1872)

Орден Святого Владимира 2-й степени (1875) Орден Белого орла (Российская империя) (1879) Орден Святого Александра Невского (1884)

+

Французский Орден Почетного Легиона командорский крест (1867)

Шведский Орден Меча Большой крест (1885)

Аксель Вильгельмович Гадолин

- дал точный и ясный вывод 32 классов симметрии, проанализировав возможные сочетания элементов симметрии;
- доказал при помощи теоремы Эйлера для выпуклых многогранников, что в кристаллах невозможны оси пятого и выше шестого порядков;
- применил метод стереографической проекции, наглядно представляющий элементы симметрии;
- ввел понятие инверсионной оси, что позволило учесть не только обычные оси симметрии, но и комбинации поворота с отражением в плоскости или в точке.

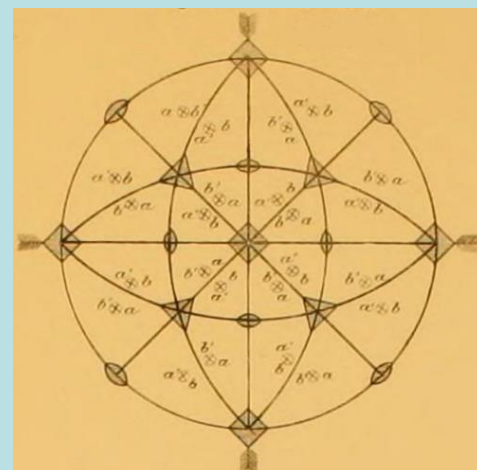


Святи Его Величества генералъ-маіоръ
АКСЕЛЬ ВІЛЬГЕЛЬМОВИЧЪ
ГАДОЛИНЪ.

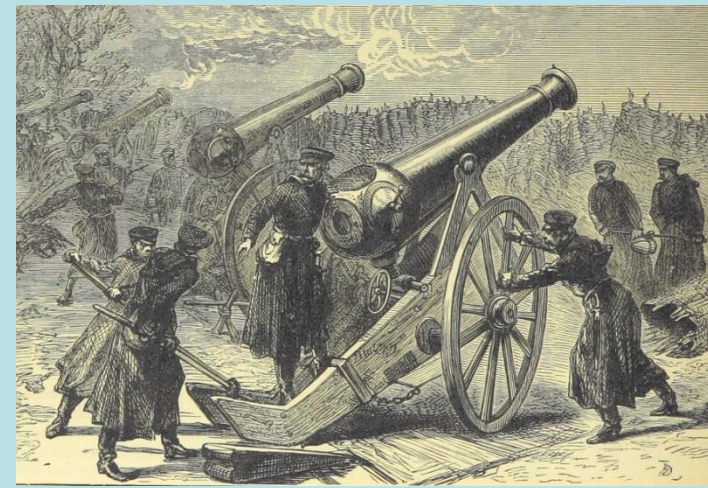
Съ фотографіи
Захарина.

Собственность
А. А. Гадолина.

1828-1892 гг.



Основные достижения в металлургии



- **«Закон А. В. Гадолина о наивыгоднейших радиусах скреплённого ствола».** Суть его метода заключалась в том, что на ствол орудия в горячем состоянии надевали цилиндры. При охлаждении они сжимали внутренние слои металла, что значительно повышало прочность ствола. Такие орудия, названные **«скреплёнными»**, выдерживали гораздо более высокое давление пороховых газов. Это позволило увеличить мощность и дальность орудий без существенного увеличения их веса.
- **Усовершенствование технологии производства орудий.** С 1877 года на основе его работ проектировалась русская крупнокалиберная артиллерия.
- **Исследования в области механического испытания материалов.**
- **Работы в сфере чугунолитейного производства.** В 1874 году Гадолин опубликовал курс лекций **«Чугунолитейное производство»**, в котором систематизировал все этапы работы с чугуном: от получения литейного чугуна и изготовления моделей до формовки, отливки и окончательной отделки изделий.
- **Внедрение новых технологий на производстве.** Гадолин осуществил переход от казённого труда к вольнонаёмным рабочим и оснастил арсеналы паровыми машинами



Домашняя Цензурою Моск. 17 Февраля 1863 г.

Изгн. из Литограф. Е. Локмесса. литограф. части 2. Издано в Д. Искитовой.

НАПАДЕНІЕ АНГЛИЧАНЪ НА СТАВРОПИГІАЛЬНЫЙ СОЛОВЕЦКІЙ МОНАСТЫРЬ.

1854 г. Июля 6^{го} дня въ 8^{мъ} часу до полудня, два Ангійскія парахода, подождя къ монастырю стали на якорь, тотчасъ настоятель монастыря, Александръ по отслуженіи молебна, здѣлавъ крестный ходъ во кругъ монастыря по стѣнѣ ограды, сказалъ увѣщаніе некимъ чинамъ и живущимъ въ монастырь, стать храбро за вѣру и Св. обитель, на другой день непріятель открылъ канонаду продолжавшуюся 9^½ часовъ, ядрами, бомбами, гранатами, картечью и калеными ядрами съ нашей стороны отъ стрѣлялись 6^{мъ} пушками съ ограды монастыря, и Артиллерійскими 2^{мъ} орудіями съ батареи, где не пріятель, на причинивъ никакого вреда съ стыдомъ отплылъ назадъ.

В 1854 г. у Соловков появляются английские пароходофрегаты «Бриск» и «Миранда». Происходит перестрелка с англичанами в гавани Благополучия и обстрел Соловецкого монастыря.

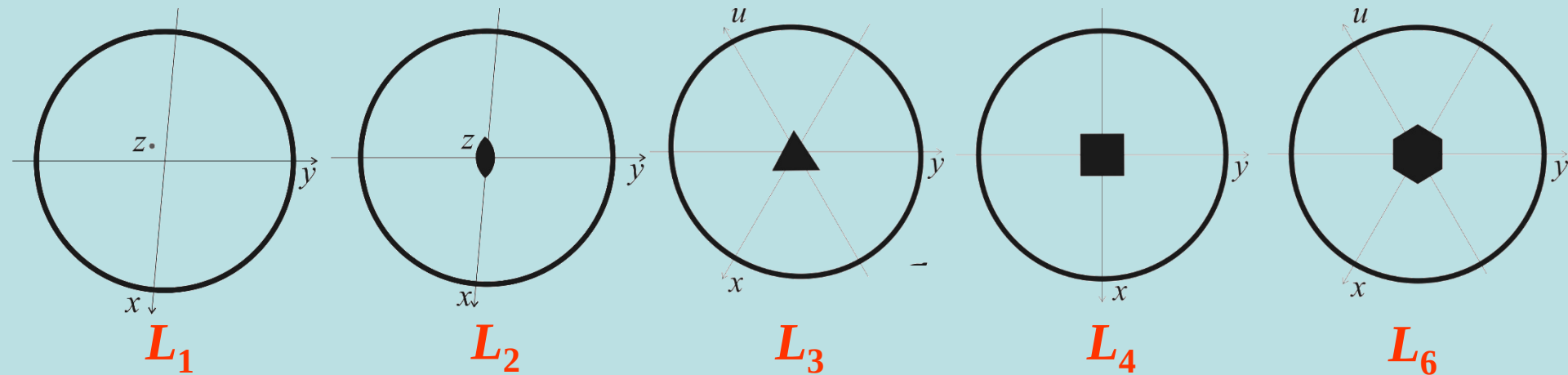


В июне 1855 г. корабли англичан снова появляются у монастыря. Рандеву состоялось 22 июня на нейтральной полосе. Тема переговоров была одна: английский офицер требовал волов. Соловецкий настоятель отвечал, что коров они отдать не могут, так как они кормят молоком монахов. Английский офицер пробовал припугнуть собеседника. Он говорил: "Мы отсюда поплывем, а через три недели явится здесь сильный флот, где будет наш главный начальник на таком корабле, что вы от одного взгляда будете страшиться, вы должны к нему с белым флагом прибыть... ". Не подействовало и это средство. Уполномоченный настоятель непоколебимо стоял на своем, заявив, **что коров не даст (и не дал).**

Вывод групп (классов) симметрии в символике Браве

За основу вывода можно взять все возможные в кристаллах поворотные оси симметрии.

В результате получим 5 исходных классов L_n

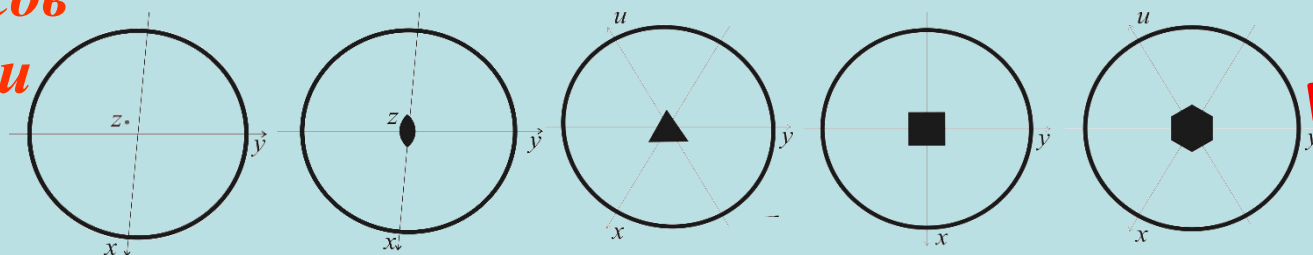


ИТОГО 5

Дальнейший вывод осуществляется добавлением других элементов симметрии таким образом, что первоначальная ось остается **единственной**.

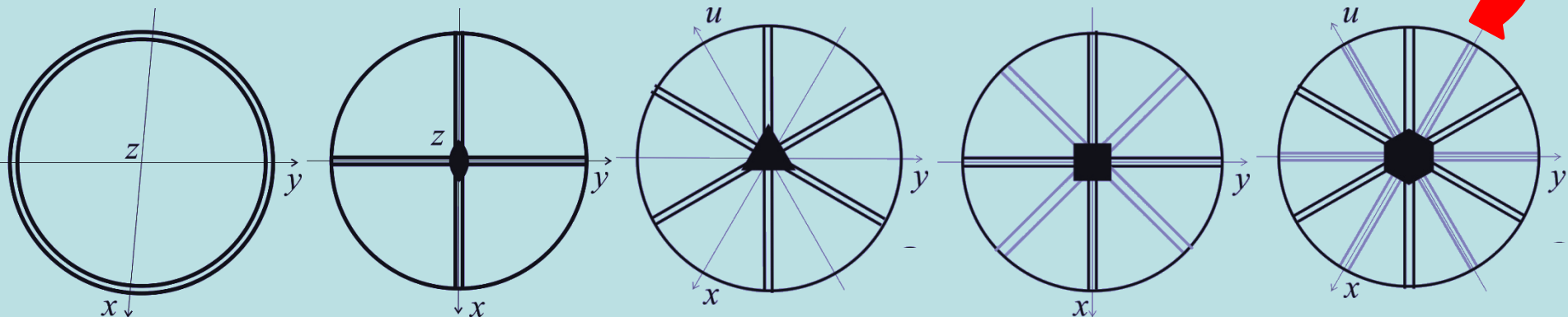
Это возможно только если добавляются только *низшие* оси в *перпендикулярном* либо *параллельном* положении

Вывод классов симметрии



Добавляем к этим 5 классам **вертикальную** зеркальную плоскость симметрии, проходящую вдоль каждой из осей (P_v). Получаем еще 5 оригинальных классов

$P_{||}$



$L_1 \rightarrow P$

$L_2 \rightarrow L_2 2P$

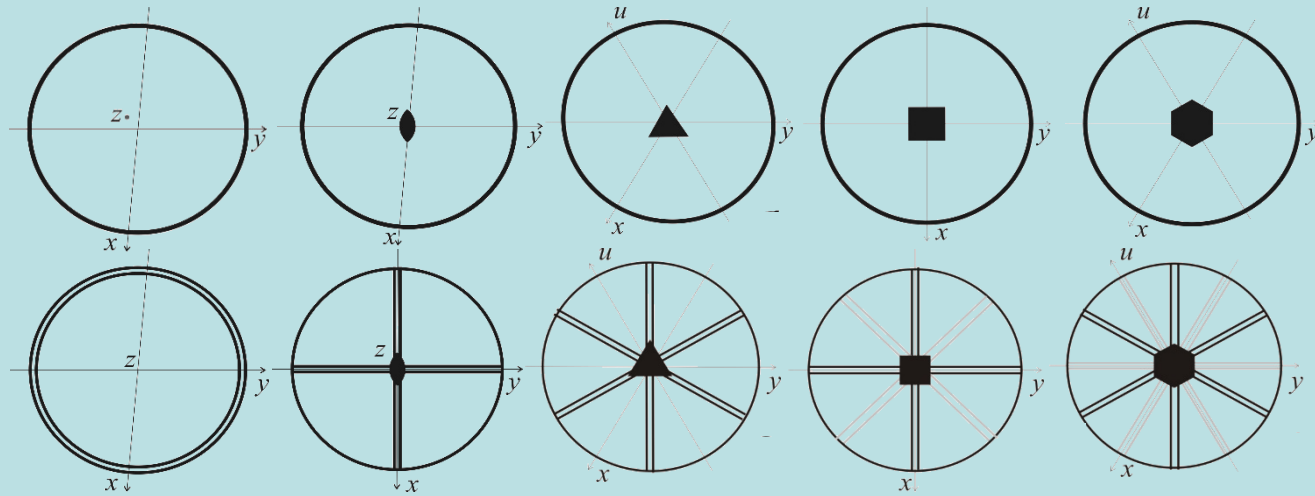
$L_3 \rightarrow L_3 3P$

$L_4 \rightarrow L_4 2P 2$

$L_6 \rightarrow L_6 6P$

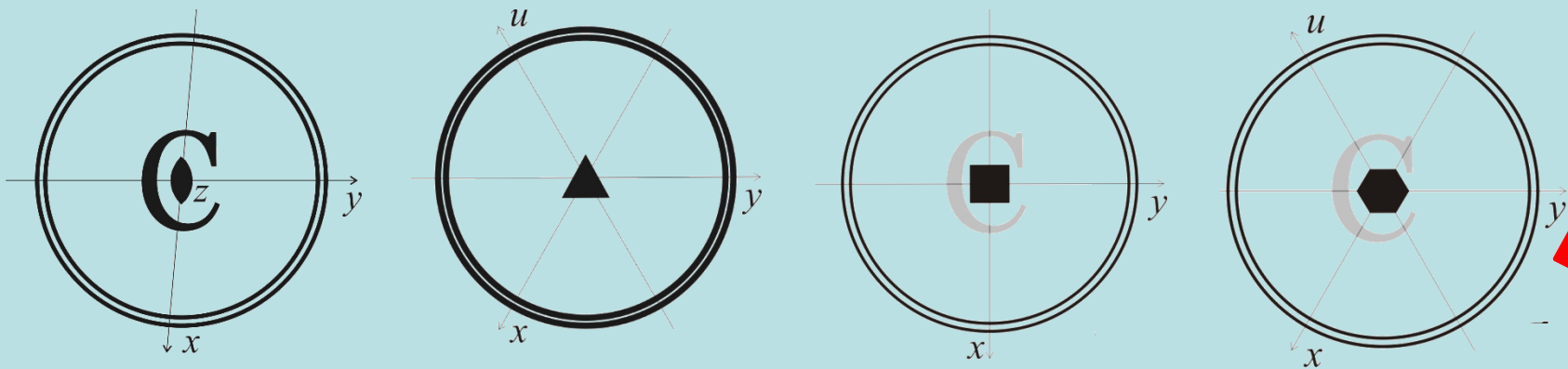
ИТОГО 5 + 5 = 10

Вывод классов симметрии



+ $P_{\perp}$

Добавляем горизонтальную зеркальную плоскость симметрии, перпендикулярную оси (P_h)



L_2PC

$L_6 = L_3P$

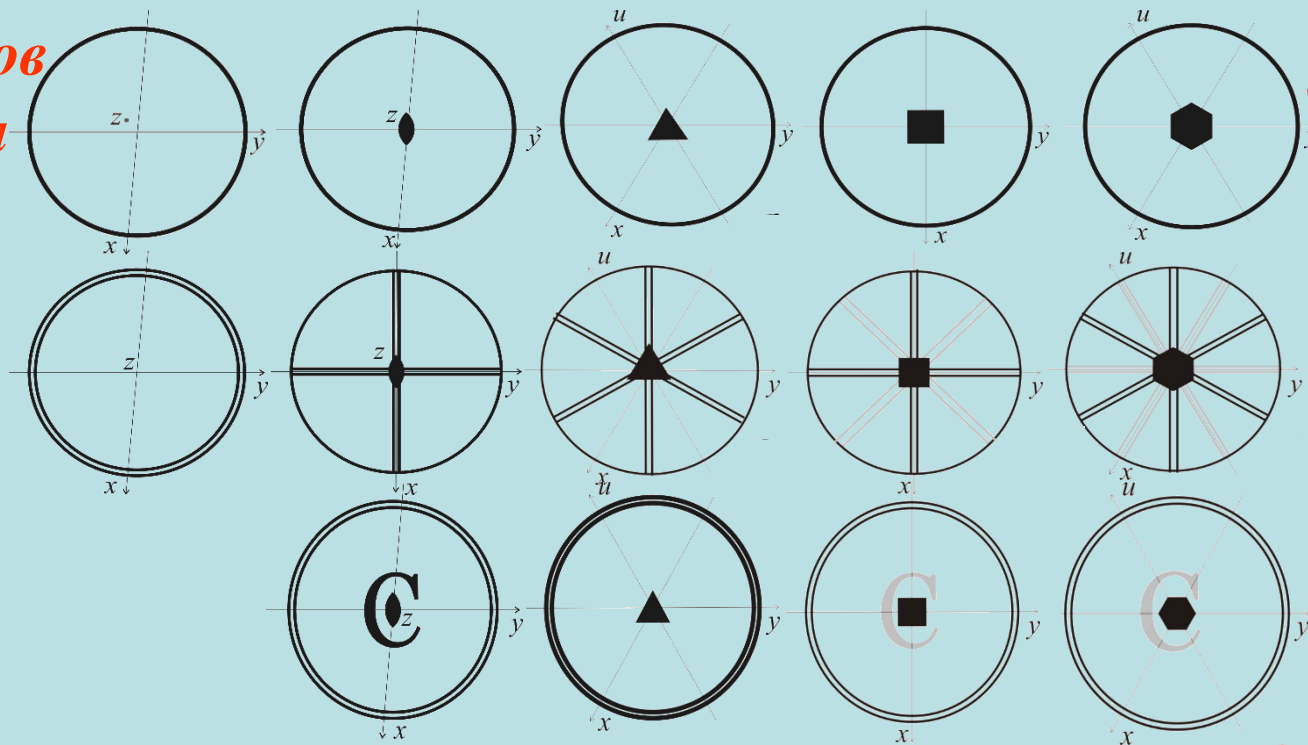
L_4PC

L_6PC

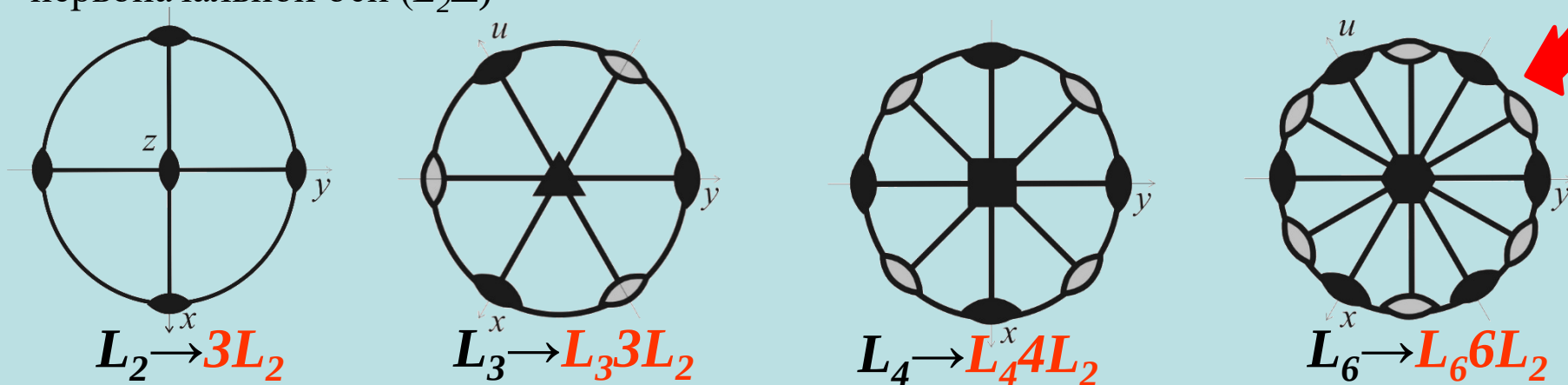
Добавляя горизонтальную зеркальную плоскость симметрии к оси L_1 , оригинального класса не получим

ИТОГО 10 + 4 = 14

Вывод классов симметрии



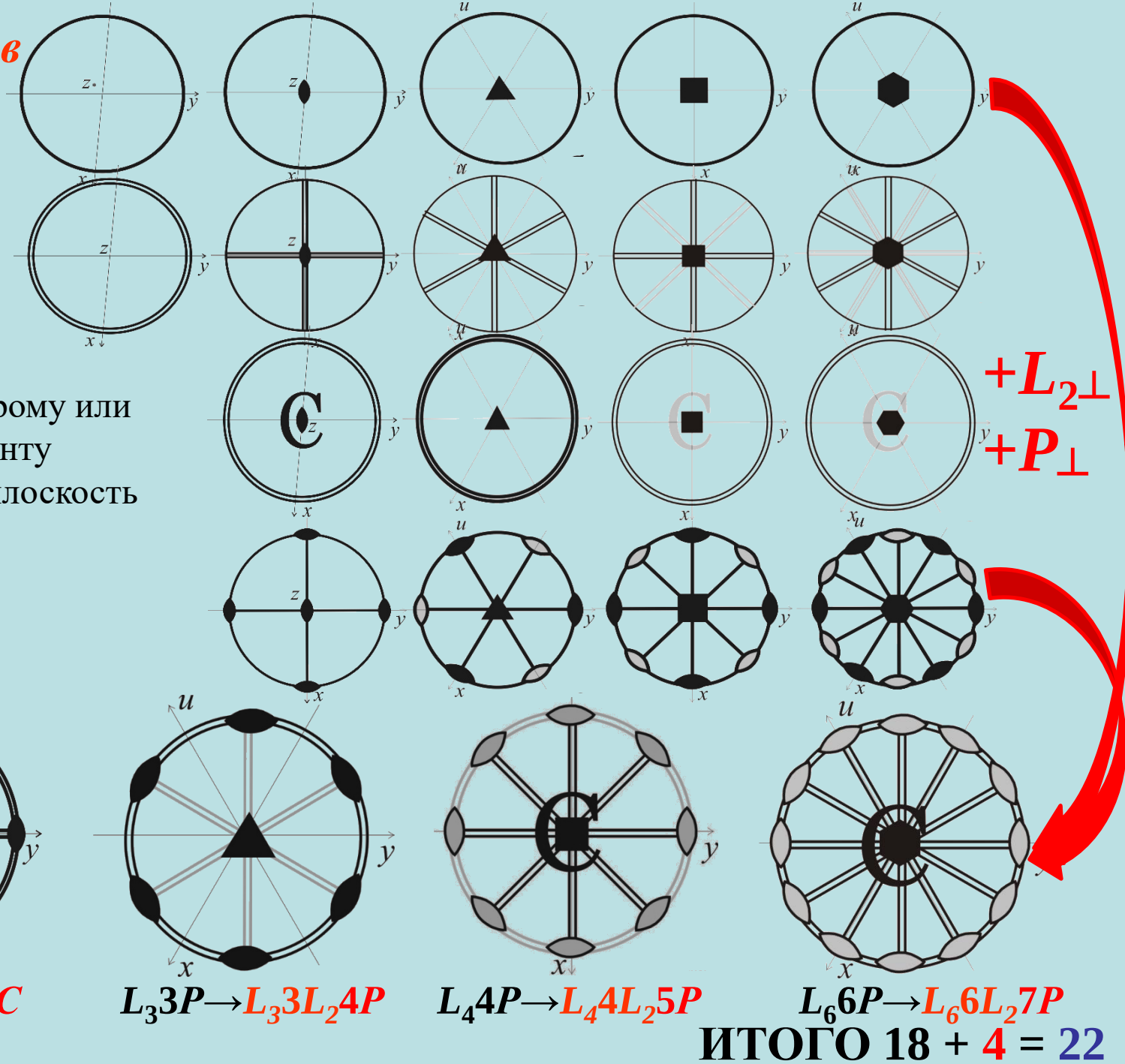
Добавляем горизонтальную ось симметрии 2-го порядка, перпендикулярную первоначальной оси ($L_2 \perp$)



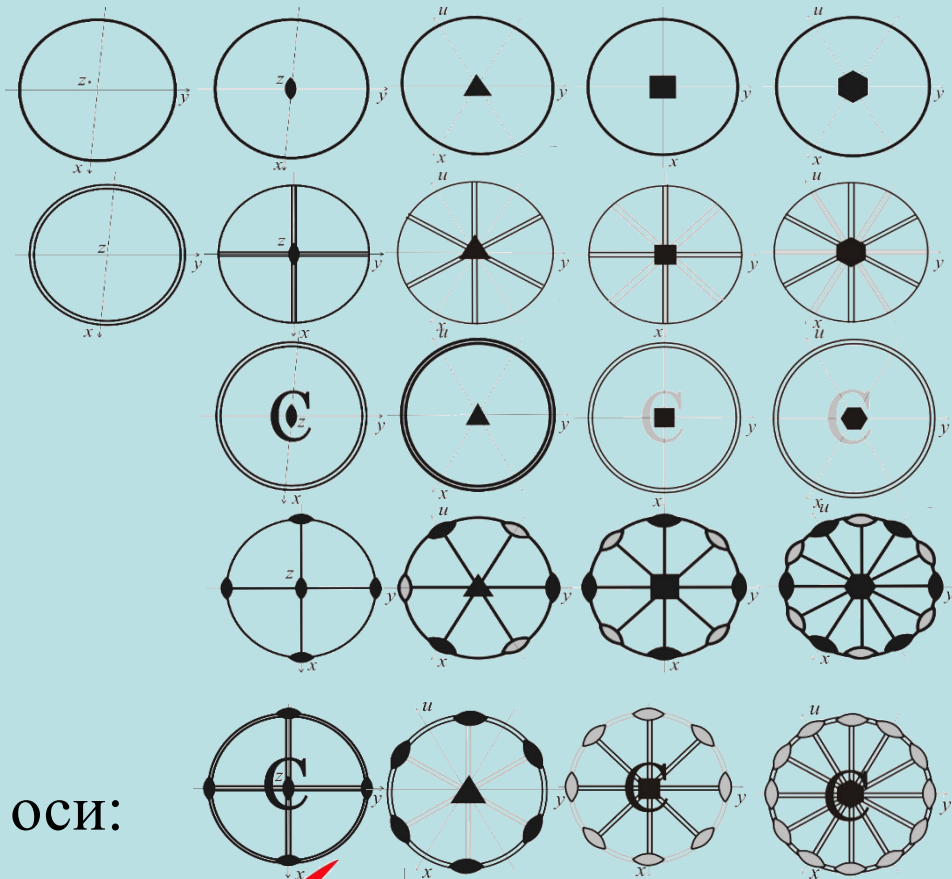
Добавляя $L_2 \perp$ к оси L_1 , оригинального класса не получим **ИТОГО** $14 + 4 = 18$

Вывод классов симметрии

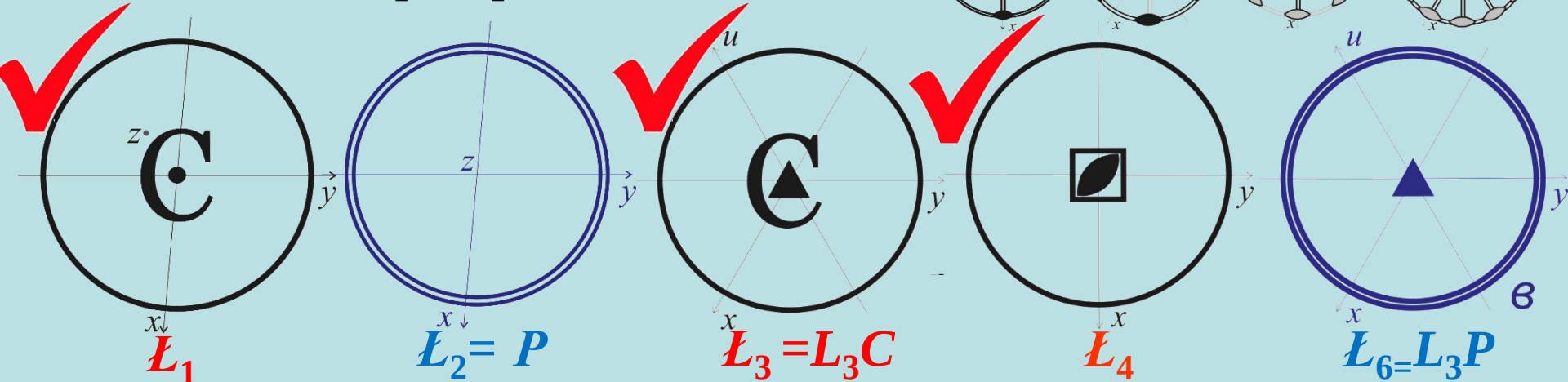
Добавляем ко второму или последнему варианту горизонтальную плоскость симметрии (P_h)



Вывод классов симметрии



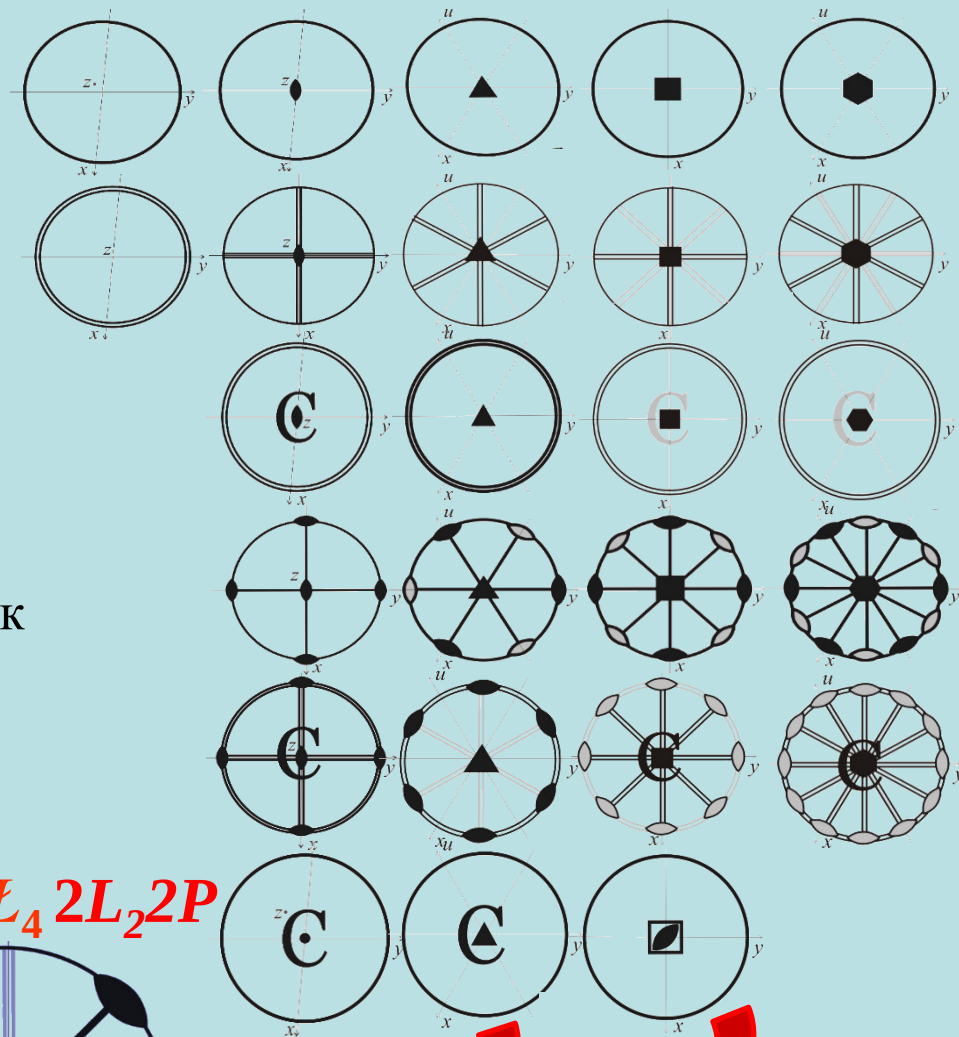
Возьмем за генераторы сложные оси:



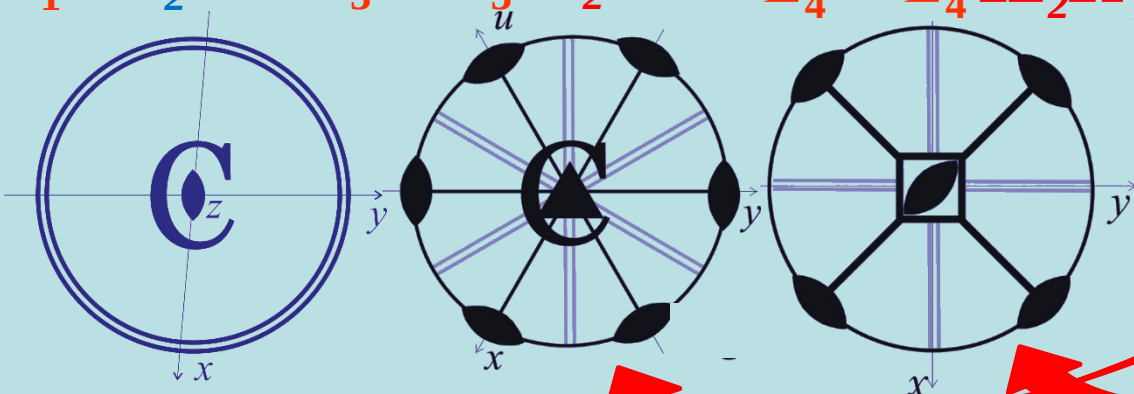
Оригинальными классами окажутся только 3 ИТОГО 22 + 3 = 25

Вывод классов симметрии

Добавляем вертикальную плоскость к предыдущему варианту



$L_1 \rightarrow L_2 PC$ $L_3 \rightarrow L_3 3L_2 3PC$ $L_4 \rightarrow L_4 2L_2 2P$



Оригинальными классами окажутся только 2

ИТОГО 25 + 2 = 27

Классы с единственной поворотной осью

Добавим плоскость, перпендикулярную основной оси. При этом в случае четной оси появится центр инверсии

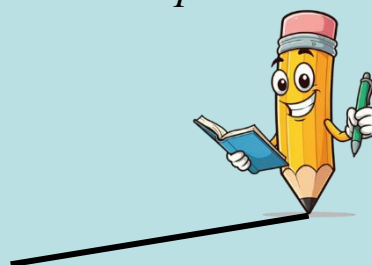
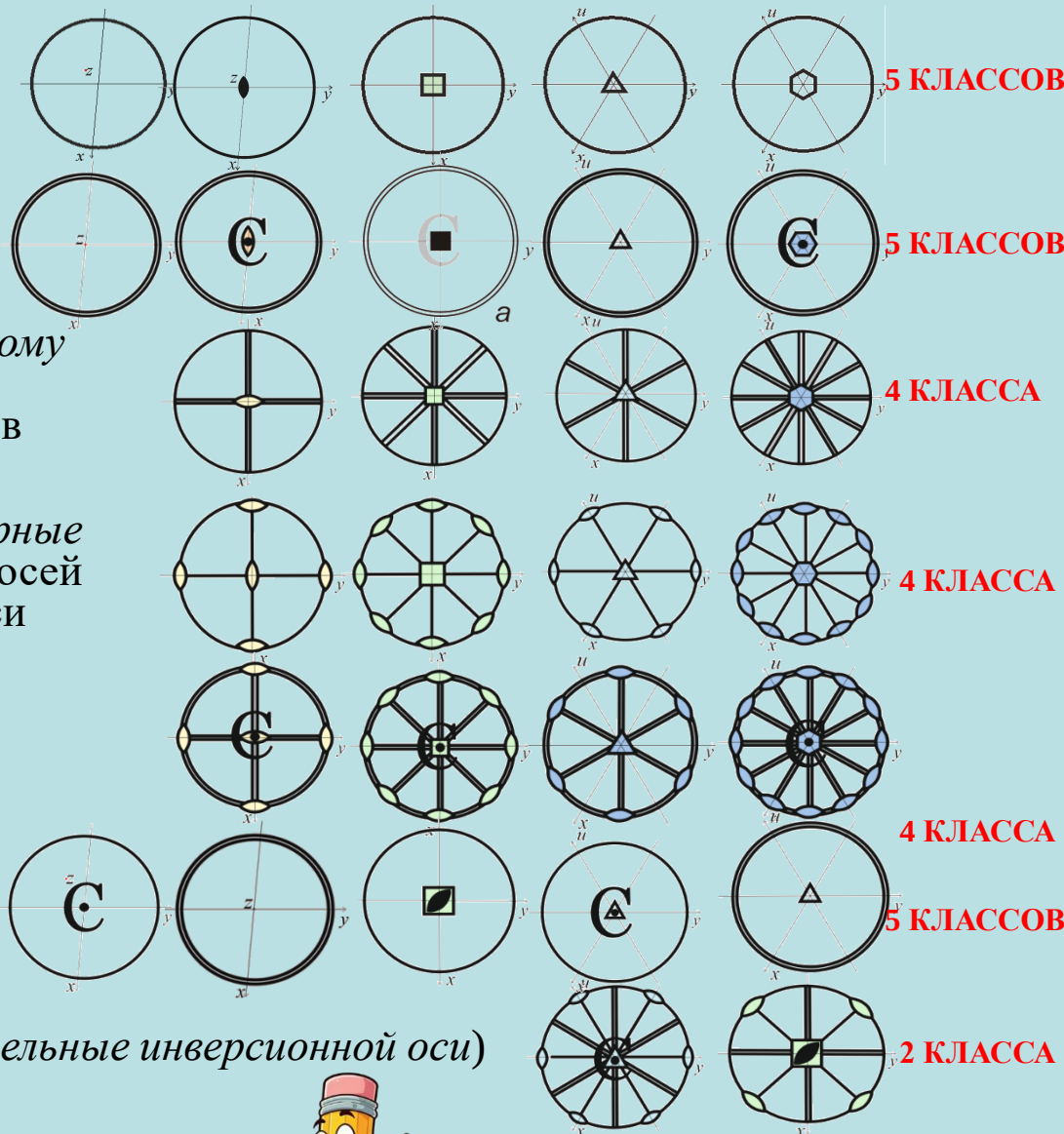
Добавим плоскости, параллельные основному направлению. При этом плоскостей, проходящих через ось ровно столько, каков порядок основной оси

Добавим оси 2-ого порядка, перпендикулярные основному направлению. При этом таких осей ровно столько, каков порядок основной оси

Добавим одновременно любые 2 генератора

Классы с единственной инверсионной осью

Добавим вертикальные плоскости (параллельные инверсионной оси)



27 классов

Таким образом выведены **27 классов** либо без осей высшего порядка, либо с единственной осью высшего порядка

Могут ли и каким образом пересекаться оси высших порядков?



Конечно, ДА!

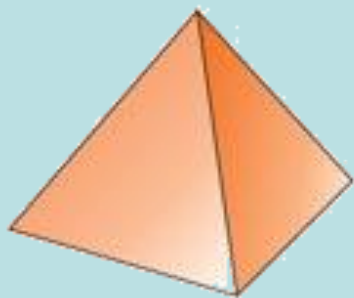


Конечно, ДА!

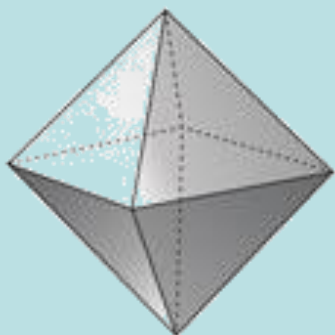


Симметрия правильных многогранников, называемых платоновыми телами, описывается несколькими осями высших порядков

ПЛАТОНОВЫ ТЕЛА



ТЕТРАЭДР



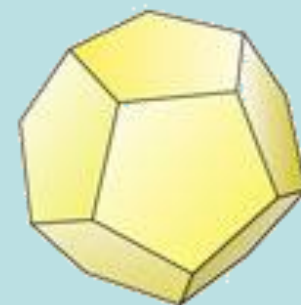
ОКТАЭДР



ИКОСАЭДР



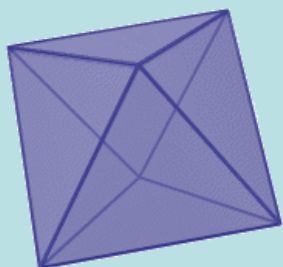
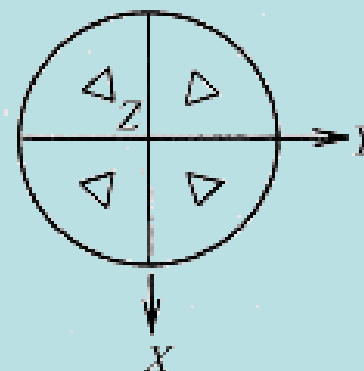
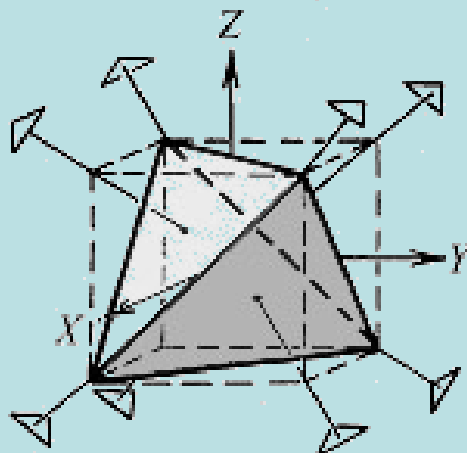
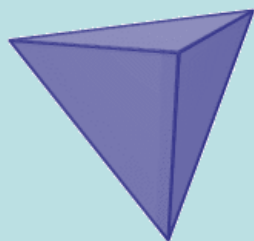
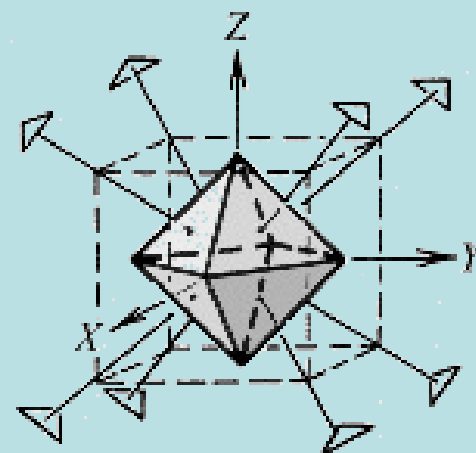
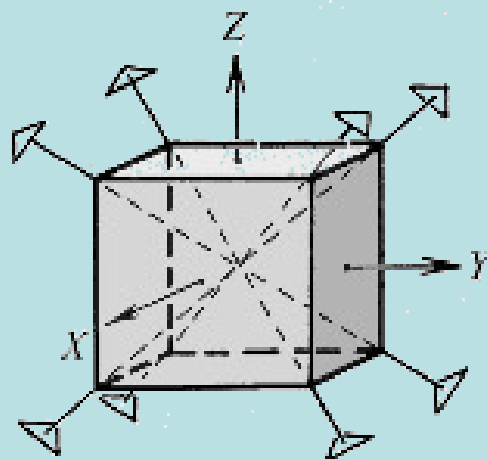
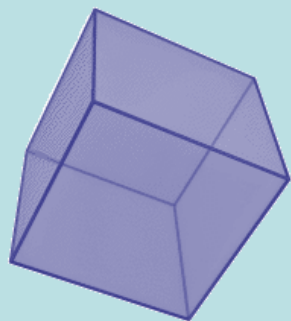
КУБ



ДОДЕКАЭДР

У правильных многогранников все грани – правильные многоугольники одного сорта и все вершины топологически одинаковы.

Кристаллографические платоновы тела



Расположение четырех осей L_3

Право же, удивительно, что правильные многоугольники так отличаются по свойствам

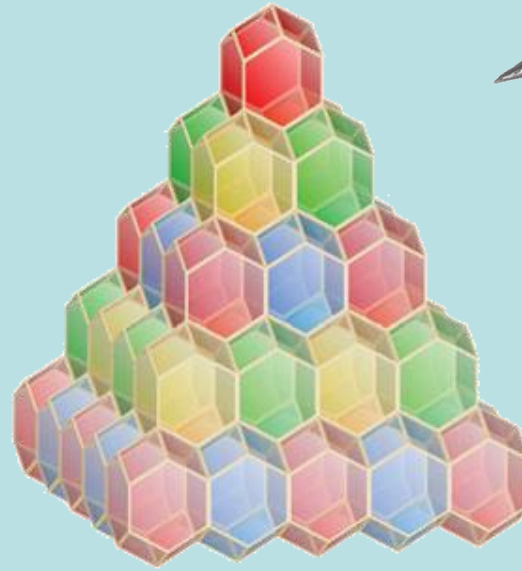
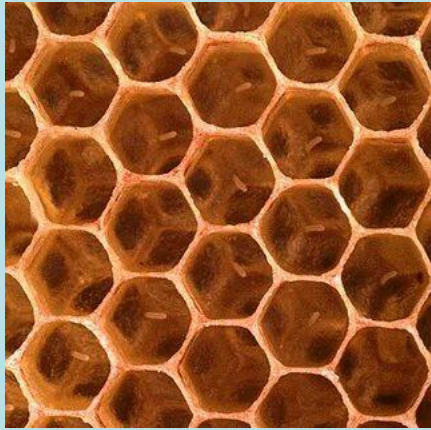
Если шестиугольники выложить на стол, станет ясно, что они покрывают плоскость без зазоров (пчелы!). Это свойственно также треугольникам и квадратам.



Последние наряду с пятиугольниками могут образовывать объемные тела. А вот сложить из шестиугольников, не деформировав их, объемное тело, невозможно. (3 правильных шестиугольника ($120^\circ \times 3 = 360^\circ$) – **нельзя!**)

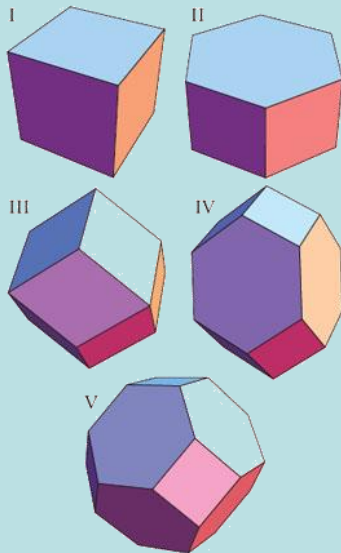
Поэтому пчелам, как большим любителям шестиугольников, для построения объемных сот приходится «выкручиваться»
объемная форма сот - ромбододекаэдр

Поэтому пчелам, как большим любителям шестиугольников, для построения объемных сот приходится «выкручиваться»: объемная форма сот - *вытянутый «ромбододекаэдр» или двусторонне заточенный карандаш*



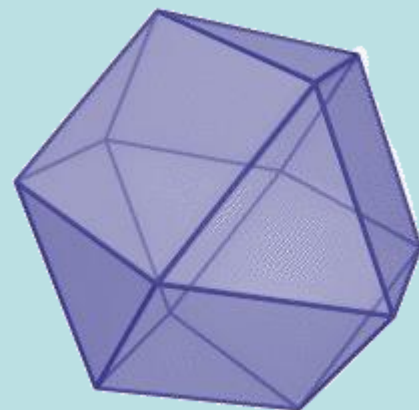
Параллелоэдры Федорова

Федоров Е.С. В 1881 году показал, что только 5 топологических типов выпуклых многогранников могут в параллельном положении выполнять пространство без зазоров и наложений.



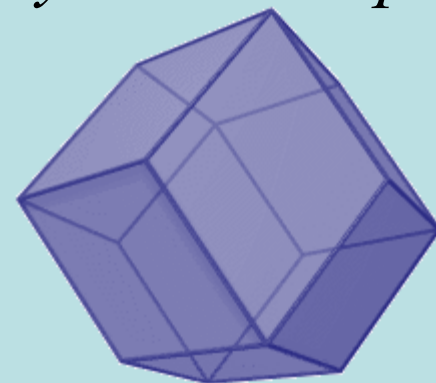
Помимо 5 правильных многогранников существуют полуправильные, которые называются **архимедовыми** и **каталановыми** телами.

Архимедовы тела – многогранники с топологически одинаковыми вершинами и гранями – правильными многогранниками, но разного сорта



кубооктаэдр

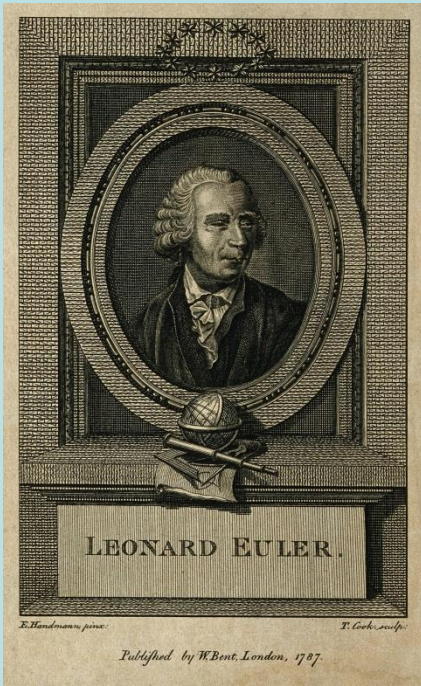
Каталановы тела – многогранники с одинаковыми гранями, но не правильными (многоугольниками) и топологически разными вершинами



ромбододекаэдр

Точный ответ на вопрос какие оси высших порядков и под какими углами могут пересекаться в многогранниках дает теорема сферической тригонометрии Эйлера.

Леонард Эйлер (1707-1783 гг.)



Дом, в котором жил Леонард Эйлер на Васильевском острове (набережная Лейтенанта Шмидта, дом 15)

Современный вид **сферической тригонометрии** придал Леонард Эйлер - математик, механик, физик, астроном. Швейцарец по происхождению с 1727 г. работал в России, а с 1741 г. — в Берлине, а с 1766 — опять в России. Автор более 850 работ, оказавших колоссальное влияние на развитие науки. Основная часть рукописного наследия Эйлера хранится в Санкт-Петербургском филиале Архива РАН. Полное собрание трудов Эйлера издаётся Швейцарским обществом естествоиспытателей с 1911 года и до сих пор не завершено.

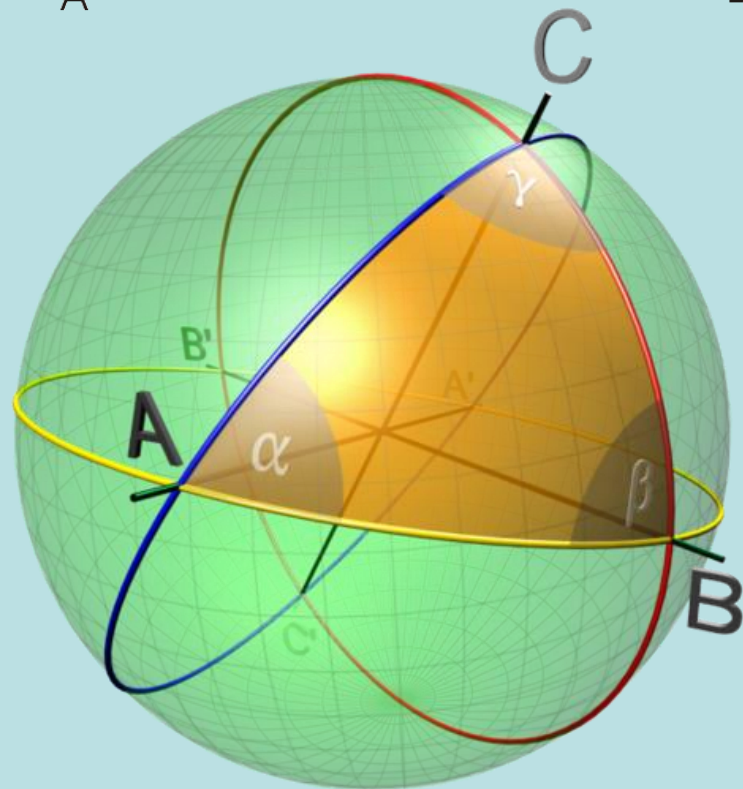
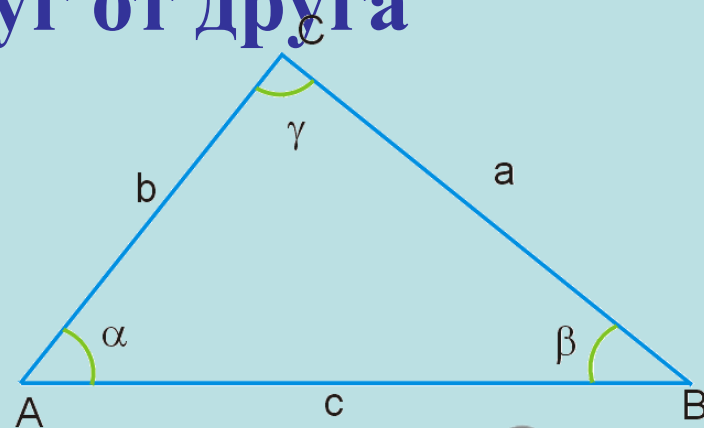
*Теорема сферической тригонометрии
Эйлера позволяет вывести не только 27
классов, но и оставшиеся 5 классов
симметрии, содержащих более одной оси
высшего порядка.*

Геометрия на плоскости и на поверхности сферы отличаются друг от друга

Например.

На плоскости сумма внутренних углов треугольника всегда равна 180 градусам

А на сфере — не совсем.....



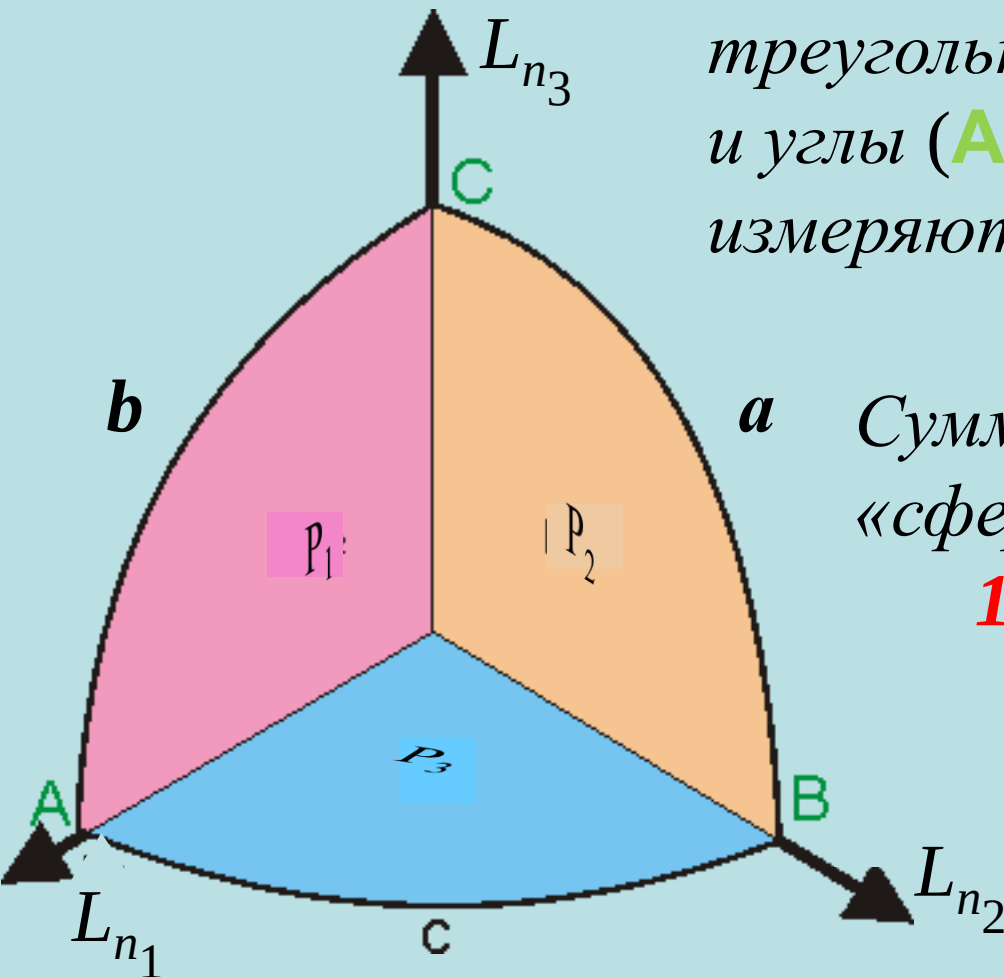
Кто же такой сферический треугольник?

Сферический треугольник живет на сфере. Его грани — кусочки меридианов, то есть сферические проекции плоскостей, проходящих через центр сферы



Отличительные особенности сферического треугольника:

*Параметры сферического треугольника однородны: и углы (**A**, **B**, **C**) и стороны (**a**, **b**, **c**) измеряются в градусах!*



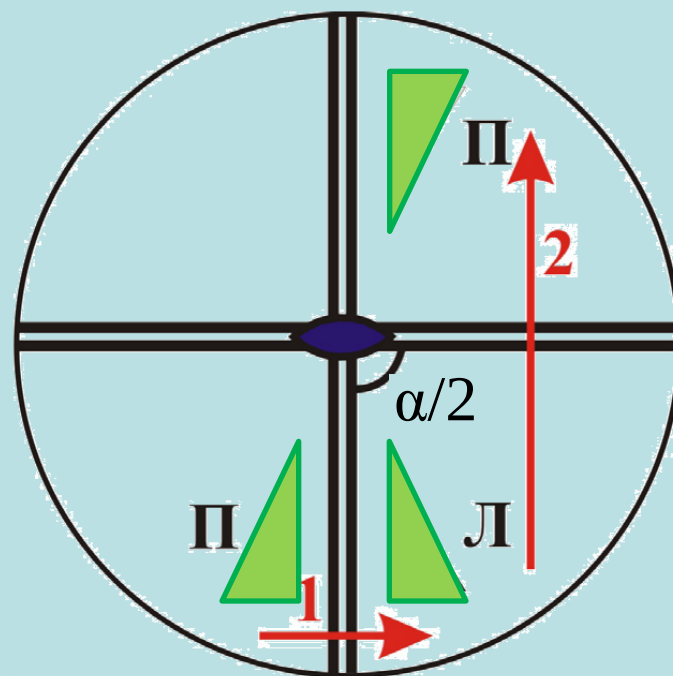
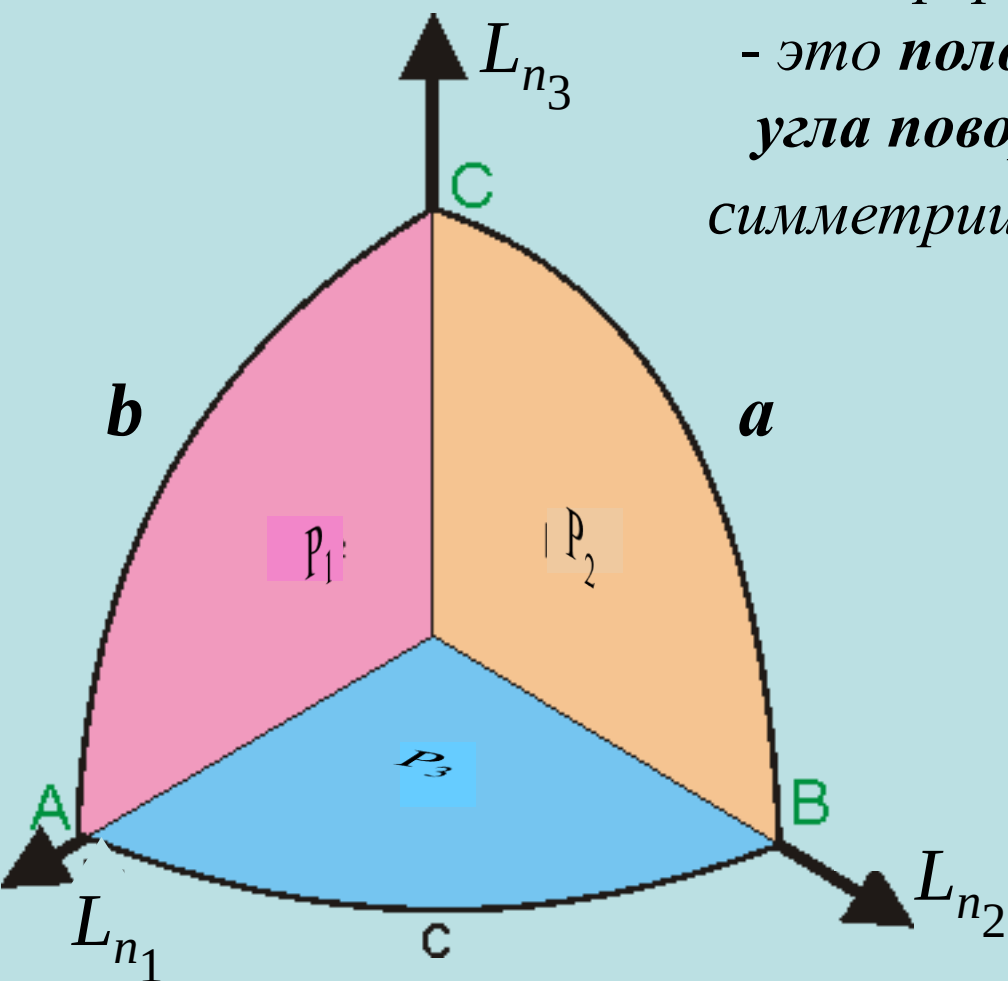
***a** Сумма углов треугольника в «сферическом» мире:*

$$180^\circ < A + B + C < 540^\circ$$

Стороны сферического треугольника (a, b, c)

- это **углы** между соответствующими осями

Углы сферического треугольника (**A, B, C**)
- это **половина** элементарного
угла поворота соответствующей оси
симметрии ($\alpha/2$)



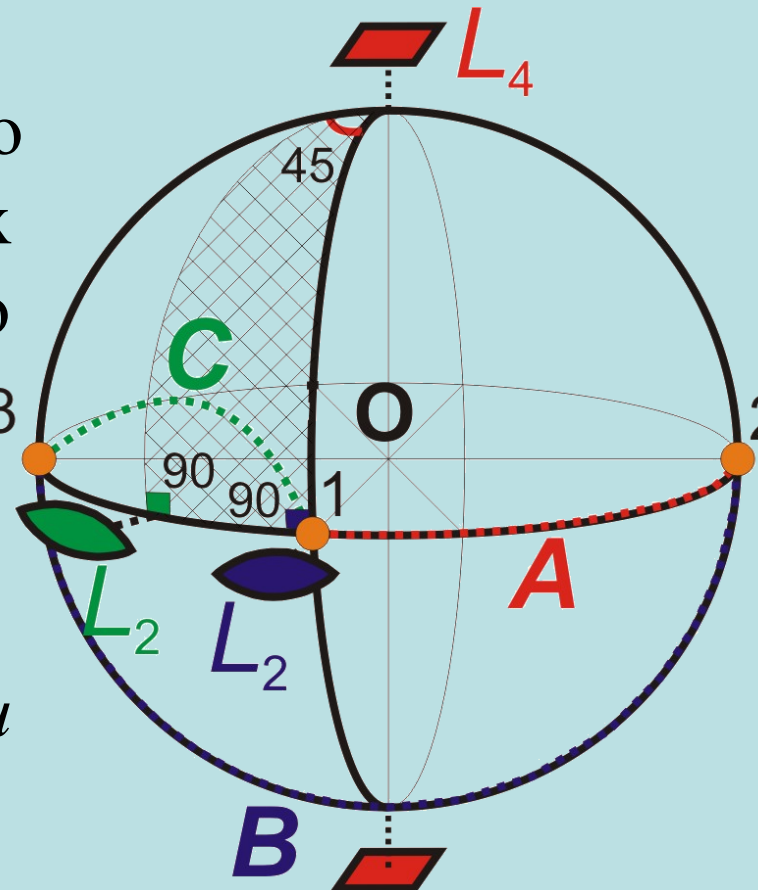
Перемещения точки по поверхности сферы:

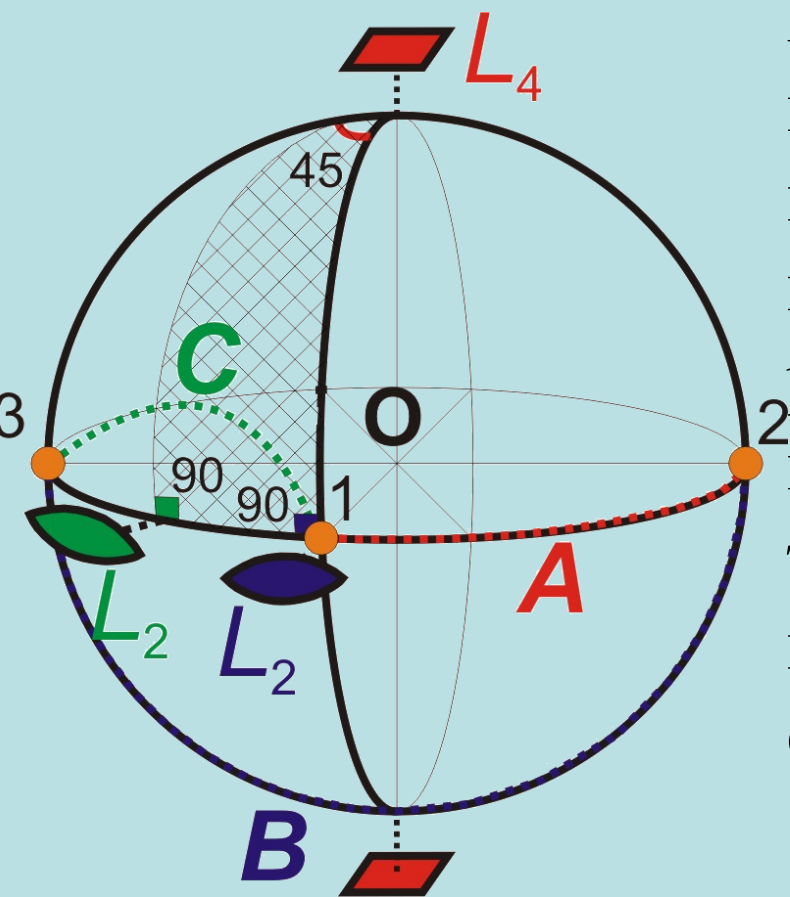
$A + B$ – путь, пройденный тараканом в результате последовательного поворота вокруг осей L_4 и L_2 , что соответствует перемещению C

$$A + B = C$$

На кристаллографическом языке это означает, что два последовательных поворота вокруг осей L_4 и L_2 равно повороту вокруг третьей оси L_2

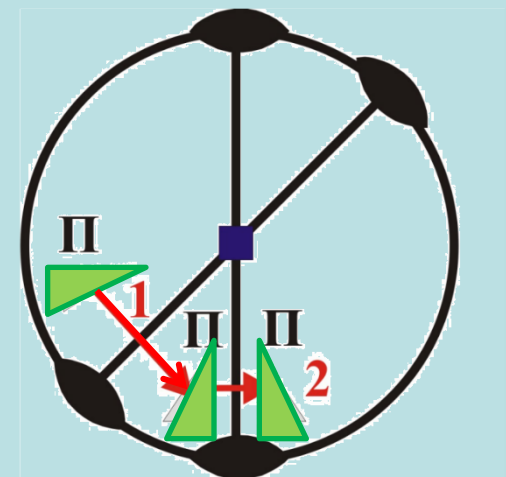
Сферический треугольник с углами 45° , 90° и 90° выделен штриховкой.

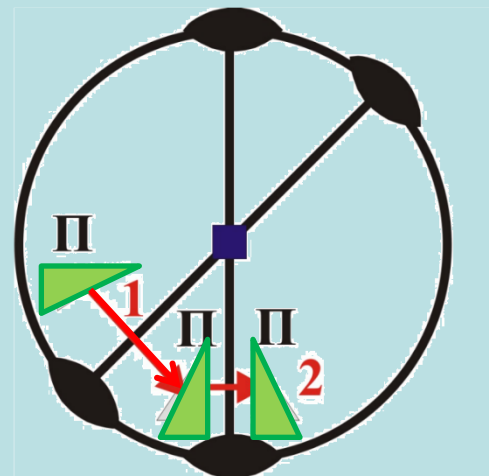
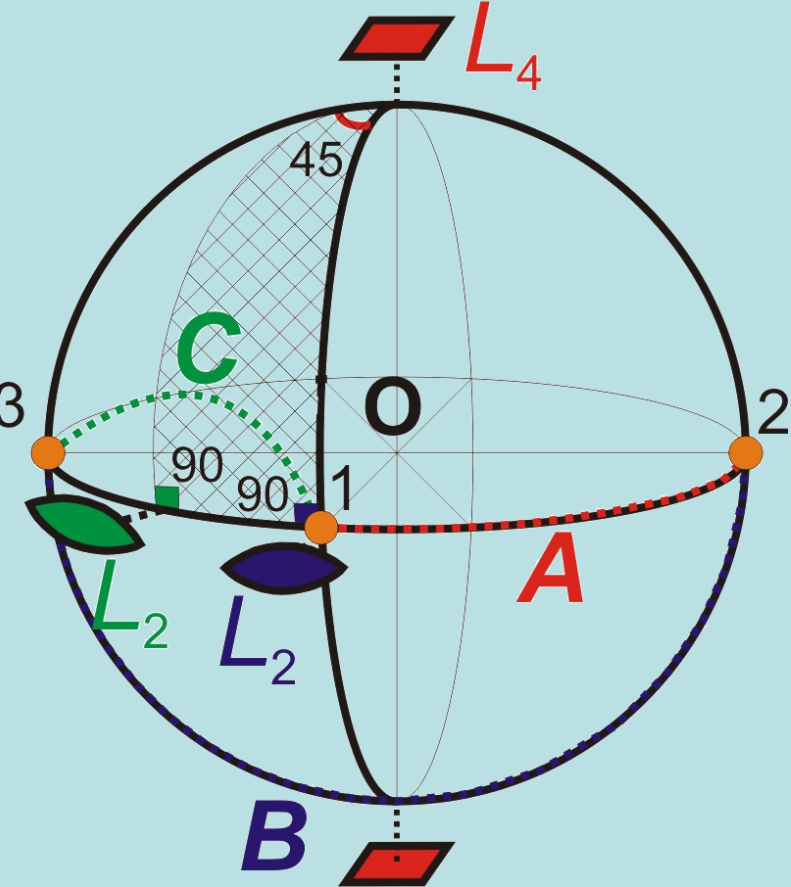




Верно также обратное: два последовательных поворота вокруг осей L_2 и L_2 , пересекающихся под углом 45 равноценны одному повороту вокруг L_4 , проходящей через точку пересечения этих осей перпендикулярно плоскости их содержащей

Такой пример рассматривался на прошлой лекции на модельном уровне





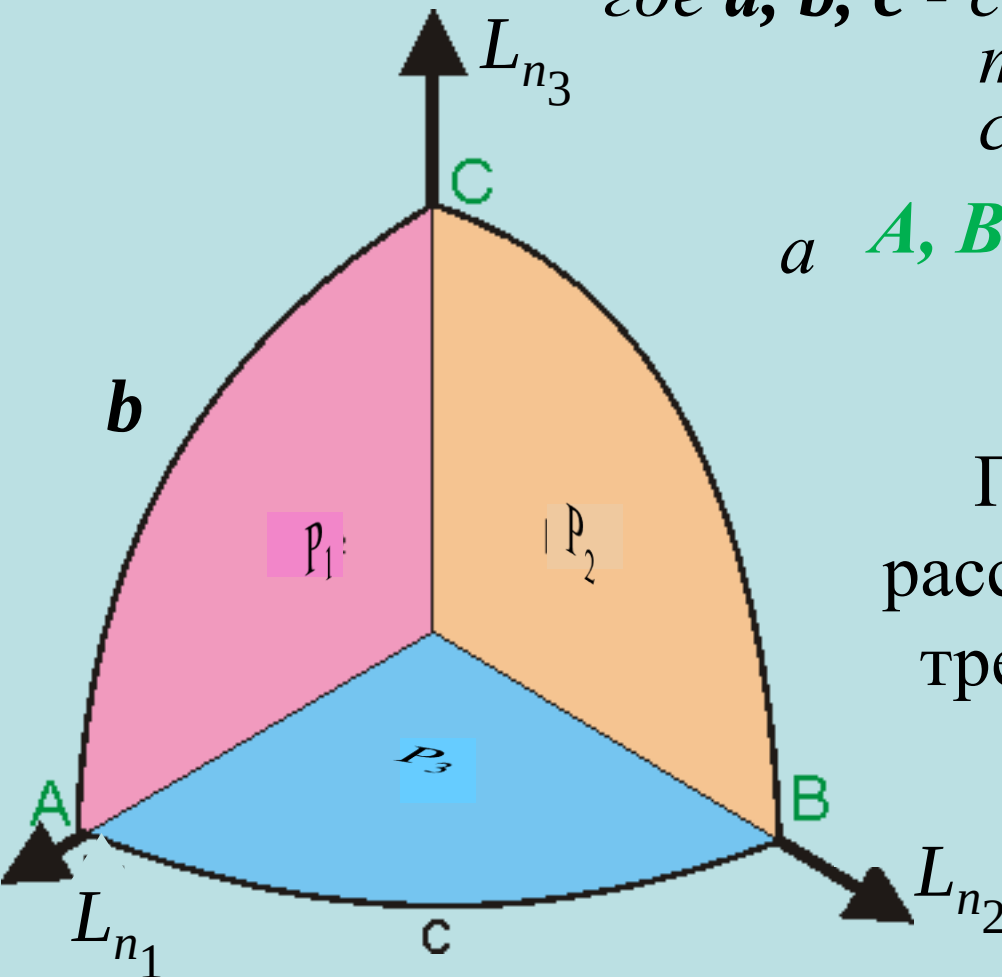
Сферическая тригонометрия дает точный ответ на вопрос, какие оси и под какими углами могут пересекаться в кристаллических многогранниках.

Теорема косинусов в сферической тригонометрии

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

где a, b, c - стороны сферического треугольника углы между соответствующими осями

A, B, C - углы сферического треугольника ($\alpha/2$)



По этой формуле можно
рассчитать угол сферического
треугольника по известным
сторонам

Рассчитаем элементарный угол поворота оси, задающей результирующую операцию симметрии в процессе последовательных поворотов вокруг осей L_2 и L_2 , пересекающихся под углом 45° .

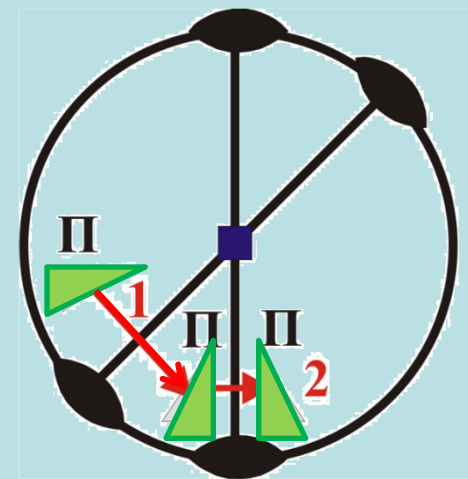
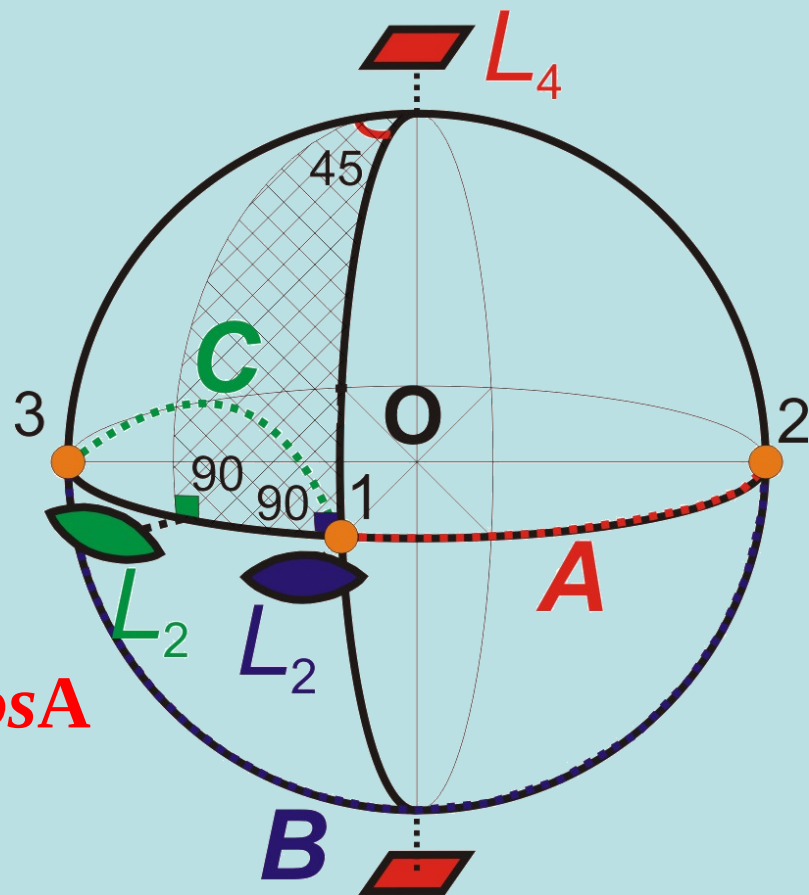
Из $\cos A = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$

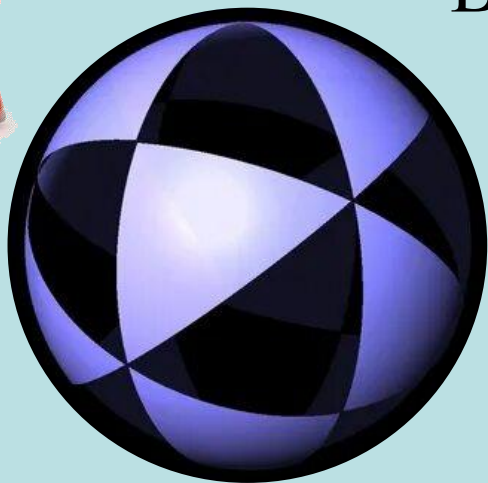
Подставляем значения:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

$$\cos A = \frac{\cos 45^\circ - \cos 90^\circ \cos 90^\circ}{\sin 90^\circ \sin 90^\circ}$$

$$A = \arccos \frac{\sqrt{2}/2 - 0}{1} = 45^\circ$$





В трехмерном пространстве могут существовать только такие многогранники, сферические треугольники, построенные на сферических проекциях осей симметрии которых полностью покрывают сферу, без зазоров и наложений.

Учитывая, что поворотные оси могут принимать только целочисленные значения, а сумма углов сферического треугольника (*половины элементарных углов поворотов этих осей*) должна быть больше 180° , можно вывести все возможные сочетания осей в пространстве (кстати не только кристаллографические)

Переберем все допустимые сочетания углов, учитывая только целочисленные и кристаллографически допустимые порядки осей:

Сочетания осей

Сумма углов > 180°

$L_1 L_1 L$ $180^\circ + 180^\circ + 180^\circ = 540^\circ$ совсем грустно... 😞 но возможно

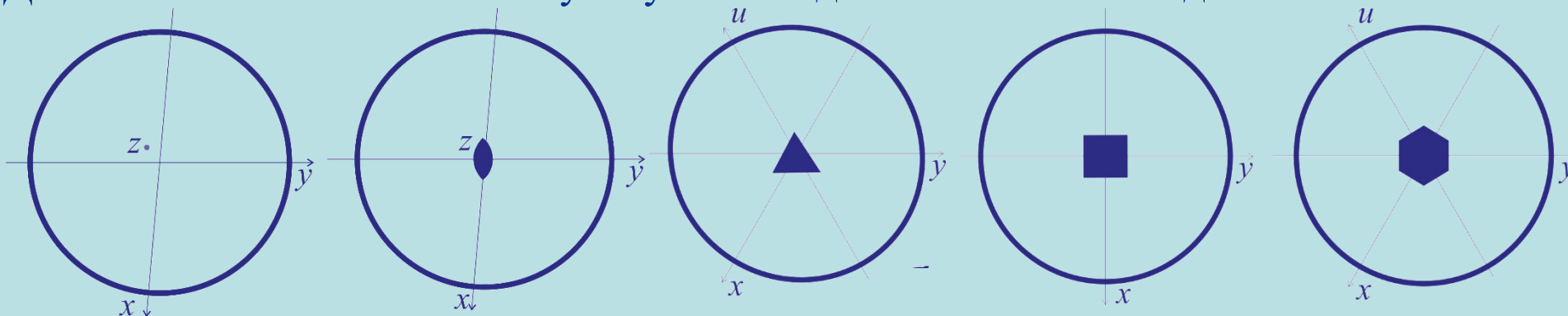
$L_2 L_1 L_1$ $90^\circ + 180^\circ + 180^\circ = 450^\circ$ не очень грустно... 😏

$L_3 L_1 L_1$ $60^\circ + 180^\circ + 180^\circ = 420^\circ$ повеселее... 😄

$L_4 L_1 L_1$ $45^\circ + 180^\circ + 180^\circ = 405^\circ$ еще веселее... 🤩

$L_6 L_1 L_1$ $30^\circ + 180^\circ + 180^\circ = 390^\circ$ совсем весело... 🥳

Данные сочетания соответствуют уже выведенным классам с единственной осью



Переберем все допустимые сочетания углов, учитывая только целочисленные и кристаллографически допустимые порядки осей:

Сочетания осей

$L_2 L_2 L_1$

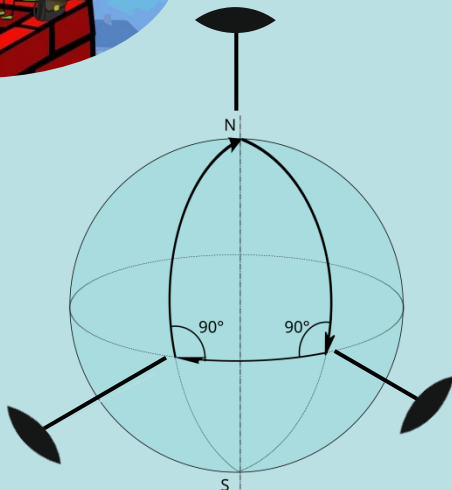
Сумма углов > 180°

нет!!

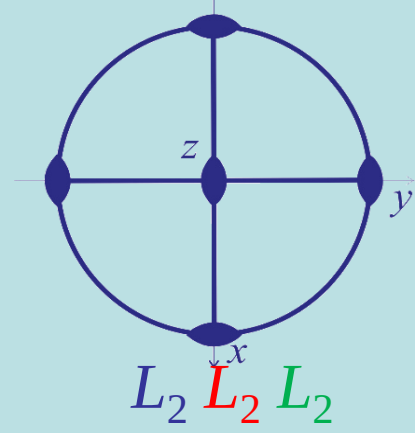



$L_2 L_2 L_2$

$90^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 270^\circ$

Для этого треугольника все углы между осями окажутся равными 90°. Зафиксировав положения этих осей на сфере, можно вычертить и стереографическую проекцию полученного осевого класса симметрии $3L_2$, где все оси 2-го порядка будут неэквивалентны друг другу сочетания соответствует уже выведенному классу:



Переберем все допустимые сочетания углов, учитывая только целочисленные и кристаллографически допустимые порядки осей:

Сочетания осей

Сумма углов > 180°

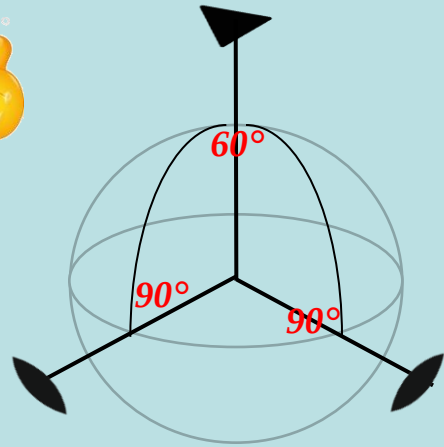
$L_2\ L_2\ L_2$

$$90^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 270^\circ$$

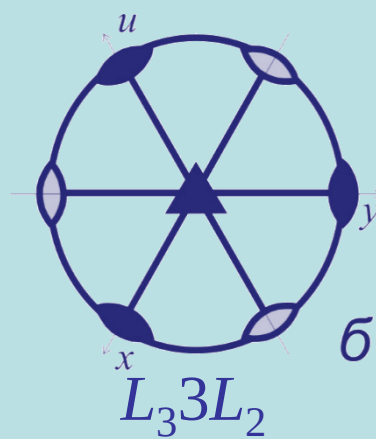


$L_3\ L_2\ L_2$

$$60^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 240^\circ$$



две стороны между осями $L_3 - L_2$ будут равны 90° , а угол между осями $L_2 - L_2 = 60^\circ$. Нанеся выходы осей на сферу и построив стереографическую проекцию, получим (после размножения элементов симметрии дуг другом) осевой класс – L_33L_2 , где все три оси 2-го порядка будут связаны поворотами на 120° вокруг оси L_3 , а следовательно, эквивалентны



Переберем все допустимые сочетания углов, учитывая только целочисленные и кристаллографически допустимые порядки осей:

Сочетания осей

Сумма углов > 180°

$L_2 L_2 L_2$

$90^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 270^\circ$



$L_3 L_2 L_2$

$60^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 240^\circ$

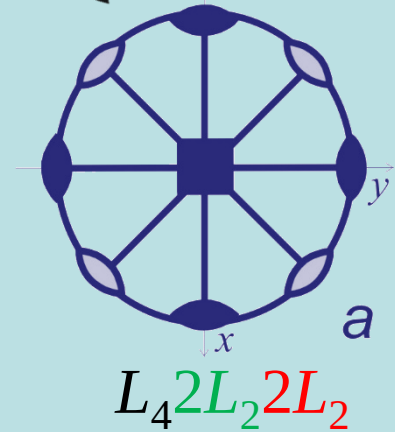
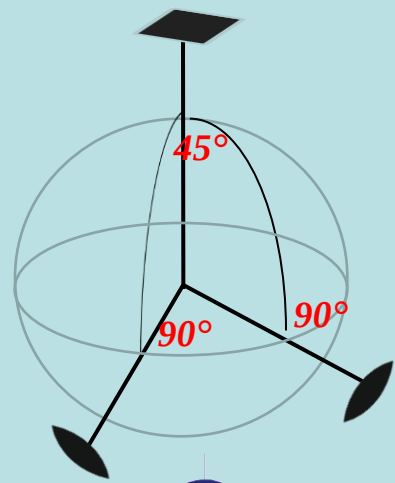


$L_4 L_2 L_2$

$45^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 225^\circ$



Две стороны между осями $L_4-L_2 = 90^\circ$, сторона $L_2-L_2 = 45^\circ$. Вычертив этот сферический треугольник и построив стереографическую проекцию, увидим, что получен класс симметрии с одной осью L_4 и четырьмя побочными осями L_2 , разбивающимися на два неэквивалентных между собой семейства – класс $L_4 2L_2 2L_2$



Переберем все допустимые сочетания углов, учитывая только целочисленные и кристаллографически допустимые порядки осей:

Сочетания осей

Сумма углов > 180°

$L_2 L_2 L_2$

$$90^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 270^\circ$$



$L_3 L_2 L_2$

$$60^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 240^\circ$$



$L_4 L_2 L_2$

$$45^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 225^\circ$$



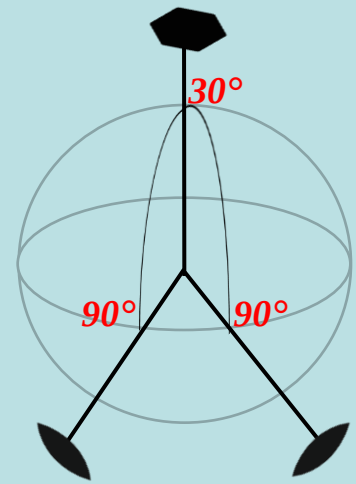
$L_5 L_2 L_2$

$$36^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 216^\circ$$

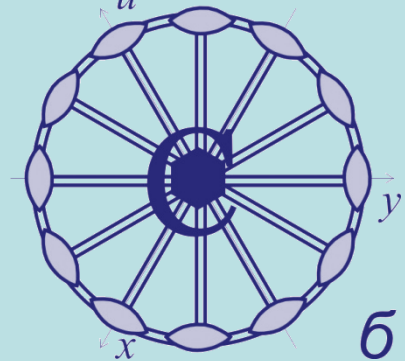


$L_6 L_2 L_2$

$$30^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 210^\circ$$



Две стороны $L_6 - L_2 = 90^\circ$, сторона $L_2 - L_2 = 30^\circ$. В итоге получаем осевой класс – $L_6 6L_2$ = также с двумя неэквивалентными семействами осей 2-го порядка $L_6 3L_2 3L_2$



$L_6 3L_2 3L_2$

б

Переберем все допустимые сочетания углов, учитывая только целочисленные и кристаллографически допустимые порядки осей:

Сочетания
осей

Сумма углов $> 180^\circ$

$L_2 L_2 L_2$

$$90^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 270^\circ$$



$L_3 L_2 L_2$

$$60^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 240^\circ$$



$L_4 L_2 L_2$

$$45^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 225^\circ$$



$L_5 L_2 L_2$

$$36^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 216^\circ$$



$L_6 L_2 L_2$

$$30^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 210^\circ$$



L_7 -и выше $L_2 L_2$

$$*^\circ + 90^\circ + 90^\circ \Rightarrow 180^\circ \text{ не в кристаллах}$$

Все эти осевые наборы для кристаллического пространства были выведены выше.

А теперь...

Переберем все допустимые сочетания углов, учитывая только целочисленные и кристаллографически допустимые порядки осей:

Сочетания осей Сумма углов $> 180^\circ$

$$L_2 L_2 L_2 \quad 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 270^\circ$$

$$L_3 L_2 L_2 \quad 60^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 240^\circ$$

$$L_4 L_2 L_2 \quad 45^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 225^\circ$$

$$L_5 L_2 L_2 \quad 36^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 216^\circ \text{ не в кристаллах}$$

$$L_6 L_2 L_2 \quad 30^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 210^\circ$$

$$L_7\text{-итд } L_2 L_2 \quad *^\circ + 90^\circ + 90^\circ \Rightarrow 180^\circ \text{ не в кристаллах}$$

Все эти осевые наборы для кристаллического пространства были нами уже выведены.

А теперь...

$$L_3 L_3 L_2 \quad 60^\circ + 60^\circ + 90^\circ = 210^\circ$$

Переберем все допустимые сочетания углов, учитывая только целочисленные и кристаллографически допустимые порядки осей:

Сочетания
осей

Сумма углов $> 180^\circ$

$L_3 L_3 L_2$

$$60^\circ + 60^\circ + 90^\circ = 210^\circ$$



$L_4 L_3 L_2$

$$45^\circ + 60^\circ + 90^\circ = 195^\circ$$



$L_5 L_3 L_2$

$$36^\circ + 60^\circ + 90^\circ = 186^\circ$$



не в кристаллах

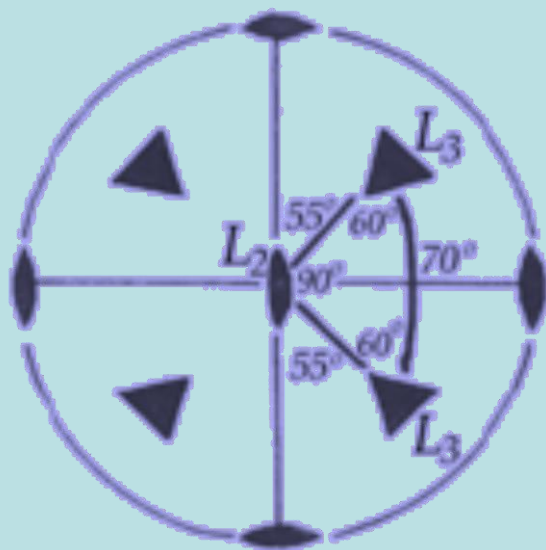
$L_6 L_3 L_2$

$$30^\circ + 60^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

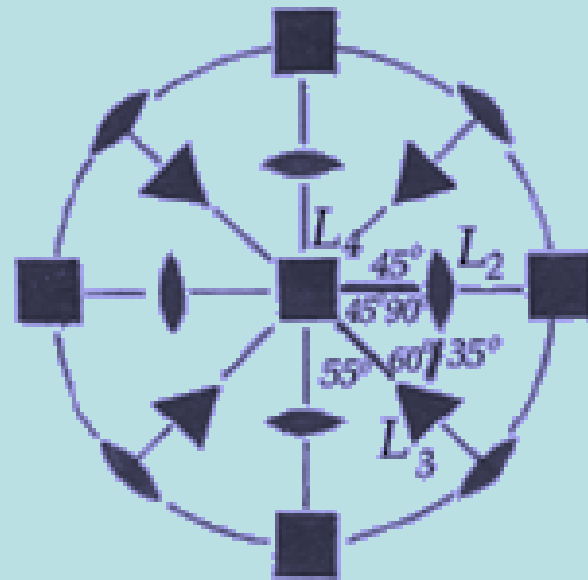


*недопустимо
никогда
и нигде!*

В кристаллическом мире существует только 2 варианта пересечения осей высших порядков L_3 L_3 L_2 и L_4 L_3 L_2



$3L_2 4L_3$



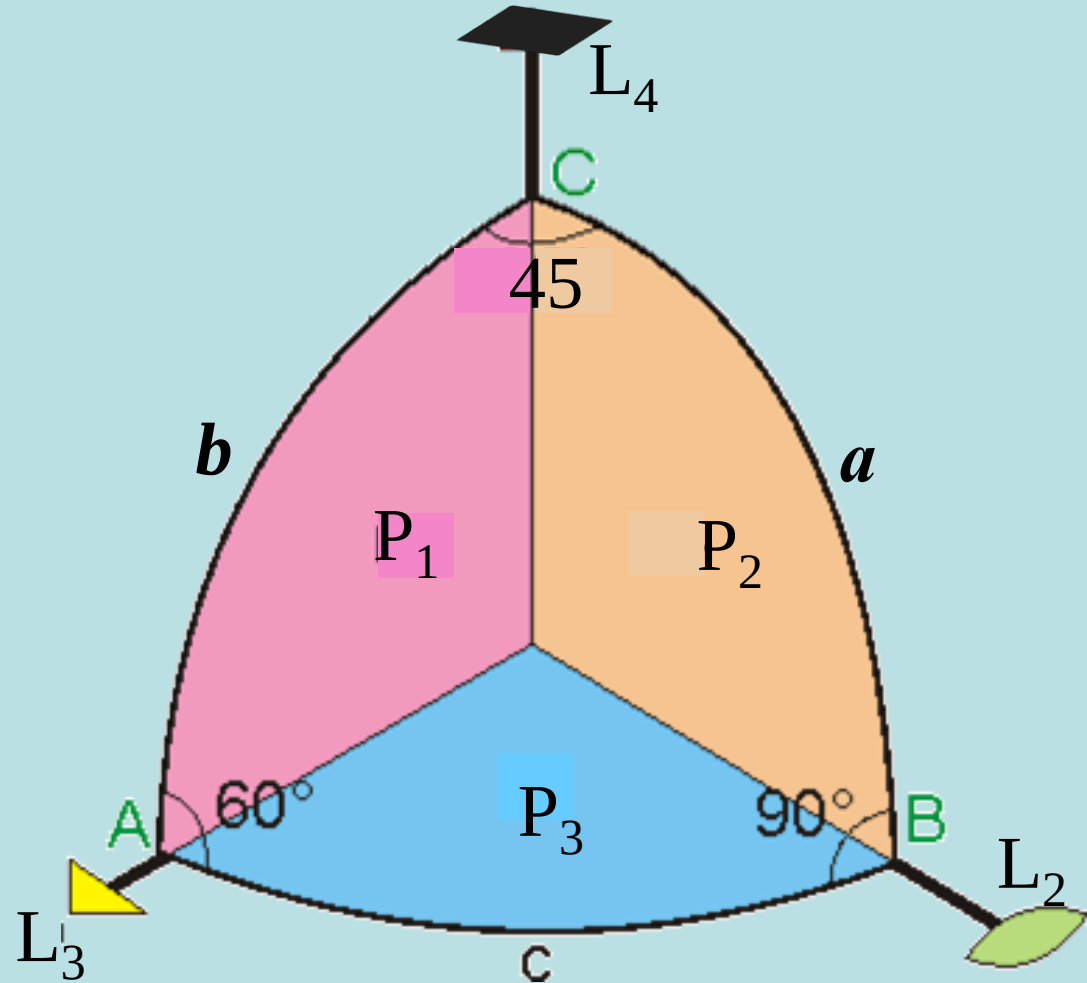
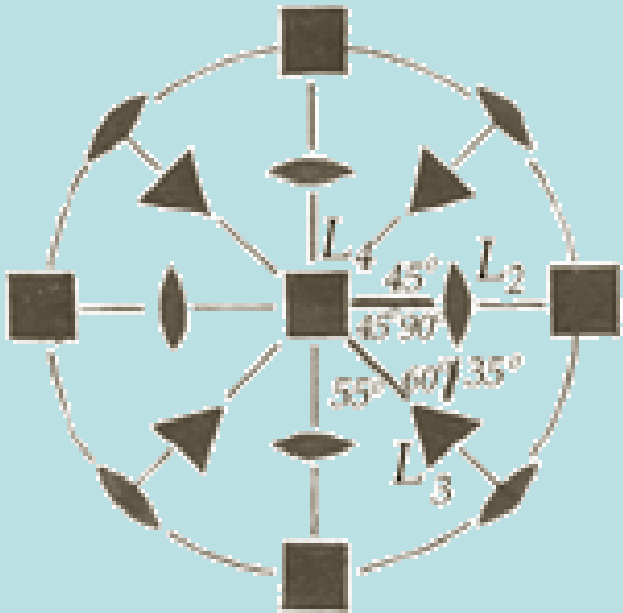
$3L_4 4L_3 6L_2$

Таким образом мы получаем 2 осевые группы:

$3L_2 4L_3$ и $3L_4 4L_3 6L_2$

Углы между осями также можно рассчитать по теореме косинусов:

$$\cos A = \cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$$



$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$$

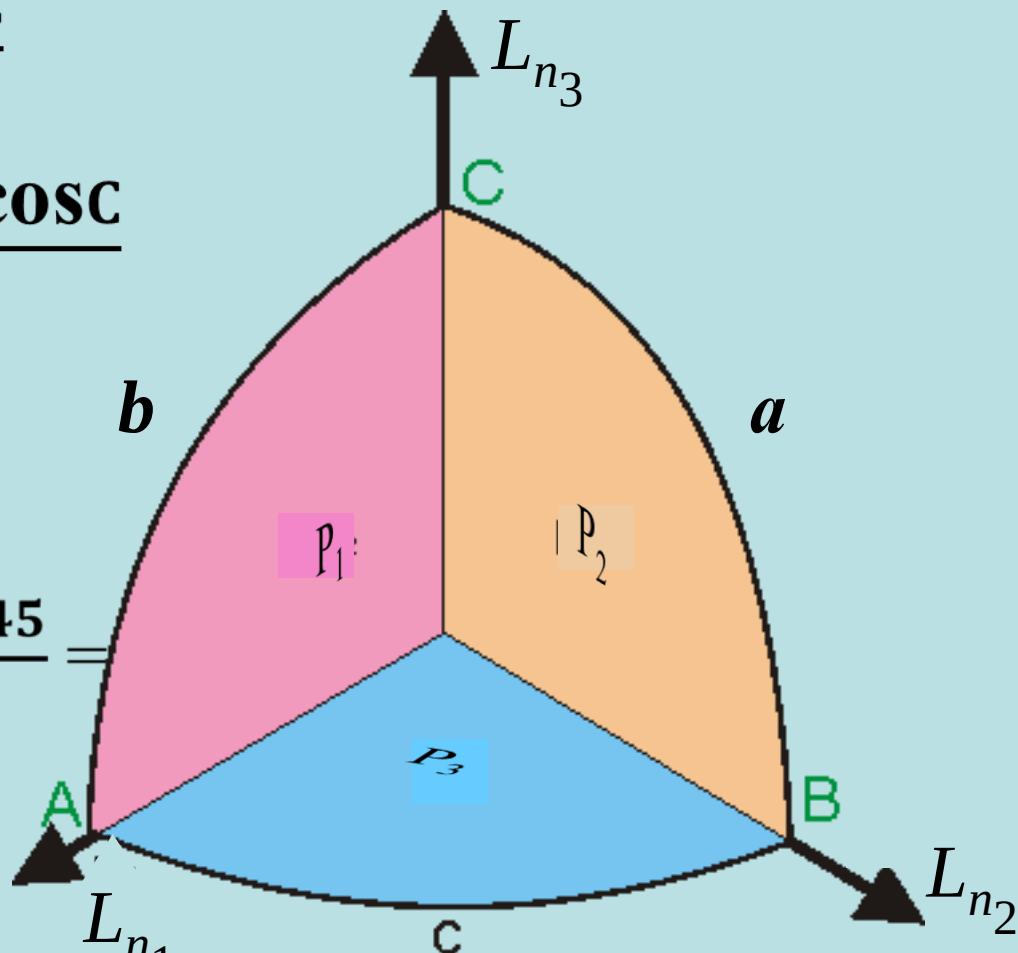
$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}$$

$$a = \arccos \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}$$

Рассчитаем угол между осями L_3 и L_4 :

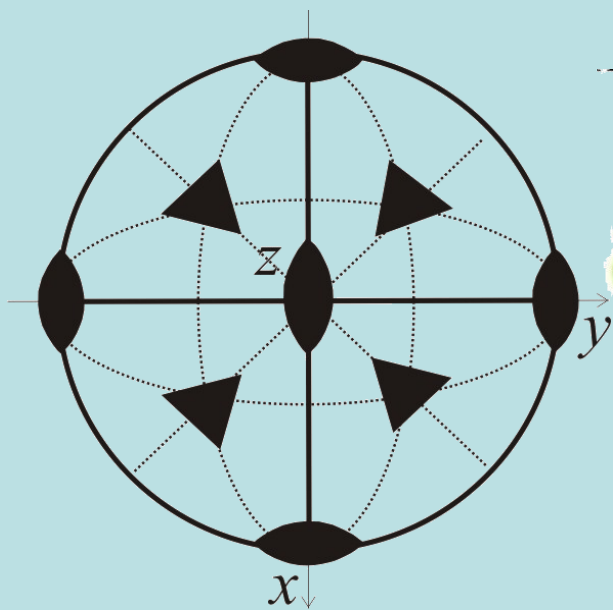
$$b = \arccos \frac{\cos 90 + \cos 60 \cos 45}{\sin 60 \sin 45} =$$

$$= \arccos \frac{0 + 1/2 * \sqrt{2}/2}{\sqrt{3}/2 * \sqrt{2}/2} = \arccos 0,5773 = 54,74^\circ$$

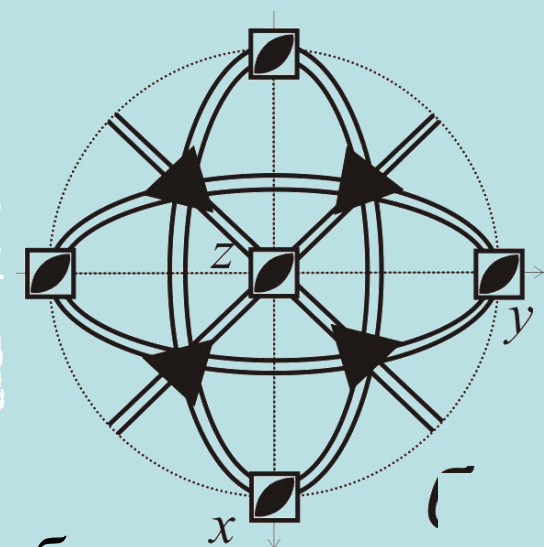
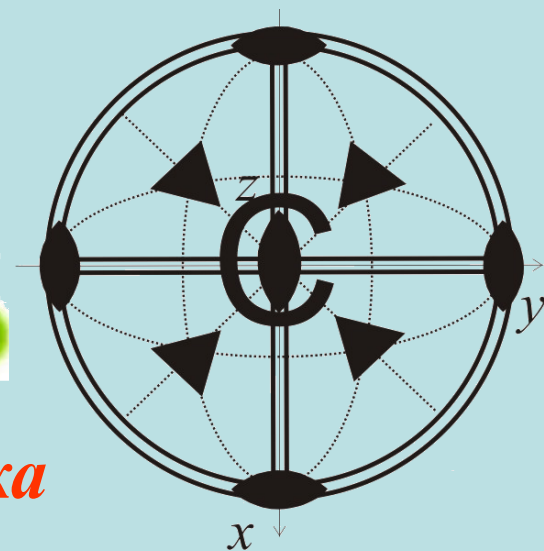


Вывод кубических классов симметрии с плоскостями

$$L_3 L_3 L_2 \quad 60^\circ + 60^\circ + 90^\circ = 210^\circ$$



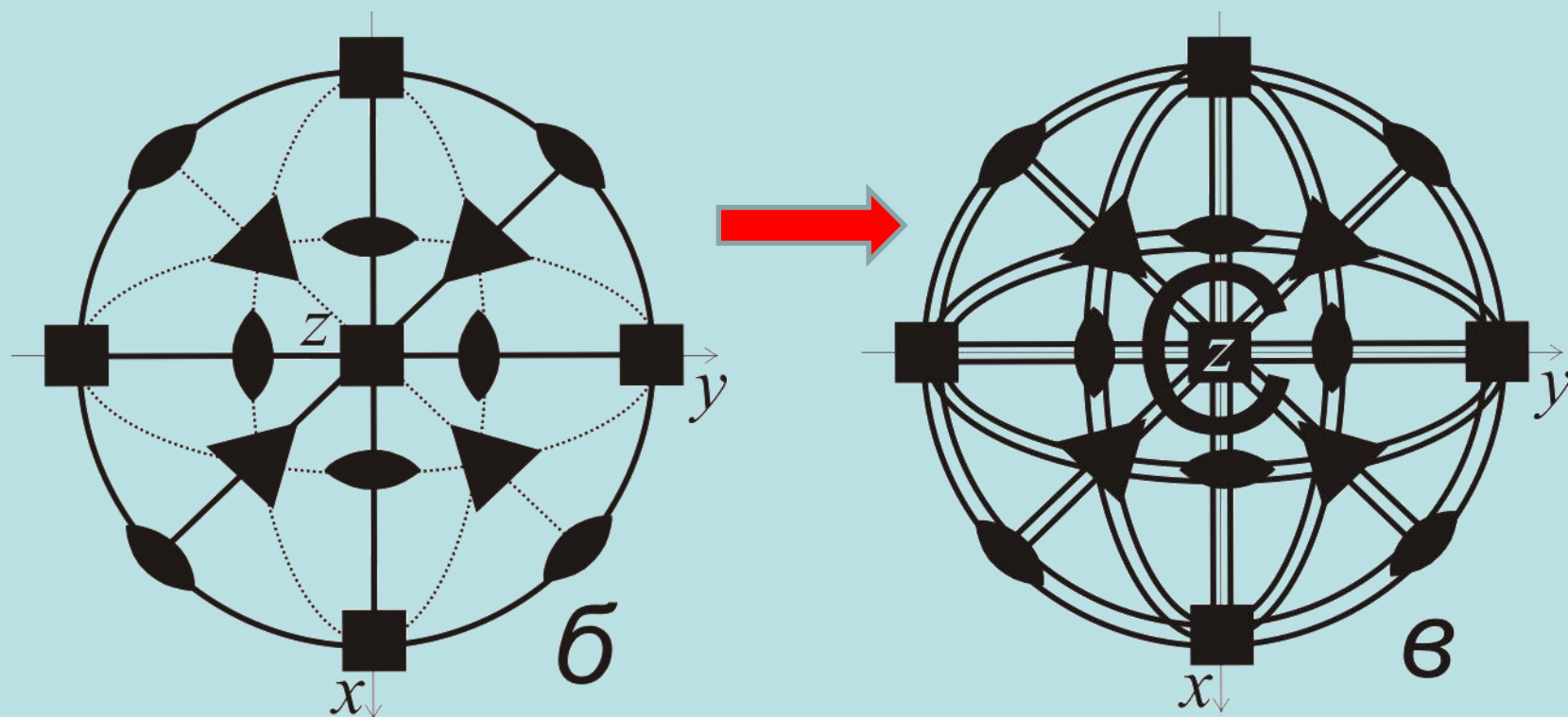
Три поросенка



Три класса с тетраэдрическим осевым набором

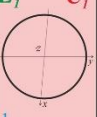
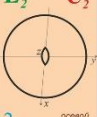
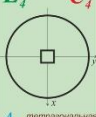
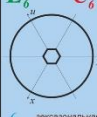
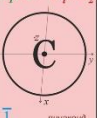
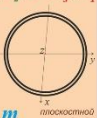
Вывод кубических классов симметрии с плоскостями

$$L_4 L_3 L_2 \quad 45^\circ + 60^\circ + 90^\circ = 195^\circ$$



Два класса с октаэдрическим осевым набором

32 КЛАССА СИММЕТРИИ КРИСТАЛЛОВ

Категория	НИЗШАЯ $a \neq b \neq c$			СРЕДНЯЯ $a = b \neq c$			ВЫСШАЯ $a = b = c$	
Сингония	Триклинная $\alpha \neq \beta \neq \gamma$	Моноклиная $\alpha = \beta = 90^\circ$ $\gamma \neq 90^\circ$	Ромбическая $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	Тетрагональная $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	Гексагональная $\alpha = \beta = 90^\circ \quad \gamma = 120^\circ$		Кубическая $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	
				Тригональная подсингония	Гексагональная подсингония			
C_n	$L_1 \quad C_1$  1 монакзор	$L_2 \quad C_2$  2 осевой диокзор		$L_4 \quad C_4$  4 тетрагональные пирамиды	$L_3 \quad C_3$  3 тригональные пирамиды	$L_6 \quad C_6$  6 гексагональные пирамиды	Обозначения Символ Браве Символ Шенфлиса  Стереографическая проекция класса симметрии	
C_{ni} (S_n)	$L_1/C \quad C_1/S_2$  $\bar{1}$ ланкаэдр	$L_2/P \quad C_2/S_1$  m плоскоотной диокзор		$L_4 \quad C_{4i}/S_4$  $\bar{4}$ тетрагональный тетрахедр	$L_3 \quad C_{3i}/S_6$  $\bar{3}$ ромбоэдр	$L_6 \quad C_{6i}/S_3$  6 тригональный бипирамид		Международный символ Форма общего положения
C_{nh}		$L_2PC \quad C_{2h}$  $\frac{2}{m}$ ромбическая призма		$L_4PC \quad C_{4h}$  $\frac{4}{m}$ тетрагональные бипирамиды	$L_3 \quad C_{3h}$  $\bar{6}$ тригональный бипирамид	$L_6PC \quad C_{6h}$  $\frac{6}{m}$ гексагональные бипирамиды		
C_{nv}			$L_22P \quad C_{2v}$  $mm2$ ромбическая пирамиды	$L_44P \quad C_{4v}$  $4mm$ дитетрагональные пирамиды	$L_33P \quad C_{3v}$  $3m$ тригональные пирамиды	$L_66P \quad C_{6v}$  $6mm$ гексагональные пирамиды		
D_n			$3L_2 \quad D_2$  222 ромбический тетрахедр	$4L_4L_2 \quad D_4$  422 тетрагональный тетрахедр	$L_33L_2 \quad D_3$  32 тригональный тетрахедр	$L_66L_2 \quad D_6$  622 гексагональный тетрахедр	$3L_4L_3 \quad T$  23 пентагон-триоктаэдр	$3L_4L_6L_2 \quad O$  432 пентагон-триоктаэдр
D_{nd}				$L_22L_22P \quad D_{2d}$  $\bar{4}m2$ тетрагональный октаэдр	$L_33L_23PC \quad D_{3d}$  $\bar{3}m$ тригональный октаэдр		$3L_4L_6P \quad T_d$  $\bar{4}3m$ тетраэдр	
D_{nh}			$3L_23PC \quad D_{2h}$  mmm ромбическая бипирамиды	$L_44L_23PC \quad D_{4h}$  $\frac{4}{m}mm$ дитетрагональные бипирамиды	$L_33L_24P \quad D_{3h}$  $\bar{6}m2$ тригональные бипирамиды	$L_66L_27PC \quad D_{6h}$  $\frac{6}{m}mm$ гексагональные бипирамиды	$3L_4L_3PC \quad T_h$  $m\bar{3}$ додекаэдр	$3L_4L_6L_29PC \quad O_h$  $\bar{m}3m$ октаэдр

Каждый студент
получит такую
таблицу на семинаре

Также ее можно найти
на нашем сайте

В следующий раз
Координатные системы.
Категории. Сингонии.
Символики Шенфлиса, Германа-
Могена – требуют знания
теорем взаимодействия



! Материал опять думательный.
Несложнее сегодняшнего..



Следующий кристаллографический уровень



*Гарри Каспаров наконец-то выиграл у
компьютера,
и с двумя очками и тремя жизнями
перешел на следующий уровень.*