

ЛЕКЦИЯ 4

Координатные системы.

Категории.

Сингонии.

Символика Шенфлиса

и

Германа-Могена.

Разминка



Работая с кристаллами, исследователи обратили внимание на то, что элементы симметрии располагаются в них не случайно, а закономерным образом. Напомним, что **полный набор элементов симметрии строго определенным образом располагающихся по отношению друг к другу называется классом симметрии.**

Число классов симметрии бесконечно, но в кристаллах, где могут существовать только оси определенных целочисленных порядков, число классов закономерно сокращается до тридцати двух.

Вспомним

Четыре важнейших исторических репера

открытия 32 классов

Давайте вспомним!





*В 1826 г. немецкий кристаллограф
М. Л. Франкенгейм(1801-1869 гг.)
вывел 32 класса симметрии .*

Мориц Людвиг
Франкенгейм



*И. Ф. Х. Гессель (1796-1872 гг.)
в 1830 г. вывел 32 класса симметрии*

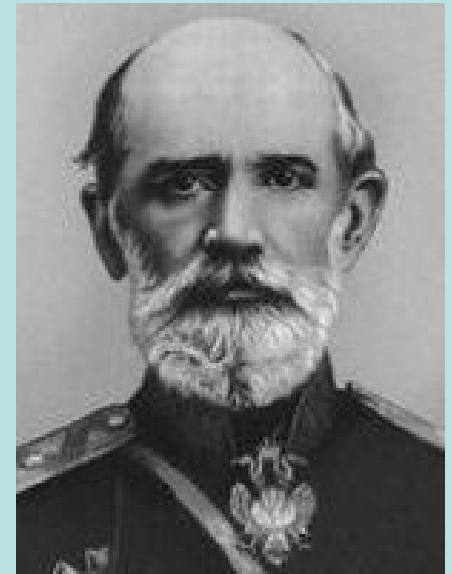
**Однако их работы были
недопоняты и забыты.**

В 1867 г. Аксель Вильгельмович

Гадолин дал строгий
математический вывод

32 групп симметрии.

(Петербургская АН в 1868 присудила
ему за это Ломоносовскую премию).

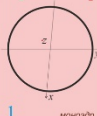
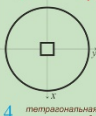
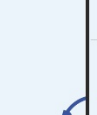
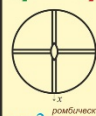
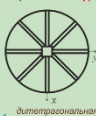
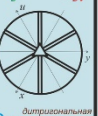
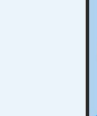
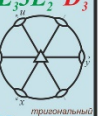
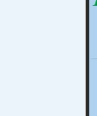
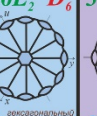
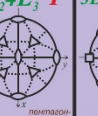
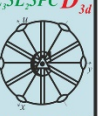
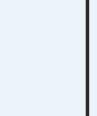
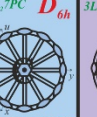


15 сентября 2026 года

студенты геологического факультета под
руководством Татьяны Александровны
повторили его вывод *32 групп симметрии.*

(Что им, **ВОЗМОЖНО**, зачтется на экзамене, если не
забудут все к тому времени).

32 КЛАССА СИММЕТРИИ КРИСТАЛЛОВ

Категория	НИЗШАЯ $a \neq b \neq c$			СРЕДНЯЯ $a = b \neq c$			ВЫСШАЯ $a = b = c$	
Сингония	Триклинная $\alpha \neq \beta \neq \gamma$	Моноклиная $\alpha = \beta = 90^\circ$ $\gamma \neq 90^\circ$	Ромбическая $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	Тетрагональная $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	Гексагональная $\alpha = \beta = 90^\circ$ $\gamma = 120^\circ$		Кубическая $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	
				Тригональная подсингония	Гексагональная подсингония			
C_n	$L_1 C_1$  1 монадр	$L_2 C_2$  2 осевой диэдр		$L_4 C_4$  4 тетрагональная пирамида	$L_3 C_3$  3 тригональная пирамида	$L_6 C_6$  6 гексагональная пирамида	Обозначения Символ Браве Символ Шенфлиса  Стереографическая проекция класса симметрии	
C_{ni} (S_n)	$L_1/C C_1/S_2$  $\bar{1}$ пинакOID	$L_2/P C_2/S_1$  m плоскостной диэдр		$L_4 C_{4i}/S_4$  $\bar{4}$ тетрагональный тетраэдр	$L_3 C_{3i}/S_6$  $\bar{3}$ ромбоэдр	$L_6 C_{6i}/S_3$  $\bar{6}$ тригональный бипирамид		
C_{nh}		$L_2 PC C_{2h}$  $\frac{2}{m}$ ромбическая призма		$L_4 PC C_{4h}$  $\frac{4}{m}$ тетрагональная бипирамида	$L_6 C_{3h}$  $\frac{6}{m}$ тригональная бипирамида	$L_6 PC C_{6h}$  $\frac{6}{m}$ гексагональная бипирамида		
C_{nv}			$L_2 P C_{2v}$  $mm2$ ромбическая пирамида	$L_4 P C_{4v}$  $4mm$ дитетрагональная пирамида	$L_3 P C_{3v}$  $3m$ тригональная пирамида	$L_6 P C_{6v}$  $6mm$ дигексагональная пирамида		
D_n			$3L_2 D_2$  222 ромбический тетраэдр	$4L_4 L_2 D_4$  422 тетрагональный трапецоэдр	$3L_3 L_2 D_3$  32 тригональный трапецоэдр	$6L_6 L_2 D_6$  622 гексагональный трапецоэдр	$3L_2 4L_3 T$  23 гектаэдр-трипентаэдр	$3L_4 4L_6 L_2 O$  432 гектаэдр-триоктаэдр
D_{nd}				$L_2 L_2 2P D_{2d}$  $\bar{4}m2$ тетрагональный октаэдр	$L_3 L_3 3PC D_{3d}$  $\bar{3}m$ тригональный октаэдр		$3L_4 4L_6 P T_d$  $\bar{4}3m$ гексаэдр-тетраэдр	
D_{nh}			$3L_3 PC D_{2h}$  mmm ромбическая бипирамида	$4L_4 5PC D_{4h}$  $\frac{4}{m}mm$ дитетрагональная бипирамида		$L_3 L_4 P D_{3h}$  $\frac{6}{m}mm$ дитригональная бипирамида	$6L_6 7PC D_{6h}$  $\frac{6}{m}mm$ дигексагональная бипирамида	$3L_4 4L_3 PC T_h$  $m\bar{3}$ кубооктаэдр

Скачать оригинал этой таблицы в формате А4 можно по гиперссылке <http://cryst.geol.msu.ru/appliances/pics/32.jpg>.

Обещанные Татьяной Александровной ассоциации про Крымскую войну,

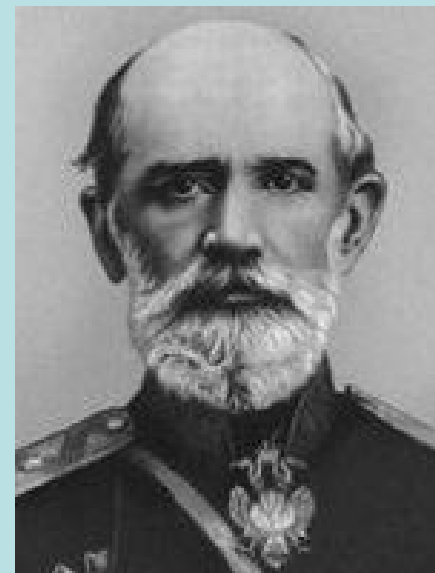


А.В.Гадолина и его вклад в кристаллографию

Только в 1867 г. Аксель
Вильгельмович Гадолин дал
строгий математический вывод
32 групп симметрии.

(Петербургская АН в 1868 присудила ему
за это Ломоносовскую премию).

Делал с дедом уроки.
Всё доходчиво объяснил.
Но как же теперь затылок
болит!



(1828-1892)

Его награды: (Российской империи):

Орден Святого Георгия 4-й степени (1871) Орден Святой Анны 3-й степени (1859)
Орден Святого Владимира 4-й степени (1862) Орден Святой Анны 2-й степени (1864)
Орден Святого Владимира 3-й степени (1868) Орден Святого Станислава (Российская империя) 1-й степени (1870) Орден Святой Анны 1-й степени (1872)
Орден Святого Владимира 2-й степени (1875) Орден Белого орла (Российская империя) (1879) Орден Святого Александра Невского (1884)

+

Французский Орден Почетного Легиона командорский крест (1867)
Шведский Орден Меча Большой крест (1885)

Аксель Вильгельмович Гадолин

- дал **точный и ясный** вывод 32 классов симметрии, проанализировав возможные сочетания элементов симметрии;
- доказал при помощи теоремы Эйлера для выпуклых многогранников, что в кристаллах невозможны оси пятого и выше шестого порядков;
- применил метод стереографической проекции, наглядно представляющий элементы симметрии;
- ввел понятие инверсионной оси, что позволило учесть не только обычные оси симметрии, но и комбинации поворота с отражением в плоскости или в точке.

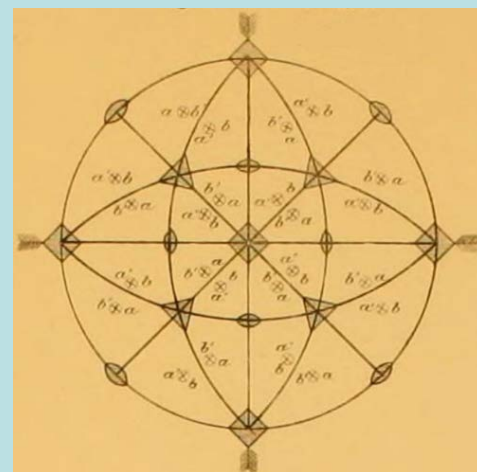


Святи Его Величества генералъ-маіору
АКСЕЛЬ ВІЛЬГЕЛЬМОВИЧЪ
ГАДОЛИНЪ.

Съ фотографіи
Захарьина.

Собственность
А. А. Гадолина.

1828-1892 гг.



Основные достижения в металлургии

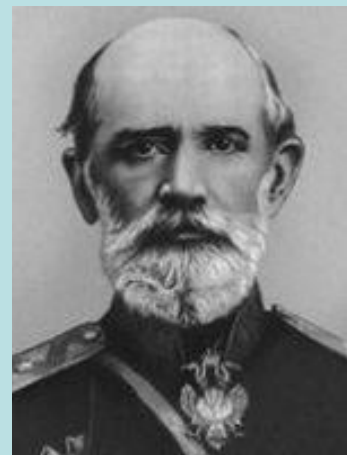


- **«Закон А. В. Гадolina о наивыгоднейших радиусах скреплённого ствола».** Суть его метода заключалась в том, что на ствол орудия в горячем состоянии надевали цилиндры. При охлаждении они сжимали внутренние слои металла, что значительно повышало прочность ствола. Такие орудия, названные **«скреплёнными»**, выдерживали гораздо более высокое давление пороховых газов. Это позволило увеличить мощность и дальность орудий без существенного увеличения их веса.
- **Усовершенствование технологии производства орудий.** С 1877 года на основе его работ проектировалась русская крупнокалиберная артиллерия.
- **Исследования в области механического испытания материалов.**
- **Работы в сфере чугунолитейного производства.** В 1874 году Гадолин опубликовал курс лекций **«Чугунолитейное производство»**, в котором систематизировал все этапы работы с чугуном: от получения литейного чугуна и изготовления моделей до формовки, отливки и окончательной отделки изделий.
- **Внедрение новых технологий на производстве.** Гадолин осуществил переход от казённого труда к вольнонаёмным рабочим и оснастил арсеналы паровыми машинами

Аксель Вильгельмович Гадолин (1828-1892)

русский учёный в области артиллерийского вооружения, механической обработки металлов, минералогии и **кристаллографии**, с 1875 года действительный член Петербургской АН, с 1873 г. член-корреспондент, генерал от артиллерии (1890).

За оказанные военные подвиги **1854-1855** годов награждён орденом св. Георгия 4-й степени (не сразу, а в 1871).



«Крымская война» 1853-1856 - театры военных действий

Черное море



Белое море



Зона ответственности Гадолина.
Минимум ничья

Тихий океан



Говоря языком КХЛ, в Крыму уступили в каком-то дальнем овертайме

Но были и приятности: 12 мая 1854 в условиях густого тумана в 6 верстах от Одессы сел на мель английский 16-пушечный паруснофрегат Tiger. 225 человек экипажа и пушки были взяты в русский плен, а само судно потоплено

Оборона Камчатки является одним из значимых сражений Крымской войны и второй половины XIX века. Петропавловская победа 1854 года – это «луч свет», который вдруг прорвался «сквозь мрачные тучи». Чистая победа, да еще с унижением в следующем году противника, путающегося взять реванш



Рисунг, подв. Москва 8 Октября 1854 г. Царство...

Рис. Москва 8 Октября 1854 г. в Местности Кавказа...

Нападеніе Англичанъ на Ставропигіальный Соловецкій Монастырь.

1854 г. Іюля 6^{го} дня въ 8^{мъ} часу до полудня, два Англіійскія парахода, подойдя къ монастырю стали на якорь, тотчасъ настоятель монастыря, Александръ по отслуженіи молебна, зѣлавъ крестнымъ ходъ по кругу монастыря по стѣнѣ ограды. сказалъ увѣщаніе нижнимъ чинамъ и живущимъ въ монастырь, стать храбро заѣмъ и Св. обитель, на другой день непріятель открылъ кононаду продолжавшуюся 9^{1/2} часовъ, ядрами, бомбами, гранатами, картечью и калеными Ядрами съ нашей стороны отъ стрѣливались 8^е пушками съ ограды монастыря, и Арти-лерійскими 9^е орудіями съ батарей, где не пріятель, не причинивъ никакого вреда съ стыдомъ отплылъ назадъ.

В 1854 г. у Соловков появляются английские пароходофрегаты «Бриск» и «Миранда». Происходит перестрелка с англичанами в гавани Благополучия и обстрел Соловецкого монастыря.

Надпись на Переговорном камне:

Зри сие. Во время войны Турции, Франции, Англии и Сардинии с Россиею здесь был переговор Настоятеля Архим. ~~Александр~~ с Английским офицером Антоном Н. 22 июня 1855 в среду в 11 час. по полудни по записке начальника неприятельской военной эскадры в Белом море требовавшего от монастыря быков записка представлена Святейшему Синоду. После переговоров, благополучных для обители, настоятель, возвратясь в монастырь в 1 час, служил в тот день в Успенском соборе литургию и молебств, служба кончилась в 4 часа. В эту неделю три дня пост был в обители и скитам и Господь в это лето не допустил воюющим нарушить иноков покой, как без милосердия они поступили в 1854. А.А.



В июне 1855 г. корабли англичан снова появляются у монастыря. Рандеву состоялось 22 июня на нейтральной полосе. Тема переговоров была одна: английский офицер требовал волов. Соловецкий **настоятель** отвечал, что коров они отдать не могут, так как они кормят молоком монахов.

Английский офицер пробовал припугнуть собеседника. Он говорил:

"Мы отсюда поплывем, а через три недели явится здесь сильный флот, где будет наш главный начальник на таком корабле, что вы от одного взгляда будете страшиться, вы должны к нему с белым флагом прибыть..."

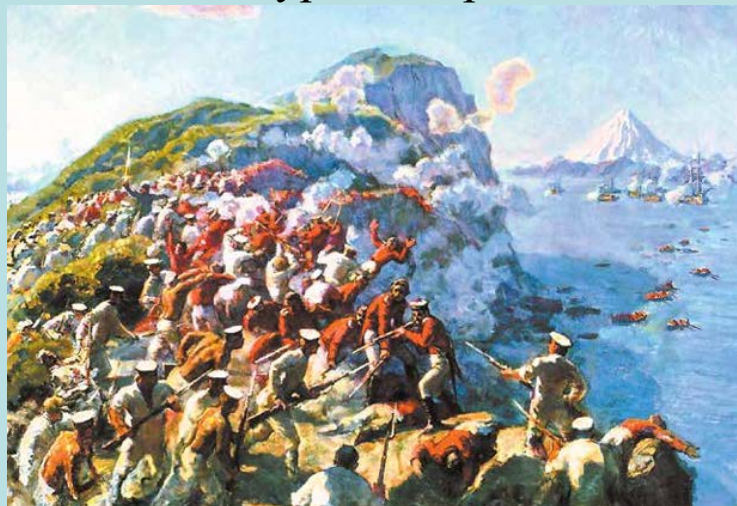
Не подействовало и это средство. Уполномоченный настоятель непоколебимо стоял на своем, заявив, **что коров не даст (и не дал).**



**Василий
Степанович Завойко**

Петропавловск был крайне слабо укреплён, но в июле 1854 года в город, совершив героическое полукругосветное плавание, пришёл фрегат «Аврора». 5 августа военный транспорт «Двина» доставил еще 350 солдат. Даже после этого гарнизон порта вместе с экипажами кораблей насчитывал всего 988 человек. В подготовку к обороне включилось всё население города и его окрестностей (около 1600 человек). Работы по сооружению семи береговых батарей велись два месяца круглые сутки. Защитники вырубали в скалах площадки для батарей, неприступные для морского десанта, снимали с кораблей орудия, вручную перетаскивали их по крутым склонам сопки и устанавливали на берегу.

Утром 30 августа англо-французская эскадра вошла в Авачинскую бухту. Эскадра располагала 200 орудиями, её личный состав насчитывал около 2700 человек, в том числе специально подготовленные десантники. Англо-французы предприняли две неудачные попытки штурма Петропавловска.



Рукопашная второго штурма на Никольской сопке закончилась, несмотря на трехкратное численное превосходство, полным поражением англичан и французов. Потеряв около 400 человек убитыми, 4 пленными и около 150 ранеными, десант вернулся на корабли. 7 сентября англо-французская эскадра покинула бухту.

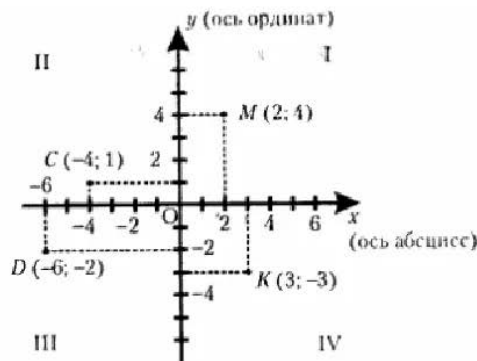
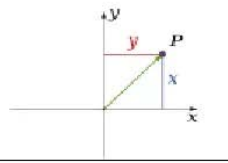
Разминка окончена



***Координатные системы.
Категории.
Сингонии***

Упорядоченная система двух или трёх *(а, кстати, слабо четырех?)* пересекающихся под 90° друг другу осей с общим началом отсчёта и *общей единицей длины* называется **декартовой системой координат**. Из школьной математики и творчества барда-геолога А.Гордницкого она хорошо известна.

Рене Декарт
(1596-1659)



*Давайте отложим вчерашние планы
До нового марта,
Дожди, бездорожье и рыжее пламя
В системе Декарта.*

<https://gorodnitsky.com/songs/%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0-%D0%B4%D0%B5%D0%BA%D0%B0%D1%80%D1%82%D0%B0/?ysclid=l8kdzx16cx441782723>

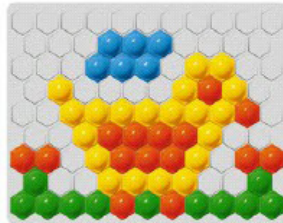
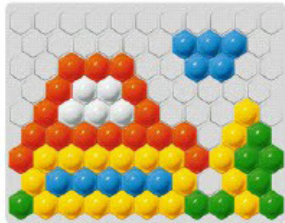
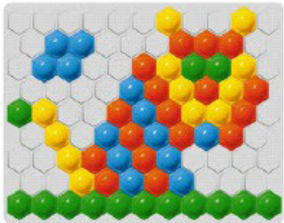
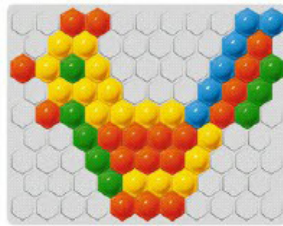
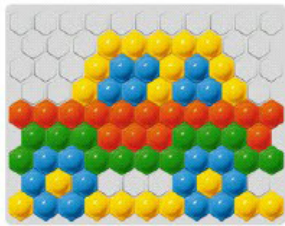
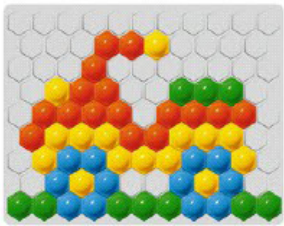
В кристаллографии такой координатной системой для всех осей пользоваться неудобно, так как прямоугольная система координат с одинаковыми масштабами по осям часто не соответствует реальной симметрии кристалла.



Мне неудобно!

Что бы не было противоречия между координатной системой и симметрией

координатные оси выбирают по особым направлениям в кристалле



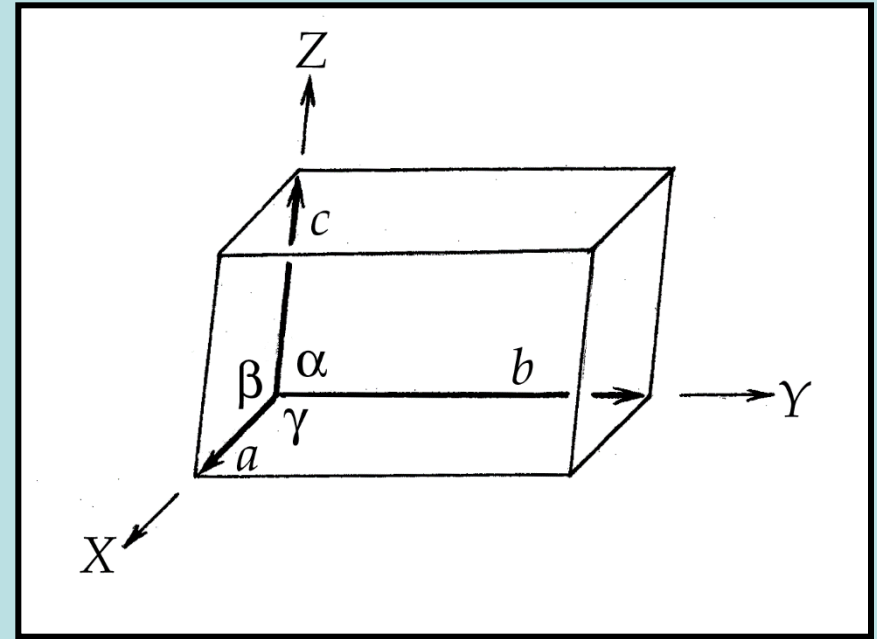
В кристаллографии **координатные оси совмещаются с особыми направлениями в кристалле.** При недостаточном их количестве (т.е. меньше трех) координатные оси выбираются по **действительным** или **возможным** ребрам кристалла.

Особые направления — оси симметрии (поворотные и инверсионные). Причем **предпочтение отдается инверсионным осям.**

Единичные направления — особые направления, не повторяющиеся в кристалле



Таким образом, в
кристаллографии
масштабы и углы
между
координатными
осями
задают элементы
симметрии



Основные характеристики координатной системы:

Метрические параметры (масштабные отрезки по координатным осям): ***a*** (*масштаб по x*), ***b*** (*по y*), ***c*** (*по z*)

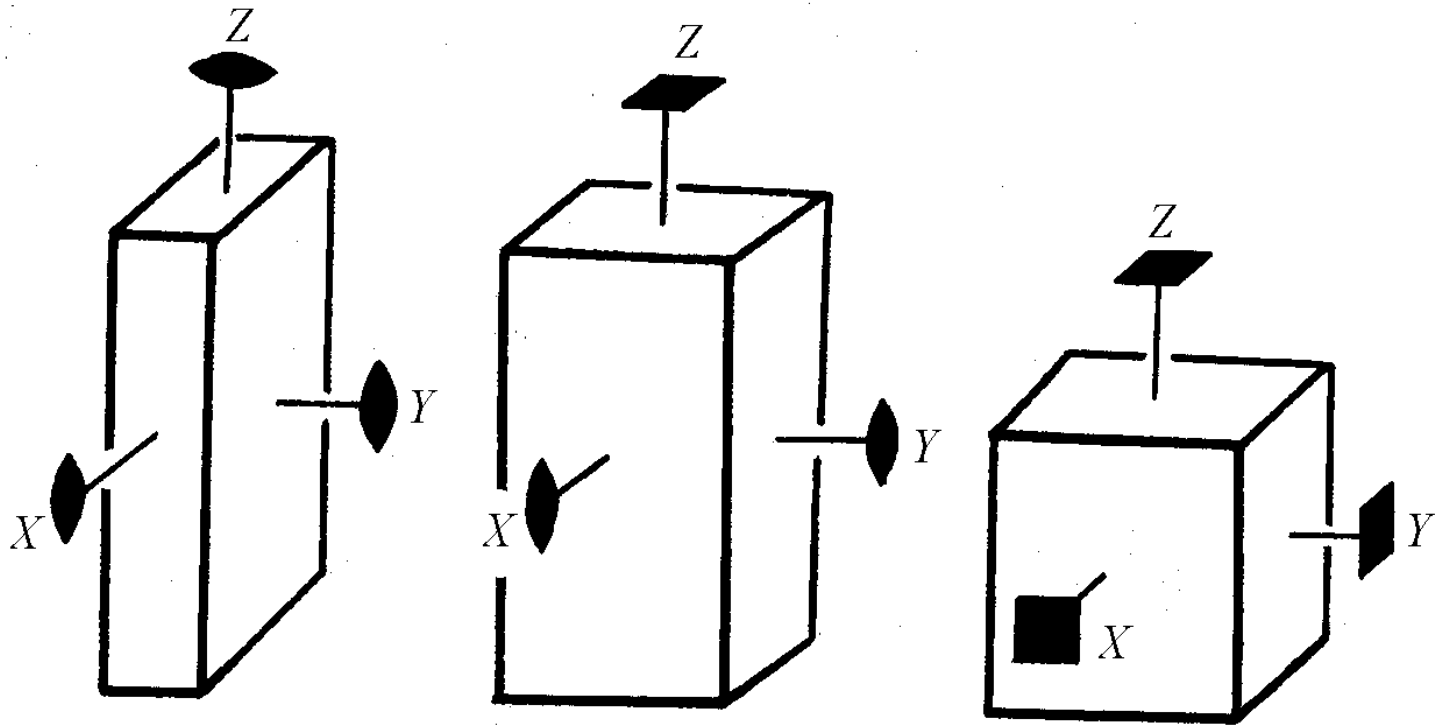
Угловые параметры (углы между координатными осями): ***α*** (*Y ∧ Z*), ***β*** (*X ∧ Z*), ***γ*** (*X ∧ Y*)

По степени эквивалентности координатных направлений (условно *равенство единичных векторов – масштабов* a , b , c – по соответствующим координатным осям X , Y , Z) все 32 класса симметрии можно разделить на три группы: **3 категории.**

$$a \neq b \neq c$$

$$a = b \neq c$$

$$a = b = c$$



Категория – объединение классов симметрии по принципу соотношения масштабных отрезков

1) **низшая категория** $a \neq b \neq c$

полная неэквивалентность координатных направлений (которая объясняется отсутствием в них **осей высшего порядка** (>2)).

2) **средняя категория** $a = b \neq c$

частичная эквивалентность (присутствие в их группах симметрии одной **оси высшего порядка**)

3) **высшая категория** $a = b = c$

полная эквивалентность (несколько **осей высшего порядка, в т.ч. четыре оси 3-его порядка**)

Категории, в свою очередь, по угловым характеристикам делятся на **сингонии** - семейство классов симметрии с единой координатной системой: **всего 6 сингоний.**



Низшая категория $a \neq b \neq c$

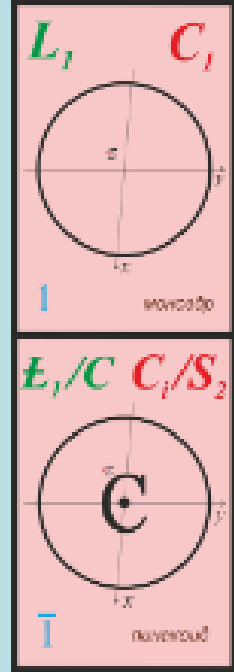
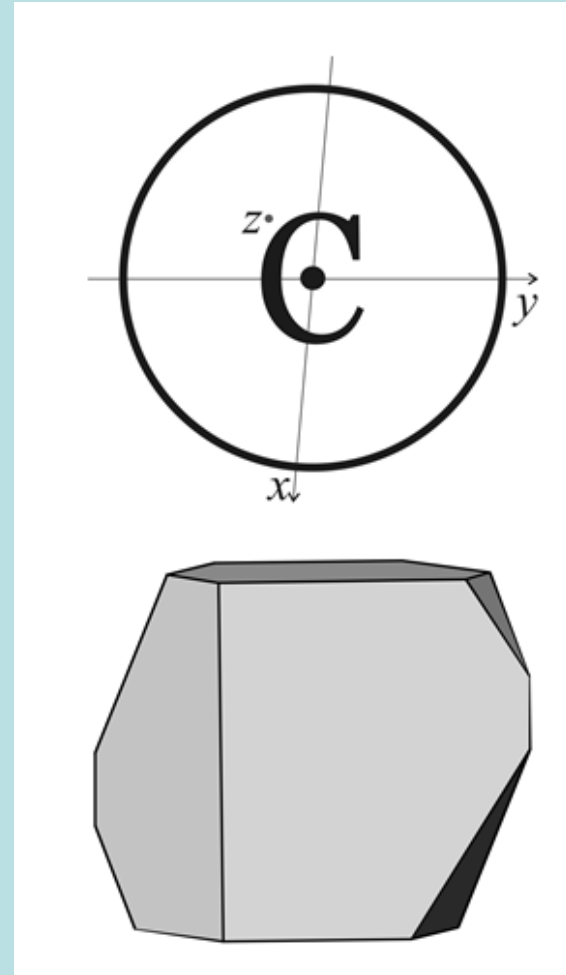
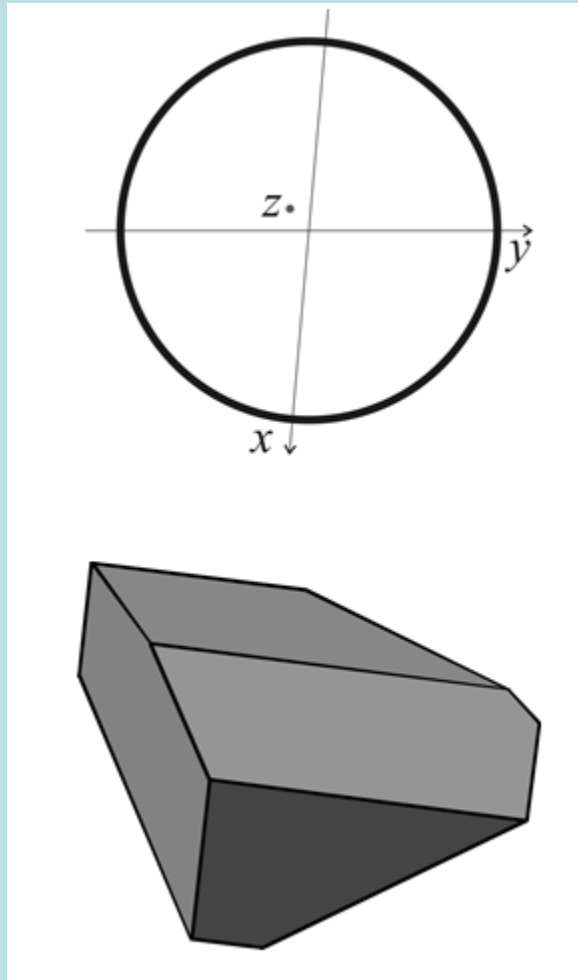
1) $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$, $a \neq b \neq c$

Ромбическая сингония (english **orthorombic**)

2) $a \neq b \neq c$, $\alpha = \beta = 90^\circ$ и углом моноклинности $\gamma \neq 90^\circ$ **Моноклинная сингония**

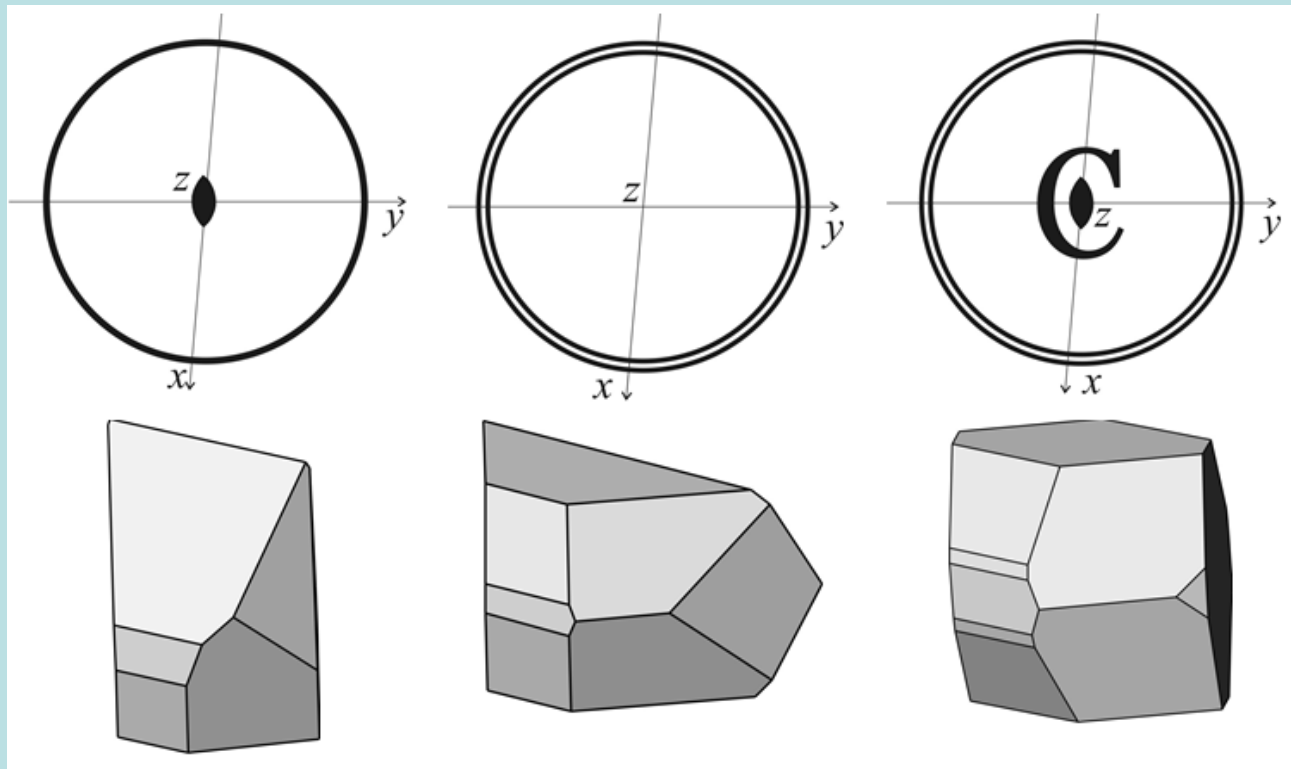
3) $a \neq b \neq c$, $\alpha \neq \beta \neq \gamma$. **Триклинная сингония**

Триклинная сингония



При отсутствии в кристаллах особых направлений (т. е. либо в кристалле вообще нет элементов симметрии, либо есть только центр инверсии - C) координатные оси выбирают по действительным или **возможным** ребрам кристалла, что приводит к координатному реперу самого общего вида

Моноклинные сингония



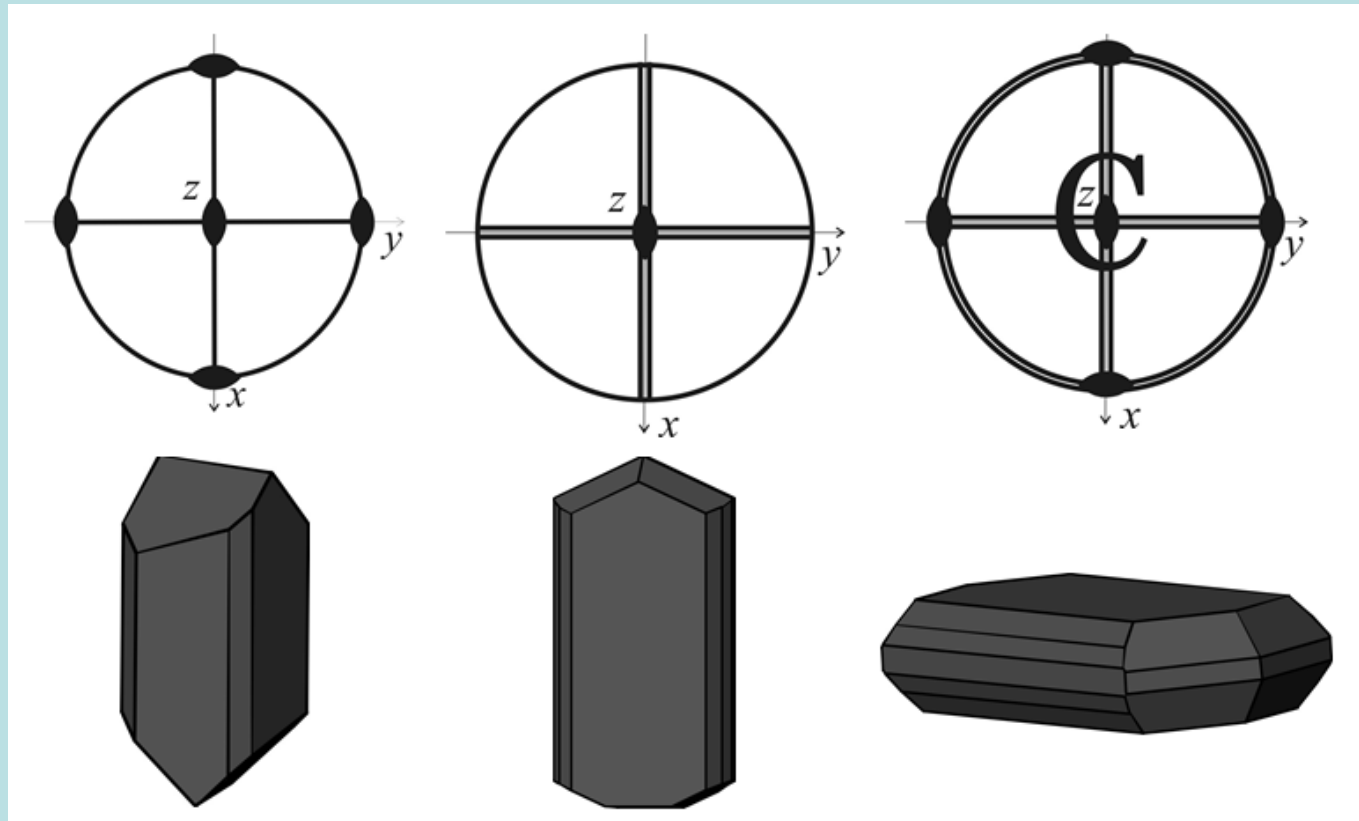
В кристаллах моноклиной сингонии имеется одно особое направление, вдоль которого выбирается одна из координатных осей. Две другие располагаются в плоскости, перпендикулярной особому направлению, и выбираются по возможным или действительным ребрам кристалла.

слева) единственное особое направление ось 2-го порядка (вдоль оси Z Y -минералогии);

в центре) нормаль к плоскости симметрии P (Z);

справа) симметрия L_2PC одна координатная ось (Z) совмещается с осью 2-го порядка и нормалью к плоскости, перпендикулярной этой оси

Ромбическая сингония



$L_2 2P$ C_{2v}	
$mm2$ ромбический пирит	
$3L_2$ D_2	
222 ромбический тетраэдр	
$3L_2 3PC$ D_{2h}	
mmm ромбическая булырьница	

слева) в кристалле с симметрией $3L_2$ все три координатные направления соответствуют трем осям 2-го порядка;

в центре) в кристалле с симметрией $L_2 2P$ ось Z выбирается вдоль вертикальной оси 2-го порядка, две другие (X и Y) – по нормальям к плоскостям симметрии;

справа) в кристалле с симметрией $3L_2 3PC$ координатные направления связаны с направлениями, каждое из которых представлено осью 2-го порядка, совпадающей с нормалью к плоскости симметрии, перпендикулярной этой оси.

- Название «**ромбическая сингония**» связано с поперечным сечением в виде ромба простых форм, присутствующих в огранке этих классов (ромбическая бипирамида, ромбическая призма и др.).
- Поэтому весьма часто используемый в научных публикациях термин «**орт ромбическая сингония**», являющийся, по существу механическим переводом с английского языка слова orthorombic, выглядит как искусственный американизм.
- По логике внедрения этого термина столицу России следует даже на русском языке называть словом «**Москау**», а столицу Китая - не Пекином, а «**Бейджюнгом**»



-Ты слушай меня, Легкоступов. В русском языке есть слова, их там много, когда их составляешь вместе - получают предложения, где есть подлежащее, сказуемое и прочая светотень! И всё это - ВЕЛИКИЙ РУССКИЙ ЯЗЫК!!! Ты понял меня Легкоступов?

- Так вот, у нас Великий Русский Язык! В нем переставь местоимение, сказуемое и подлежащее - и появится интонация!!!
- "Наша Маша горько плачет!" или "Плачет наша Маша - горько" Ты понимаешь? Это-ж поэзия! Это-ж - былины,

- А есть вообще предложения в одно слово: Моросит. Вечереет. Смеркается. Ты чувствуешь, Легкоступов?
- Так точно, товарищ командир!

Звучат во всех краях планеты
Без перевода, как **Москва**,
Большевики, Октябрь, Советы,
Мир, спутник, - русские слова.

*Александр Твардовский
О новом слове (1959 г.)*



*орт*оромбическая
сингония -
*это вопиющая
безграмотность!*

(все равно что Москву назвать Москау)

Средняя категория $a = b \neq c$

1) **Тетрагональная сингония**

$$a = b \neq c, \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$$

2) **Гексагональная сингония**

$$a = b \neq c, \alpha = \beta = 90^\circ, \gamma = 120^\circ$$

Внутри **гексагональной сингонии** выделяют две **подсингонии**:

2а) **собственно гексагональную** подсингонию

(если порядок главной оси равен 6)

2б) **тригональную** подсингонию

(если порядок главной оси равен 3).

Термин **Тригональная сингония** -
на структурном уровне
кристаллографически неинтеллигентен
(хотя, увы, весьма распространен)

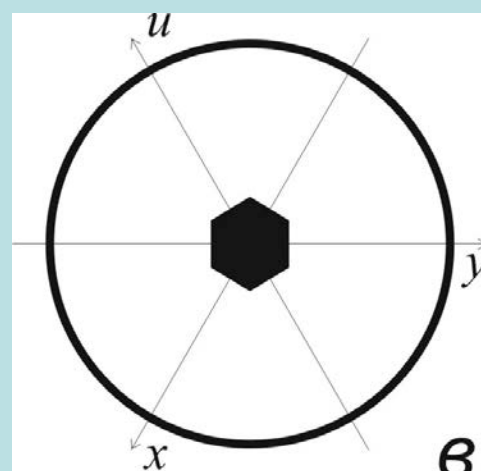
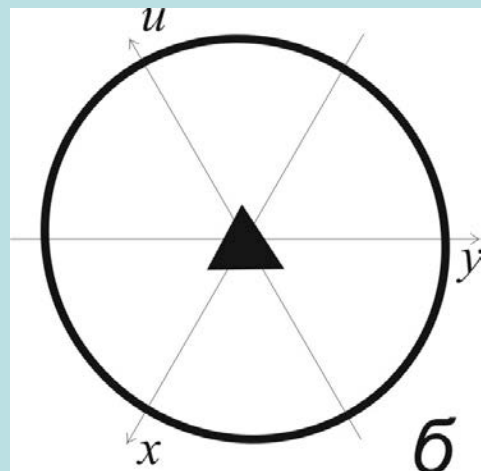


Официальный сайт международного союза
кристаллографов:

Note: *there is no "trigonal" lattice system. To
avoid confusion of terminology,
the term "trigonal lattice" is not used.*

*In three dimensions, the hexagonal and
trigonal crystal systems are combined into
one hexagonal crystal family*

Тригональная подсингония	$L_3 C_3$	
3	тригональная подсингония	
$L_3 C_3/S_6$	C_3/S_6	
$\bar{3}$	тригональная подсингония	
$L_3 3P C_3$	C_3	
$3m$	тригональная подсингония	
$L_3 3L_2 D_3$	D_3	
32	тригональная подсингония	
$L_3 3L_2 PC D_3$	D_3	
$\bar{3}m$	тригональная подсингония	



$$a = b \neq c, \alpha = \beta = 90^\circ, \gamma = 120^\circ$$



**тригональная
подсингония**

(порядок главной
оси равен 3)

**гексагональная
подсингония**

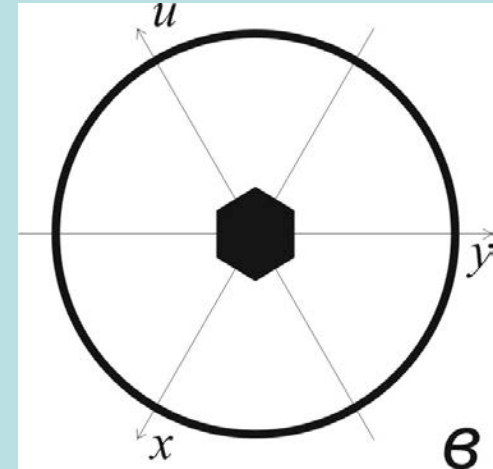
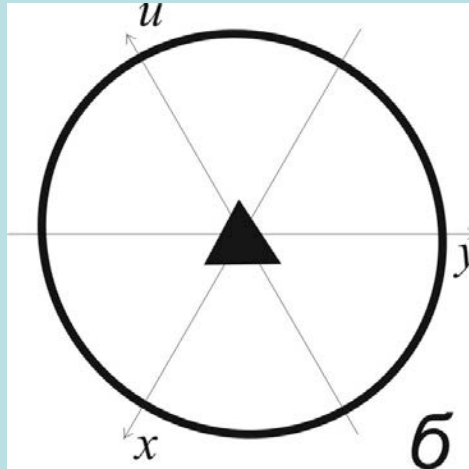
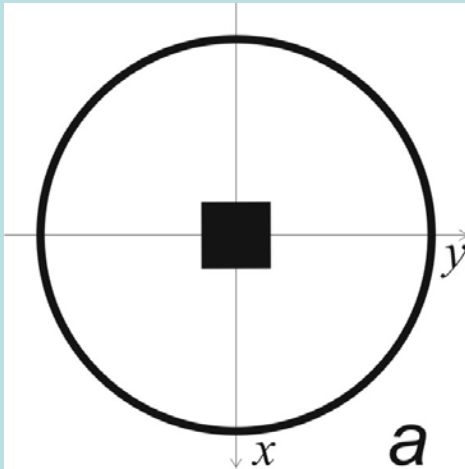
(порядок главной
оси равен 6)

Гексагональная подсингония		
	$L_6 C_6$	
	6	гексагональная подсингония
	$L_6 C_6/S_6$	
	$\bar{6}$	гексагональная подсингония
$L_6 C_3$	C_3	
6	гексагональная подсингония	
$L_6 PC C_6$	C_6	
$6m$	гексагональная подсингония	
	$L_6 6P C_6$	
	$6mm$	гексагональная подсингония
	$L_6 6L_2 D_6$	
	622	гексагональная подсингония
$L_3 3L_2 AP D_3$	D_3	
$\bar{3}m2$	тригональная подсингония	
$L_6 6L_2 PC D_6$	D_6	
$6/mmm$	гексагональная подсингония	

Средняя категория $a = b \neq c$

Из условия эквивалентности двух горизонтальных координатных направлений ($a = b$) следует, что симметрия кристаллов средней категории описывается группами с единственной осью высшего порядка. С этой осью совмещают координатное направление Z, ориентируя его вертикально. Две другие оси – X и Y – выбирают в плоскости, перпендикулярной главной оси, по осям 2-го порядка или нормалям к плоскостям. Если же горизонтальных особых направлений в кристалле нет, то координатные оси выбирают по ребрам. Угол γ между осями X и Y определяется порядком главной оси и равен 90° в случае присутствия оси 4-го порядка и 120° , если присутствуют оси 3-го и 6-го порядков.

Средняя категория $a = b \neq c$



Обратим внимание, что в координатной системе в гексагональной сингонии появляется еще одна ось (u) в горизонтальной плоскости, перпендикулярная оси z . С осями x и y эта ось u образует угол в 120° . На первый взгляд это глупость: пространство однозначно описывается тремя различными координатными направлениями. Но как мы вам покажем чуть позже, введение этой дополнительной оси облегчает геометрические процедуры в кристаллографии, другими словами **кристаллографически оправдано**.

Высшая категория $a = b = c$

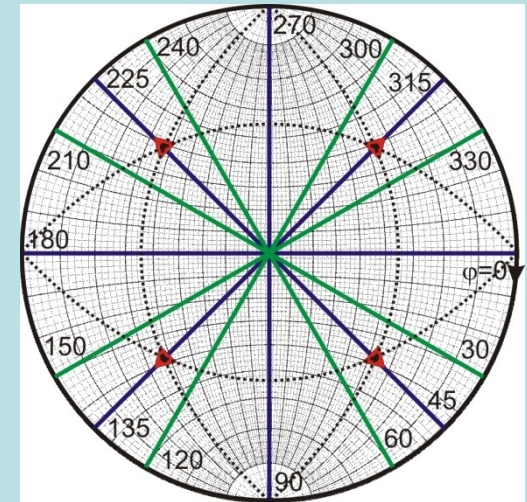
1) **Кубическая сингония:**

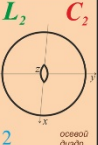
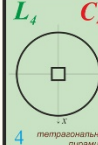
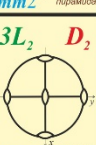
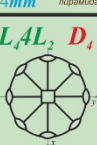
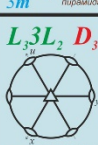
$$a = b = c, \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$$

Пока только она

INTRIGA

Равенство координатных осей приводит к тому, что равнонаклонно к координатным направлениям возникает наклонная ось третьего порядка. Если размножить ее элементами симметрии, находящимися в координатных осях, то получится 4 наклонные оси третьего порядка, **равноудаленных** от различных выходов координатных направлений. На трафарете, эти позиции осей третьего порядка отмечены красными треугольниками.



Категория	НИЗШАЯ $a \neq b \neq c$			СРЕДНЯЯ $a = b \neq c$			ВЫСШАЯ $a = b = c$	
Сингония	Триклинная $\alpha \neq \beta \neq \gamma$	Моноклиная $\alpha = \beta = 90^\circ$ $\gamma \neq 90^\circ$	Ромбическая $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	Тетрагональная $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	Гексагональная $\alpha = \beta = 90^\circ$ $\gamma = 120^\circ$		Кубическая $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	
					Тригональная подсингония	Гексагональная подсингония	Обозначения Символ Браве Символ Шенфлиса  Стереографическая проекция класса симметрии	
C_n	$L_1 C_1$  1 монакср	$L_2 C_2$  2 осевой диакср		$L_4 C_4$  4 тетрагональный тетраэдр	$L_3 C_3$  3 тригональный тетраэдр	$L_6 C_6$  6 гексагональный тетраэдр		
C_{ni} (S_n)	$L_1/C C_1/S_2$  1 циклоид	$L_2/P C_2/S_1$  2 плоскостной диакср		$L_4 C_4i/S_4$  4 тетрагональный тетраэдр	$L_3 C_3i/S_6$  3 ромбоид	$L_6 C_6i/S_3$  6 тригональный тетраэдр	Международный символ	Форма общего положения
C_{nh}		$L_2PC C_{2h}$  2 ромбическая призма		$L_4PC C_{4h}$  4 тетрагональная бипирамида	$L_3PC C_{3h}$  3 тригональная бипирамида	$L_6PC C_{6h}$  6 гексагональная бипирамида		
C_{nv}			$L_22P C_{2v}$  2 ромбическая пирамида	$L_44P C_{4v}$  4 тетрагональная пирамида	$L_33P C_{3v}$  3 тригональная пирамида	$L_66P C_{6v}$  6 гексагональная пирамида		
D_n			$3L_2 D_2$  3 ромбический тетраэдр	$4L_4L_2 D_4$  4 тетрагональный тетраэдр	$3L_3L_2 D_3$  3 тригональный тетраэдр	$6L_6L_2 D_6$  6 гексагональный тетраэдр	$3L_4L_3 T$  3 тетраэдр	$3L_4L_6L_2 O$  3 октаэдр
D_{nd}				$L_22L_2P D_{2d}$  4 тетрагональный октаэдр	$L_33L_3PC D_{3d}$  3 тригональный октаэдр		$3L_4L_6P T_d$  3 гексагональный тетраэдр	
D_{nh}			$3L_23PC D_{2h}$  3 ромбическая бипирамида	$4L_4L_3PC D_{4h}$  4 тетрагональная бипирамида		$L_33L_4P D_{3h}$  3 тригональная бипирамида	$L_66L_7PC D_{6h}$  6 гексагональная бипирамида	$3L_4L_3PC T_h$  3 тетраэдр

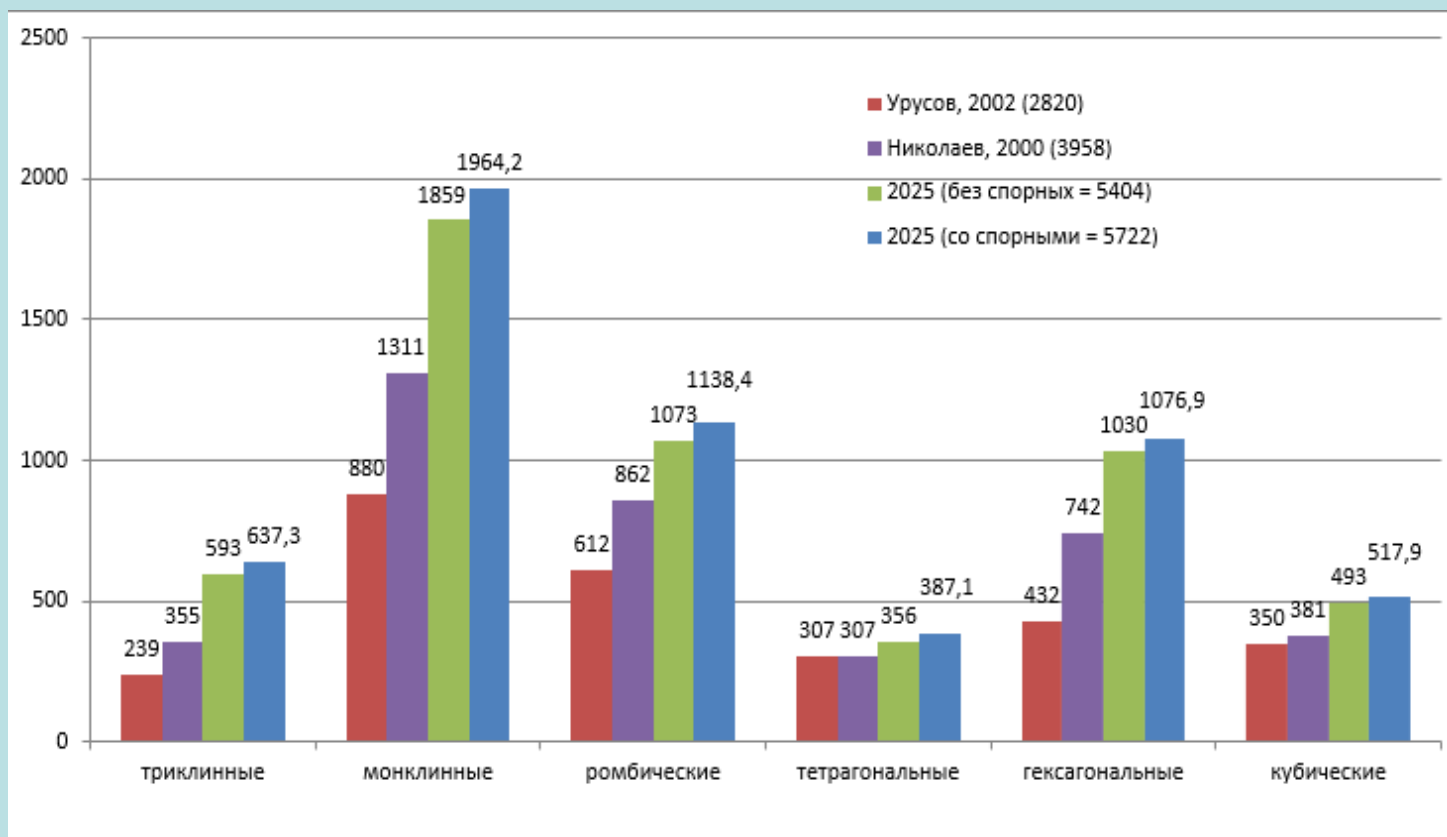
Распределение классов по сингониям

Триклинная –	2
Моноклиная –	3
Ромбическая –	3
Тетрагональная -	7
Гексагональная -	12
(7+5)	
Кубическая	- 5

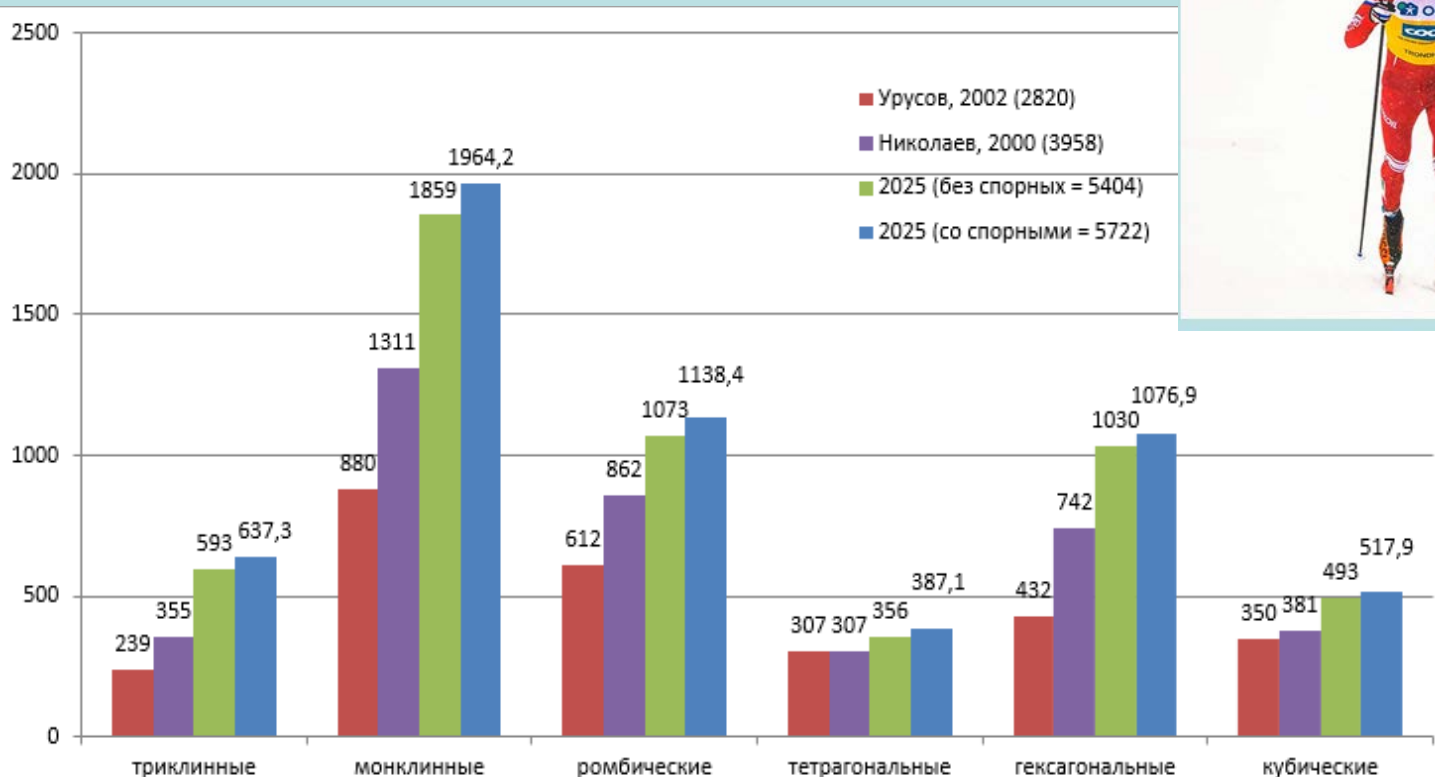
В целом, если говорить о распространенности **минералов** различных сингоний в природе, то можно отметить следующее. На настоящий момент в природе известно около 6000 минералов. Среди них резко преобладают кристаллы низшей и средней категорий.

Лидер - моноклинная сингония,
намного опережая ромбическую по
распространенности.

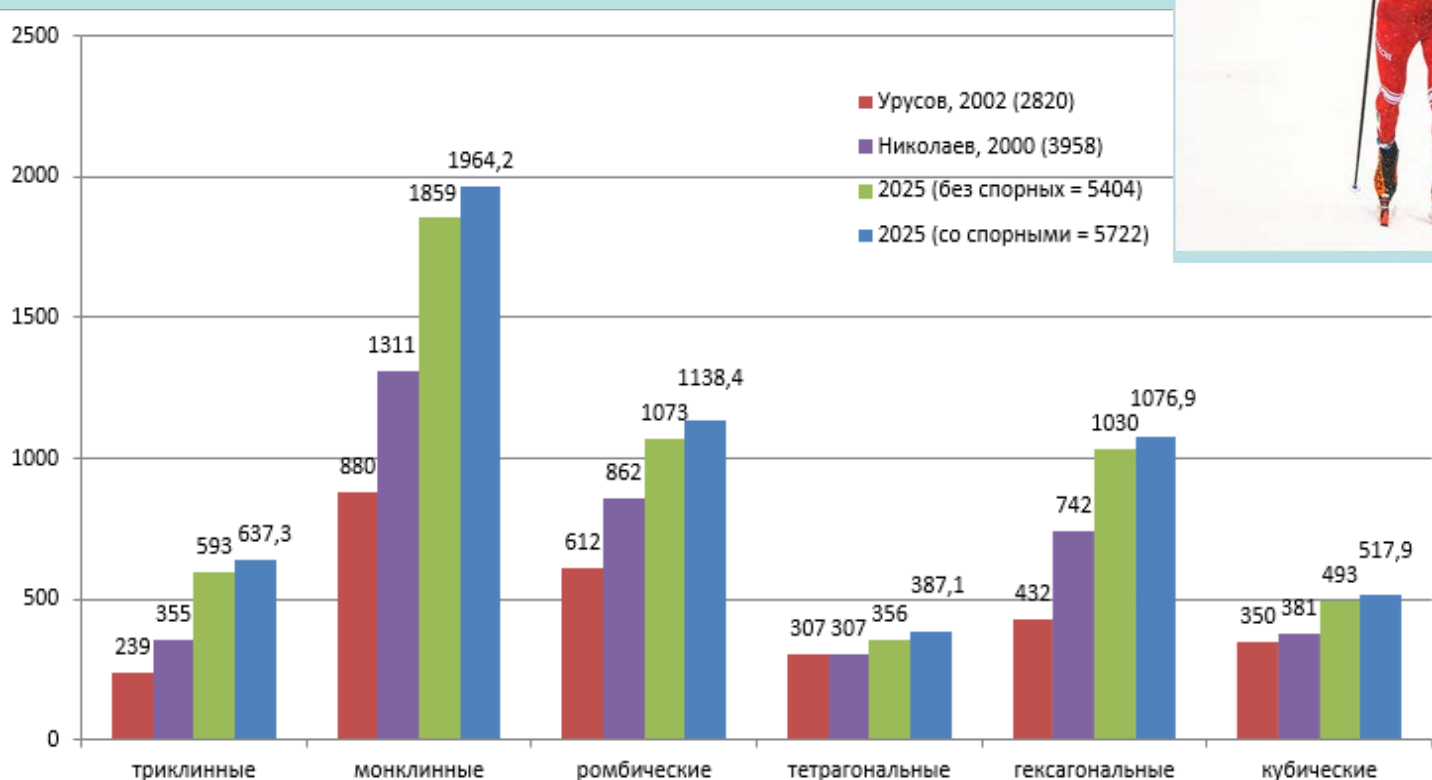
- Из 6006 записей в анализируемой базе данных [[IMA Mineral List](#)] однозначно привязано к определенной сингонии 5404 минерала, а неоднозначно – 5722 минерала. Как видно, добавление дробных неоднозначных определений абсолютно не повлияло на общую картину распределения по сингониям и тем более, на их ранги.



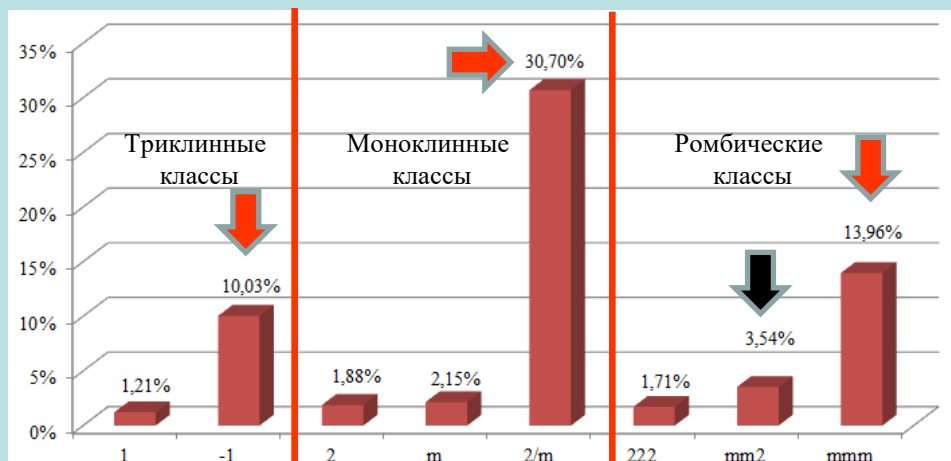
- Произошли изменения рангов по сравнению с выборкой 2002 года: триклинная сингония сменила низший 6-ой ранг на 4-ый, обогнав и кубическую и тетрагональную сингонию.
- Также отметим увеличившийся разрыв между моноклинной (ранг 1) и ромбической (ранг 2) сингонией. Если в 2002 году разница между ними составляла 9,5%, то в настоящее время она выросла до 14,5%.



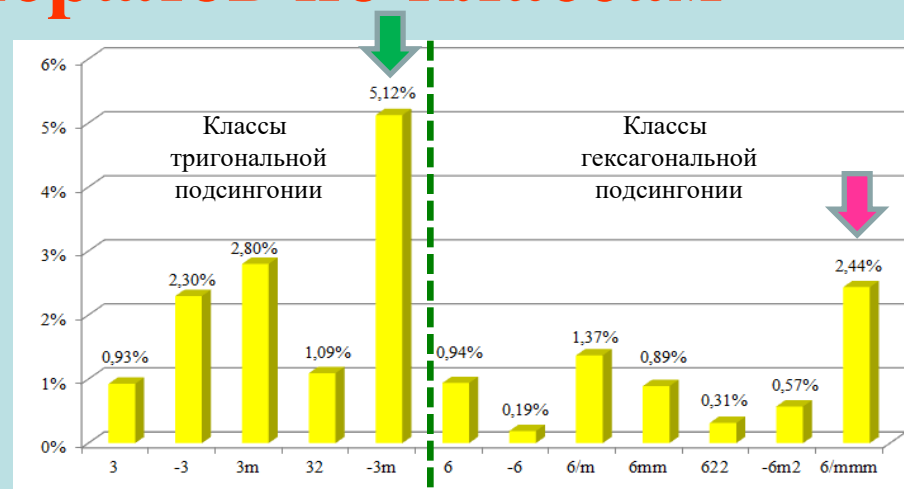
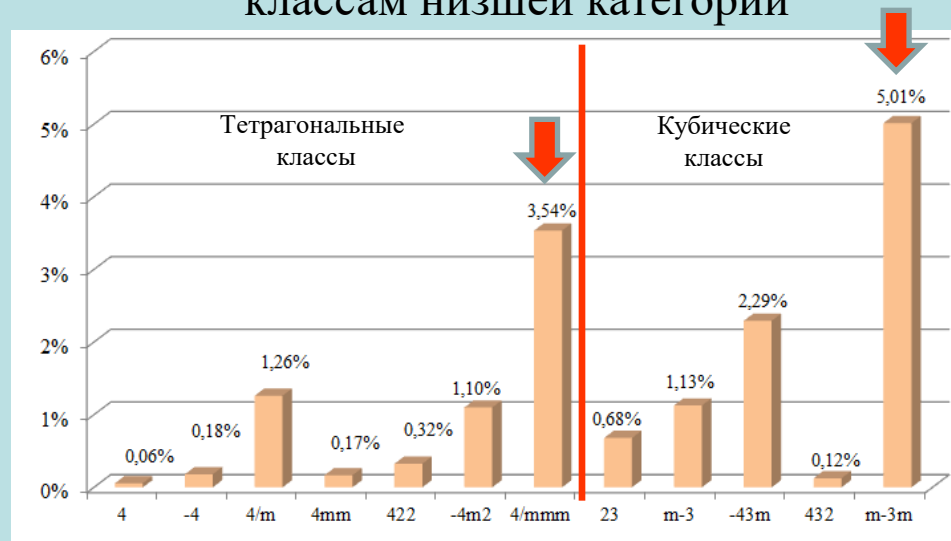
- С другой стороны, если в 2002 году разница между ромбической и гексагональной сингонией (ранг 3) была весьма существенна и составляла 180 минеральных видов (6,4% выборки), то в 2025 году разрыв сильно уменьшился и составил всего 61 минеральный вид (1,07%).



Распределение минералов по классам



Распределение минеральных видов по классам низшей категории



Распределение минеральных видов по классам гексагональной сингонии

Распределение минеральных видов по классам тетрагональной и кубической сингонии

Лишь семь классов обладают повышенной распространенностью ($100/32 = 3,1\%$). Явным лидером является голоэдрический моноклинный класс $2/m$ на долю которого приходится более 30% всех кристаллических структур минералов.

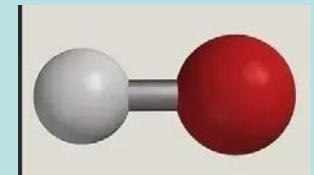
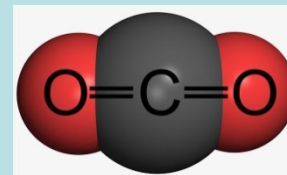
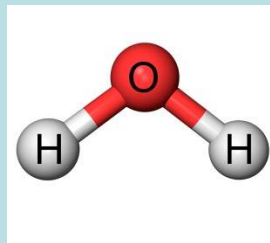
А из семи выявленных распространенных классов шесть являются голоэдрическими (при этом отмечены все сингонии; гексагональная сингония представлена голоэдрией тригональной подсингонии). Голоэдрический класс $6/mmm$ гексагональной подсингонии не попал в число распространенных.



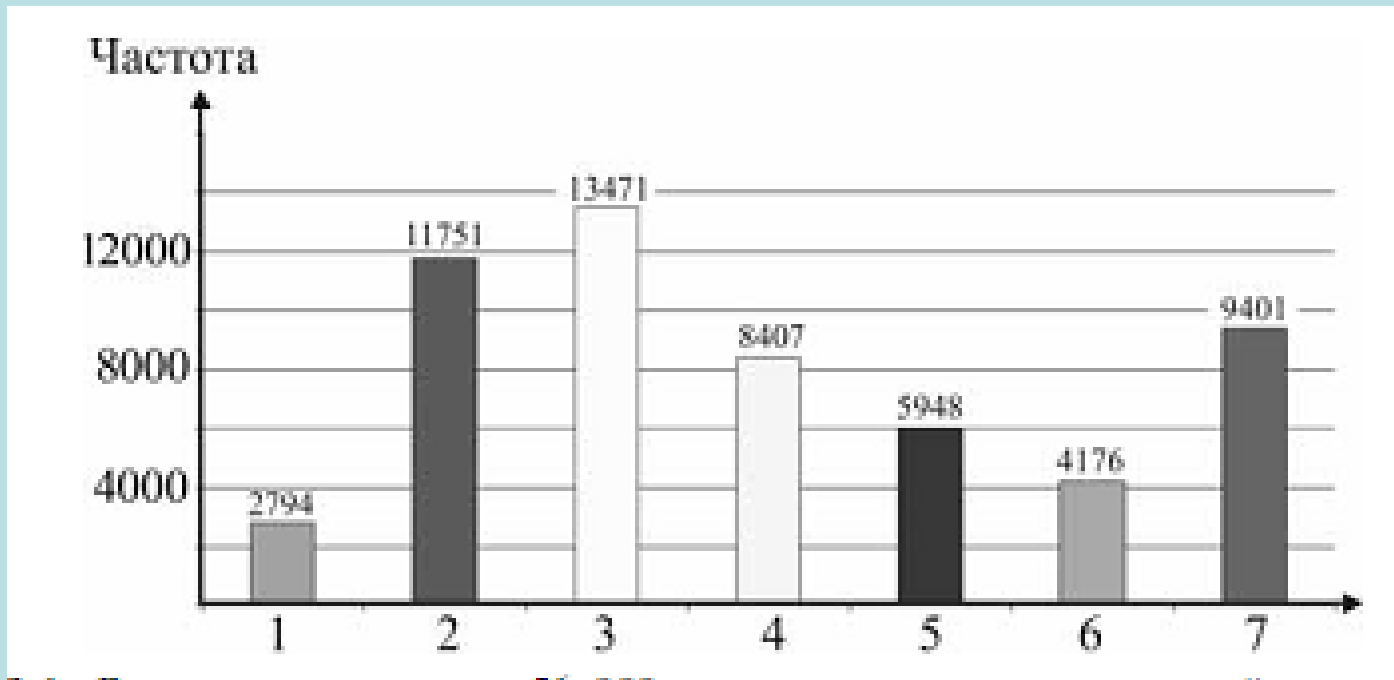
Почему?

Такая неравномерность связана с тем, что большая часть из минеральных видов встречается (находится и изучается) только в самой поверхностной оболочке Земли – Земной коре, образуясь в результате реакций выветривания и изменения горных пород под действием воды, атмосферы и солнечного света.

Поэтому они часто включают в свой состав молекулы воды H_2O , углекислоты CO_2 , гидроксил-группу OH- и другие атомные группировки, отличающиеся невысокой собственной симметрией, что приводит к понижению симметрии всего кристалла (принцип Кюри!)



Симметричная статистика минералов и неорганических соединений РАЗЛИЧНА!



Распространенность 56 000 неорганических соединений по сингониям и подсингониям:

- 1 — триклинная сингония , 2 — моноклинная
- 3 — ромбическая 4 — *тригональная (п.с.)*
- 5 — тетрагональная, 6 — *гексагональная (п.с.)* ,
- 7 — кубическая

Символики

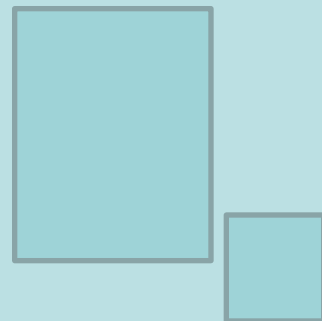
Учебная символика Браве громоздка и
не экономна



Учебная символика Браве не несет
информации о направлениях, с ней
можно легко потеряться



Символика Шенфлиса



Символика точечных групп симметрии, предложенная немецким математиком А. Шенфлисом, позволяет одной буквой с соответствующим нижним индексом не только охарактеризовать весь набор элементов симметрии конкретной точечной группы, но и объединить родственные группы в отдельные семейства.

Для не кубических классов симметрии достаточно всего двух букв: C и D . Подстрочный цифровой индекс указывает на порядок главной оси, а буквенный на расположение плоскостей (при наличии).



Символика Шенфлиса

v (*vertical* – вертикальный) – для плоскостей, расположенных вдоль единственной или главной оси симметрии, которая **мыслится** вертикальной

h (*horisontal* – горизонтальный) – для плоскости, перпендикулярной к главной оси симметрии

d – (*diagonal* - для вертикальных плоскостей симметрии, делящих пополам угол между побочными осями 2-го порядка – **плоскости делители**

s (от нем. *spiegel* - зеркало) – для плоскости неопределенной ориентации, т.е. не фиксированной ввиду отсутствия в группе иных элементов симметрии

Символика Шенфлиса

1) Циклические группы – группы с единственным особым направлением, представленным поворотной осью симметрии, – обозначаются буквой **C**, с нижним цифровым индексом **n**, соответствующим порядку этой оси (например, класс C_4 содержит только ось L_4 ; C_1 – только ось L_1).

2) Группы с единственной инверсионной осью симметрии сопровождаются нижним индексом **i**, например $C_{3i} = \bar{4}_3$. Если же инверсионной оси предпочитают ее зеркальный эквивалент, то группа с такими осями обозначается **S_n**

3) Группы симметрии с побочными (горизонтальными) – перпендикулярными главному направлению – осями 2-го порядка обозначаются **D_n**, где нижний индекс **n** соответствует не только порядку главной поворотной оси, но и количеству побочных осей 2-го порядка

Переход от учебной символики Браве к символам Шенфлиса предполагает владение правилами взаимодействия элементов симметрии.

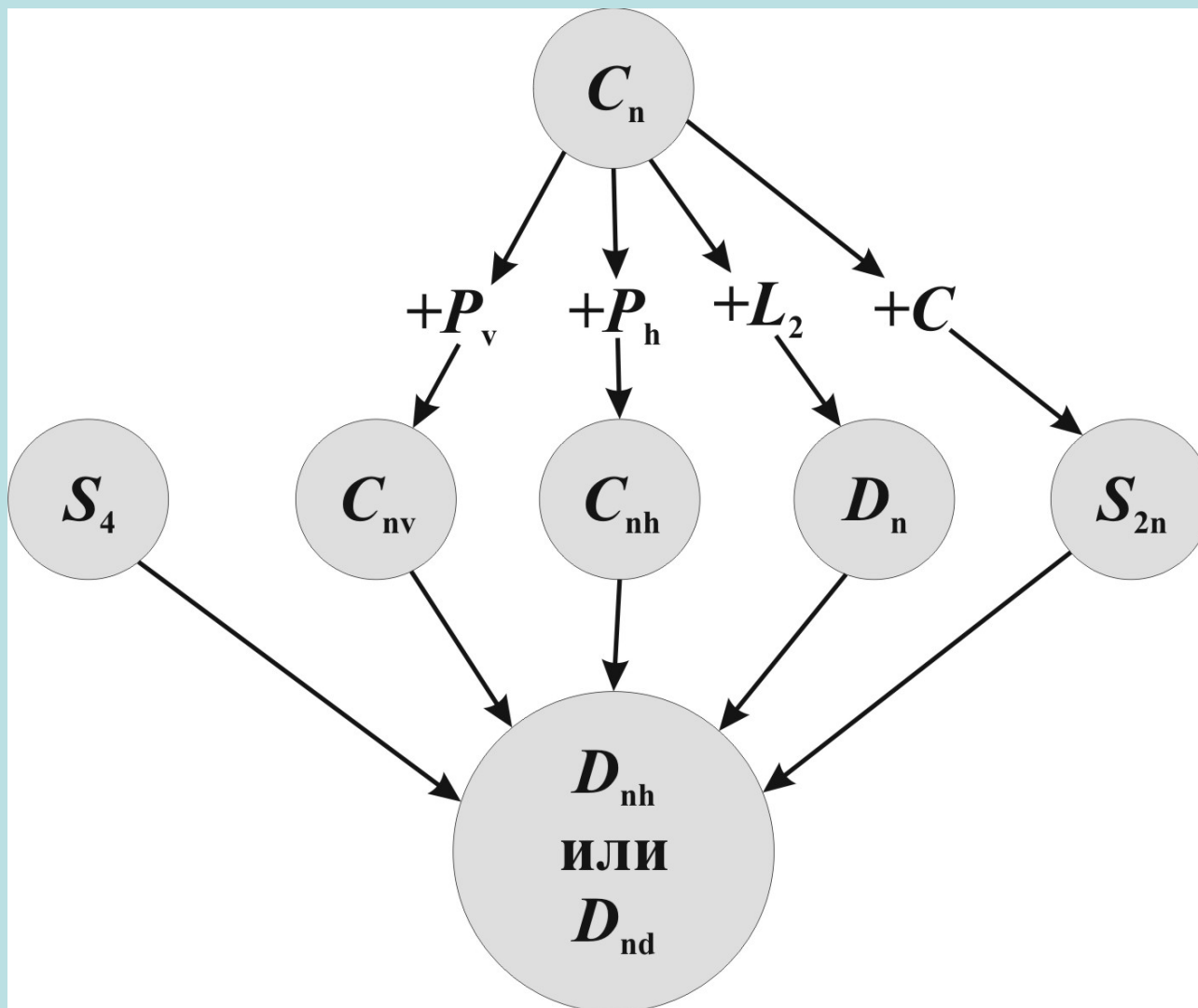
*Все сочетания элементов симметрии (в низшей и средней категории) можно разделить на два типа:
C и D:*

*Единственную (или главную) ось Шенфлис **мыслил** вертикальной.*

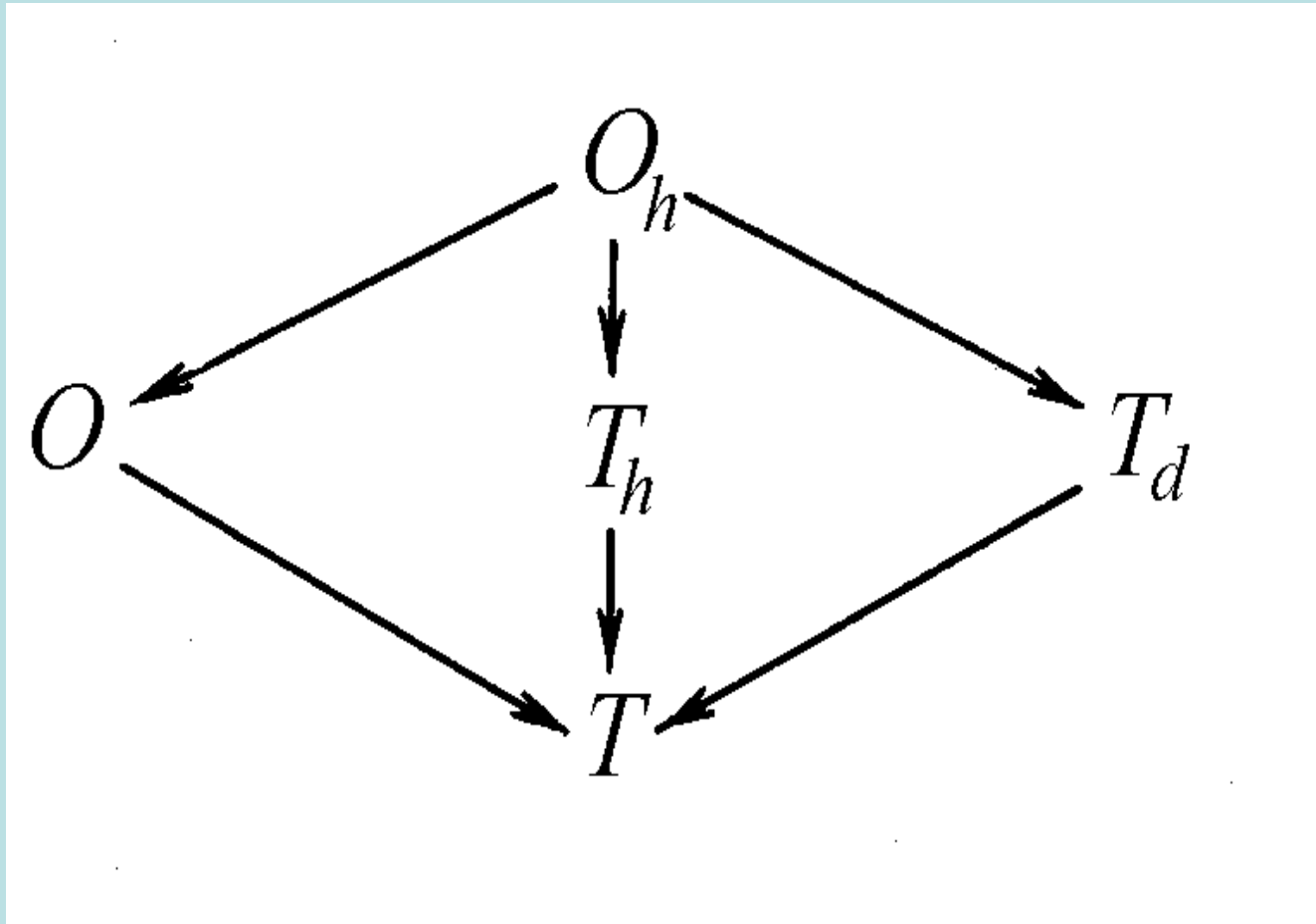
К этой оси можно добавлять элементы симметрии:

- перпендикулярную плоскость P – получим классы C_{nh} (при $n=2k$ характер оси не изменится, добавится центр инверсии, а если $n=2k+1$, то ось станет зеркальной $L_3P_{\perp}$. Шенфлис обозначил такие классы S_n , а соответствующие им инверсионные оси - C_{ni}
- Параллельные плоскости P – получим классы C_{nv}
- $C_{1h} = C_{1v} = C_s$
- Перпендикулярные оси L_2 – получим классы D_n

Взаимосвязь классов симметрии с единичным направлением



Для кубических кристаллов используются две буквы: Т и О, которые обозначают осевой набор тетраэдра и октаэдра соответственно.



ПРАВИЛА ЗАПИСИ СИМВОЛА КЛАССА СИММЕТРИИ А.ШЕНФЛИСА.

Буквенный символ	Цифровой подстрочный индекс	Буквенный подстрочный индекс
C_n Используется только когда поворотная ось единственная	n обозначает порядок единственной оси C_1 – класс, не содержащий ни плоскостей, ни осей порядка выше 1, C_2 – класс с единственной осью 2-ого порядка, C_3 – класс с единственной осью 3-его порядка и. т. д.	h – обозначает горизонтальную плоскость v – обозначает вертикальную плоскость s – обозначает плоскость неопределенного направления i – обозначает инверсионный характер оси
D_n Используется при наличии дополнительных осей второго порядка, перпендикулярных главной оси	n обозначает порядок главной оси и количество дополнительных осей второго порядка: D_2 - комплекс из двух горизонтальных осей 2-ого порядка, ориентированных перпендикулярно к третьей оси второго порядка D_3 - комплекс из трех горизонтальных осей 2-ого порядка, ориентированных перпендикулярно оси третьего порядка и т.д.	h – обозначает горизонтальную плоскость d – вертикальная плоскость «делитель», проходящую между дополнительными осями второго порядка
S_n Единственная зеркально-поворотная ось	n - обозначает порядок единственной зеркальной оси S_1 – плоскость зеркального отражения (C_s) S_2 – центр инверсии (C_i) S_3 – зеркально-поворотная ось 3-его порядка (C_{6i}) S_4 – зеркально-поворотная ось 4-ого порядка (C_{4i}) S_6 – зеркально-поворотная ось 6-ого порядка (C_{3i})	Не используются
O Используется только для кубической сингонии, обозначая осевой комплекс октаэдра (куба) $3L_4 4L_3 6L_2$	Не используются	h – обозначает горизонтальную плоскость
T Используется только для кубической сингонии, обозначает осевой комплекс тетраэдра $3L_2 4L_3$	Не используются	h – обозначает горизонтальную плоскость d – диагональная плоскость (между координатными направлениями)

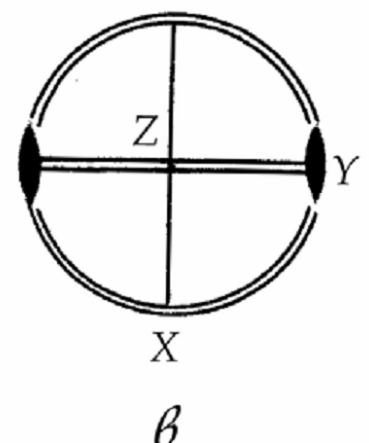
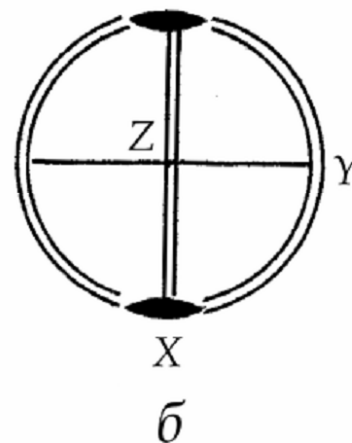
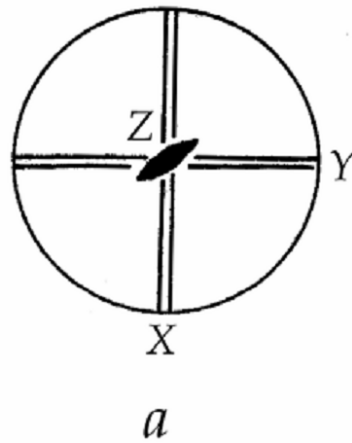
Главный недостаток как символики Шенфлиса, так и учебной символики Браве – *отсутствие строгой привязки к координатной системе.*

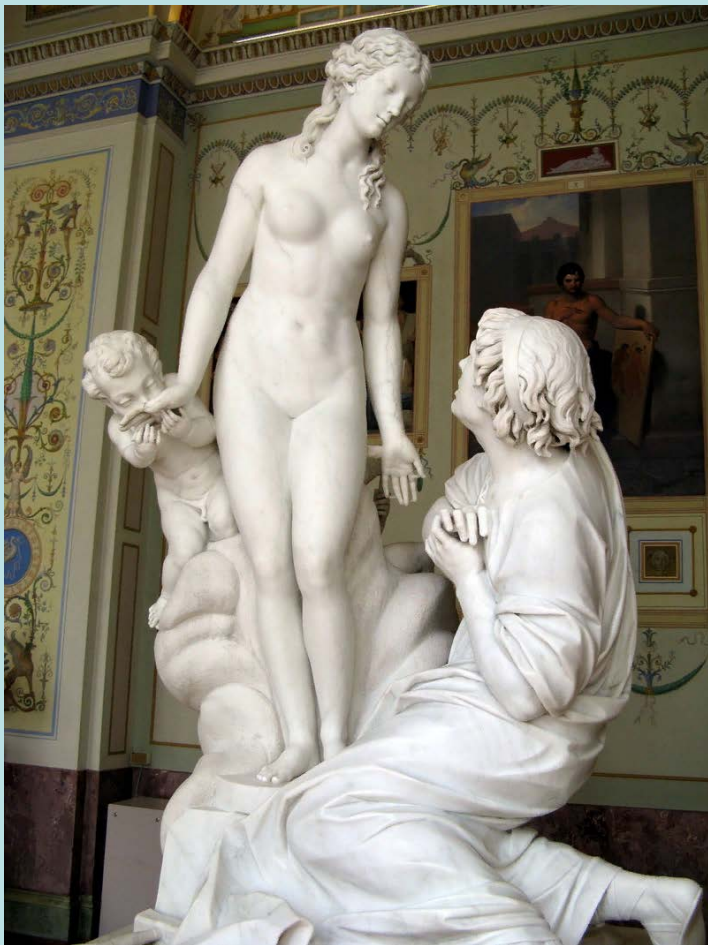


Это, в принципе,
одно
и тоже!

C_{2v}

L_2PC





Этого недостатка лишена
используемая в настоящее
время
в кристаллографии

международная символика
(символика Германа – Могена),

Эта символика
практически *лишена недостатков*:

изящна,

компактна,

однозначно привязана к координатным осям

Символика Германа-Могена (международная)

Была предложена немецким кристаллографом Карлом Германом в 1928 году и модифицированы французским минералогом Шарлем Могеном в 1931 году. Также называются международной символикой, поскольку используются в International Tables for Crystallography, начиная с их 1-ого издания в 1935 году.

Международный символ класса также как и символ Шенфлиса, достаточно компактен и предполагает знание теорем взаимодействия элементов симметрии. В отличие от символов Браве и Шенфлиса он четко указывает на ориентацию кристалла относительно выбранных координатных осей.

Главное правило формирования международного символа
***Международный символ фиксирует элементы симметрии на
всех не эквивалентных особых направлениях.***

Символика Германа-Могена (международная)

Поворотные оси обозначаются арабскими цифрами:

1, 2, 3, 4, 6

Инверсионные оси - арабскими цифрами с верхним подчеркиванием: **$\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{6}$**

Плоскости зеркального отражения обозначаются маленькой латинской буквой ***t*** и фиксируются нормалью!!!

Центр инверсии обозначается как инверсионная ось:

$\bar{1}$

Не эквивалентных особых направлений не может быть больше трех



№1



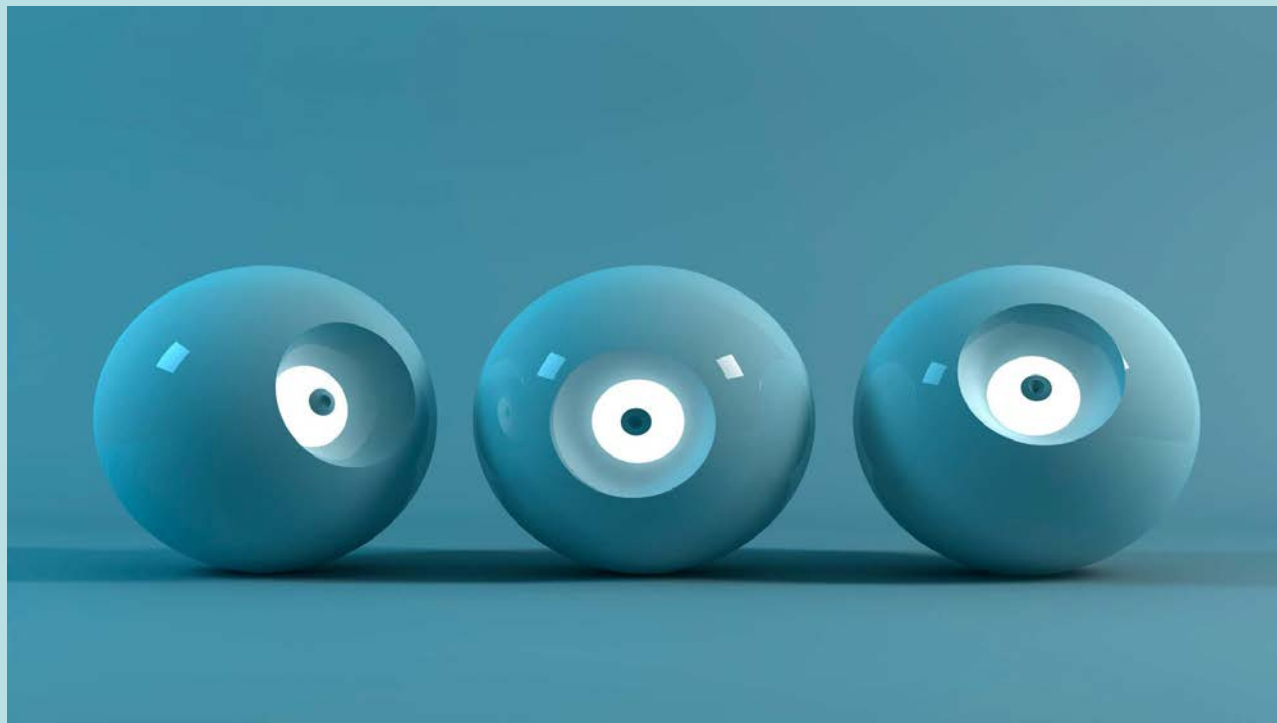
№2



№3



Типичный студент, описывающий
класс симметрии по
международной символике



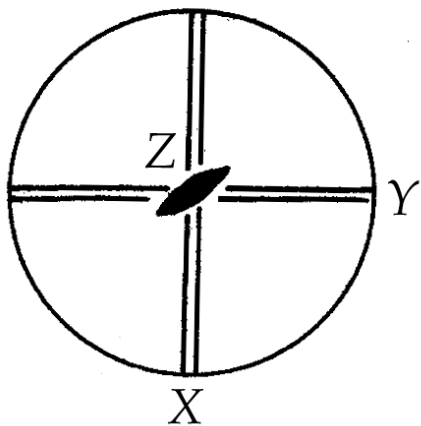
Специальные 3 глаза, которые видят поворотные и инверсионные оси симметрии

Символика Германа-Могена (международная)

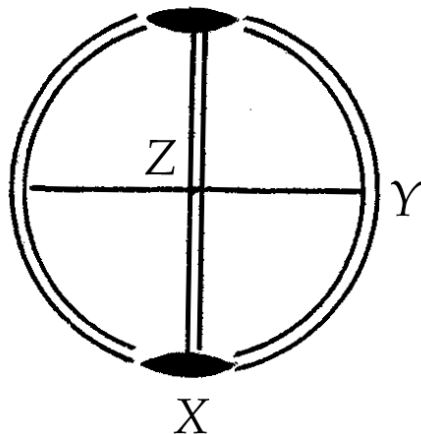
Вид международного символа зависит от категории.

		I позиция <i>Глаз 1</i> 	II позиция <i>Глаз 2</i> 	III позиция <i>Глаз 3</i> 
Низшая категория	$a \neq b \neq c$	X	Y	Z
Средняя категория	$a = b \neq c$	Z	$X = Y$ (=U)	$\alpha/2$
Высшая категория	$a = b = c$	$X = Y = Z$	3	$\alpha/2$

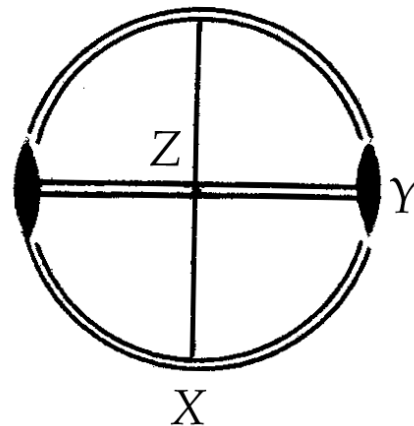
Символика Германа-Могена



a



б



в

Это одно
и тоже! C_{2v} !

Э, нет! Это не
одно и тоже!

Зависимость международного
символа группы симметрии
 L_22P (C_{2v}) от ее ориентации
относительно выбранных
координатных осей:

a – **$mm2$** , *б* – **$2mm$** , *в* – **$m2m$**



Символика Германа-Могена (международная)

Если по выбранному направлению располагается и поворотная ось и нормаль к плоскости, то их записывают в виде дроби: в числителе – ось, в знаменателе – нормаль к плоскости

например: $L_2PC = \frac{2}{m}$

Обратим внимание, что центр в записи **отсутствует**. Предполагается, что читатель понимает, что если ось второго порядка перпендикулярна к плоскости, то центр неизменно возникнет ($L_2 - P - C$), то есть центр заложен в записи в неявном, скрытом виде! Опускают в записи так же оси 2, если являются порожденными. **Оси высших порядков пишутся всегда (почти всегда, хи)!**

Символика Германа-Могена (международная)

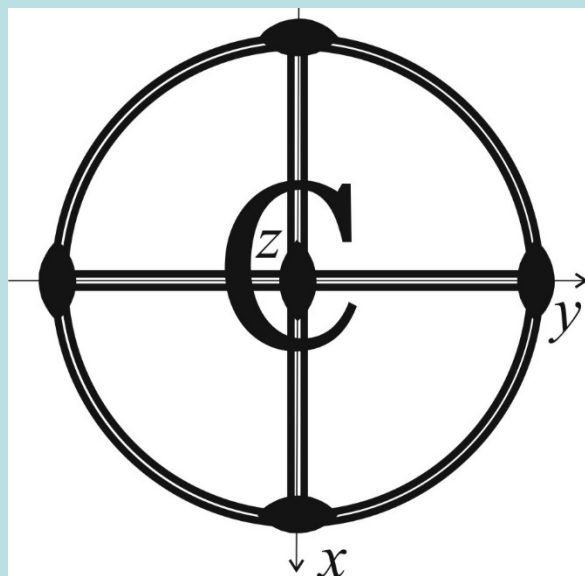
*Координатные оси всегда выбираются
по перпендикулярам к плоскостям*

*В случае отсутствия плоскостей
– по осям симметрии*

*При недостатке особых направлений
- по реальным ребрам кристалла*

Символика Германа-Могена (международная)

Таким образом, построение международного символа состоит из двух этапов: на первом (на черновике) записываются все элементы симметрии, которые фиксируются по трем особым направлениям, а на втором (на чистовике) из записи удаляется избыточная информация о тех элементах, которые могут быть получены путем взаимодействия между собой порождающих элементов, уже присутствующих в символе



(есть пара исключений но об этом не сегодня, хи-2).

$$\frac{2}{m} \frac{2}{m} \frac{2}{m} = mmm$$

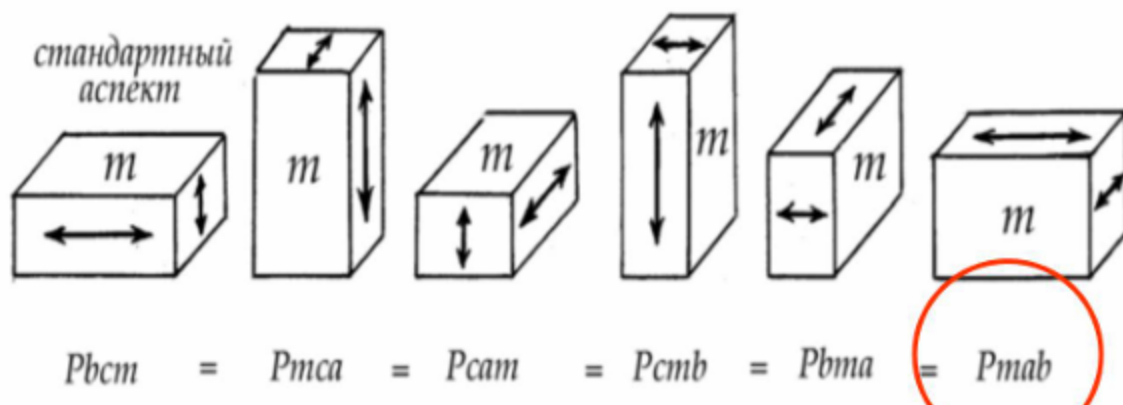
ПРАВИЛА ЗАПИСИ МЕЖДУНАРОДНОГО СИМВОЛА.

1	Выбор координатных осей	- оси выбираются соответственно с сингонией предпочтительно по нормальям к плоскостям (исключение – $\bar{4}3m$), - при отсутствии плоскостей – по осям симметрии, - при нехватке плоскостей и (или) осей – по ребрам кристалла (реальным или возможным).			
2	Основной принцип, лежащий в основе записи	Записываются все элементы симметрии по неэквивалентным направлениям, количество которых зависит от категории:			
		Категория	Позиция символа		
			I	II	III
			Особые не эквивалентные направления		
		Низшая ($a \neq b \neq c$)	X	Y	Z
		Средняя ($a = b \neq c$)	Z	$X = Y (=U)$	$\alpha/2$ - диагональное (тетрагон. сингония) или апофемальное гексагон. сингония)
		Высшая ($a = b = c$)	$X = Y = Z$	$3(или\bar{3})$	$\alpha/2$ - диагональное
3	Обозначение элементов симметрии	Поворотные оси обозначаются арабскими цифрами: $1, 2, 3, 4, 6$ Инверсионные оси - арабскими цифрами с верхним подчеркиванием: $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{6}$ Зеркальные оси - арабскими цифрами с кружочком сверху: $\overset{\circ}{1}, \overset{\circ}{2}, \overset{\circ}{3}, \overset{\circ}{4}, \overset{\circ}{6}$ (никогда не записываются в символе, используются только в методических целях) Плоскости зеркального отражения обозначаются маленькой латинской буквой m и фиксируются нормалью. Центр инверсии обозначается как инверсионная ось: $\bar{1}$			
4	Два элемента симметрии совпадают по направлению	Ось и нормаль к плоскости	Ось симметрии совпадает с нормалью к плоскости: Обозначения записываются через знак дроби, причем значок плоскости – в знаменателе: $\frac{2}{m}$		
Поворотная и инверсионная ось		Поворотная ось симметрии совпадает с инверсионной осью симметрии: записывается та, чья размножающая способность больше. Если размножающие способности равны, записывается поворотная ось.			
5	«Лишние» элементы симметрии в записи	- в символе не записываются только оси второго порядка, порожденные плоскостями. Исключения: 1) в классе $mm2$ ось 2 пишется обязательно, так как фиксирует третье не эквивалентное особое направление, по которому нет других элементов симметрии); 2) не пишется ось 4 на координатной позиции в классе $m\bar{3}m = \frac{4}{m}\bar{3}\frac{2}{m}$)			
6	«Пустая» позиция	Вдоль направления, соответствующего позиции не проходит ни один элемент симметрии: -можно ничего не писать; -можно записать 1, в случае, когда необходимо зафиксировать выбор координатных осей: $11\frac{2}{m}(a), \frac{2}{m}11(\bar{b}), 1\frac{2}{m}1(\bar{c})$.			

Зачем же оставили в живых Шенфлиса?



А если повернуть набор? **$Pmab$** – 6 клонов!



В микро кристаллографии пространственная группа (микроаналог класса симметрии) может называться по разному в зависимости от ориентации...



$Pbcm$

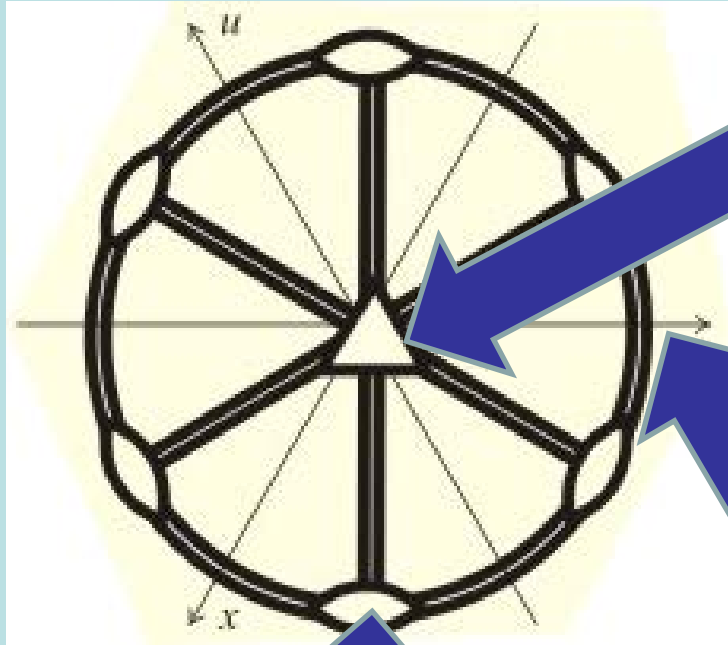
No. 57

D_{2h}^{11} ←

$P 2_1/b 2_1/c 2_1/m$

Шенфлис однозначно фиксирует,
Поэтому не хороним
немецкого математика, полезен!

Потренируемся



№1

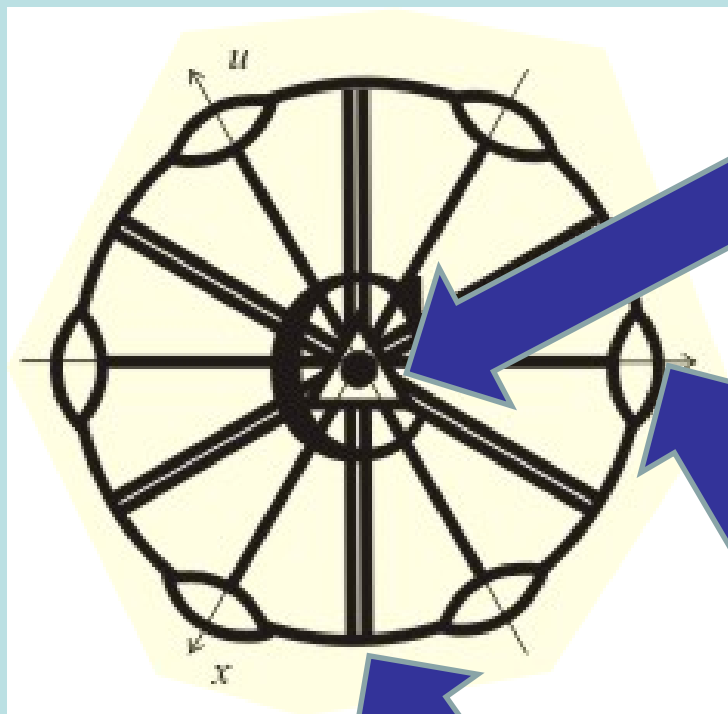


№2



№3

Еще потренируемся



№1



№2



№3

Как Вы хотите
меня назвать?!



В следующий раз

Анонс



ПРОСТЫЕ ФОРМЫ КРИСТАЛЛОВ

(пока только низшей и средней
категории, их немного, якобы 32...)

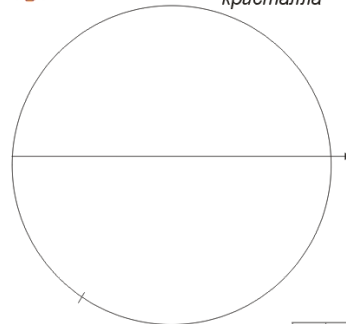
ОБЛИК – что это?

ГАБИТУС – а это еще что??



Бланк для полного описания
кристалла

Кристалл № _____
ФИО, группа: _____



Дайте полное описание кристалла

категория a, b, c	
сингония α, β, γ	
символ по Браве	
символ по Шенфлису	
международный символ	
класс по общей форме	

Характеристика простых форм

№	Кол-во граней	Откр закр	Частн общ	ССГ	ВСС	Название



облик _____
габитус _____