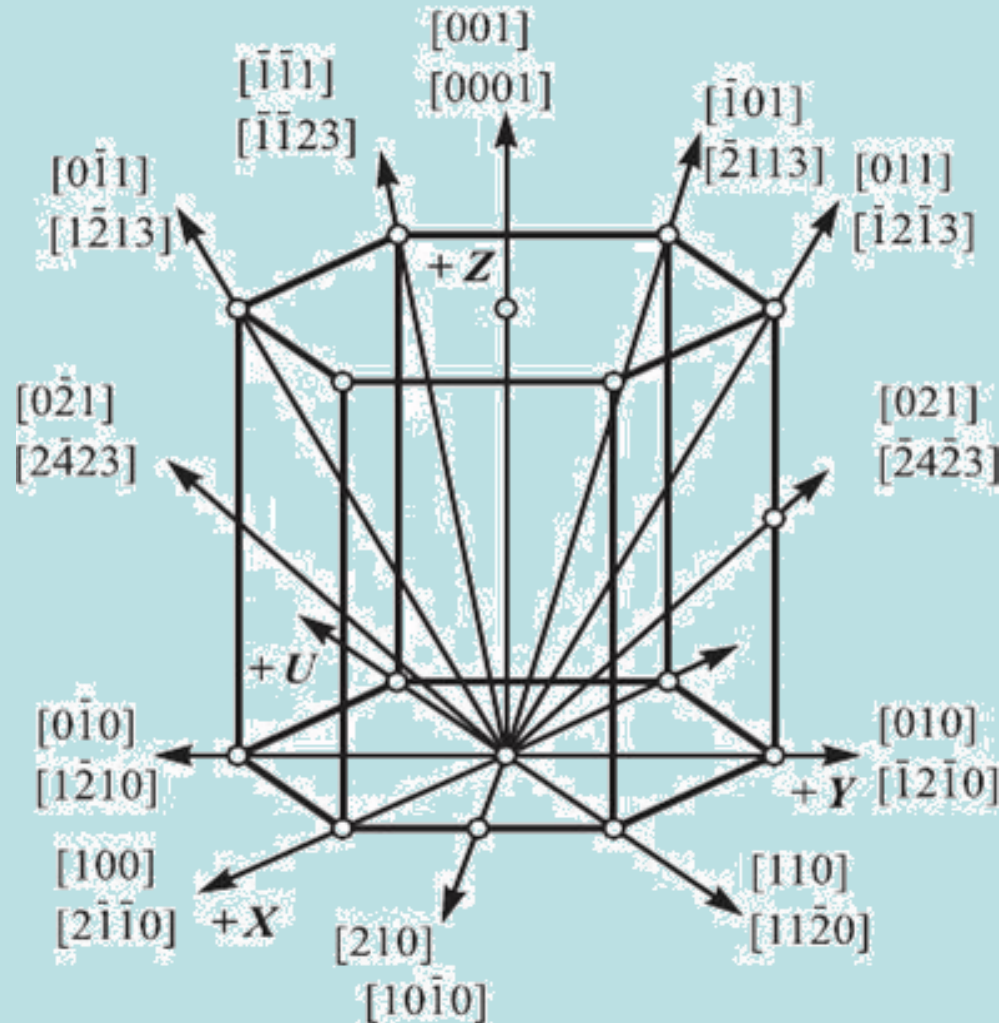


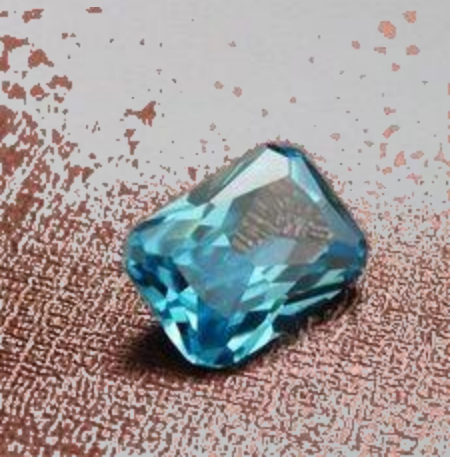
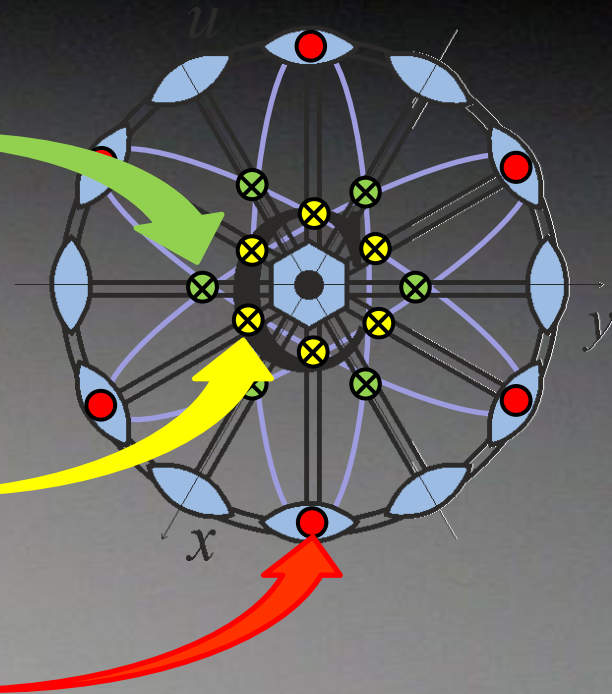
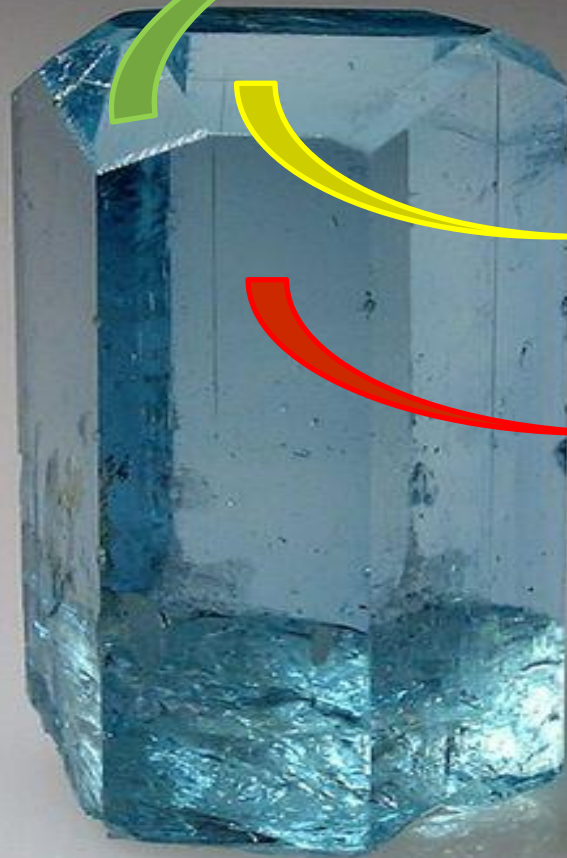
СИМВОЛЫ ГРАНЕЙ, (АТОМНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ) И РЕБЕР (НАПРАВЛЕНИЙ) КРИСТАЛЛОВ





Индексы в кристаллографии появились задолго до того как открылось атомарное строение и доказана периодичность кристаллического пространства. На основании изучения только внешней формы кристаллов были сделаны фундаментальные выводы. Например о невозможности оси 5 порядка и выше 6-ого, о постоянстве углов, о целочисленности параметров и т. д.

Природная огранка
кристалла
аквамарина
представлена
пинакоидом,
гексагональной
призмой и *двумя*
гексагональными
бипирамидами



Как же различать две простые формы с
одинаковым названием?

**Каждой индивидуальной грани – свой
собственный индекс!**



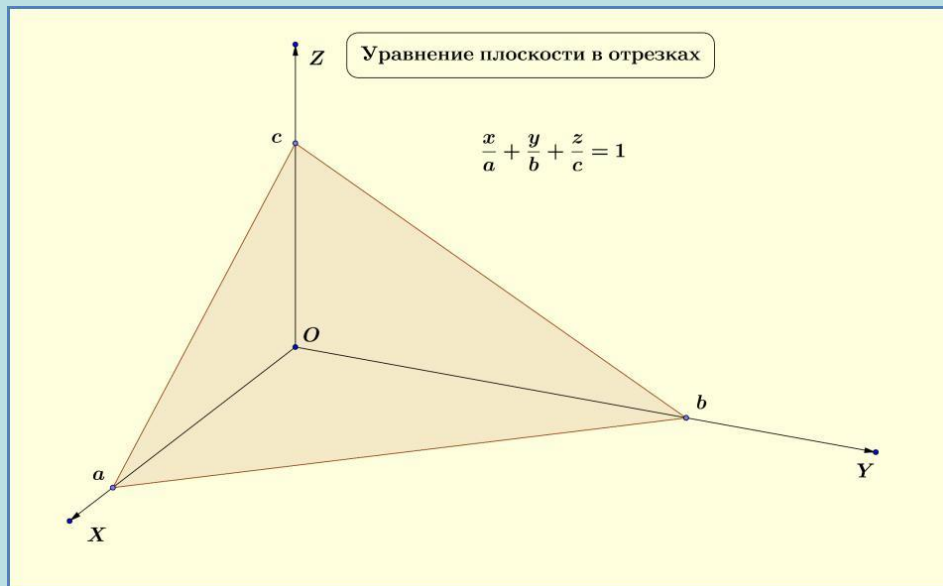
**Отдайте нашу посылку!
h, k, i и *l* – вот мои документы!**

Из геометрии известно, что любую плоскость можно описать уравнением вида:

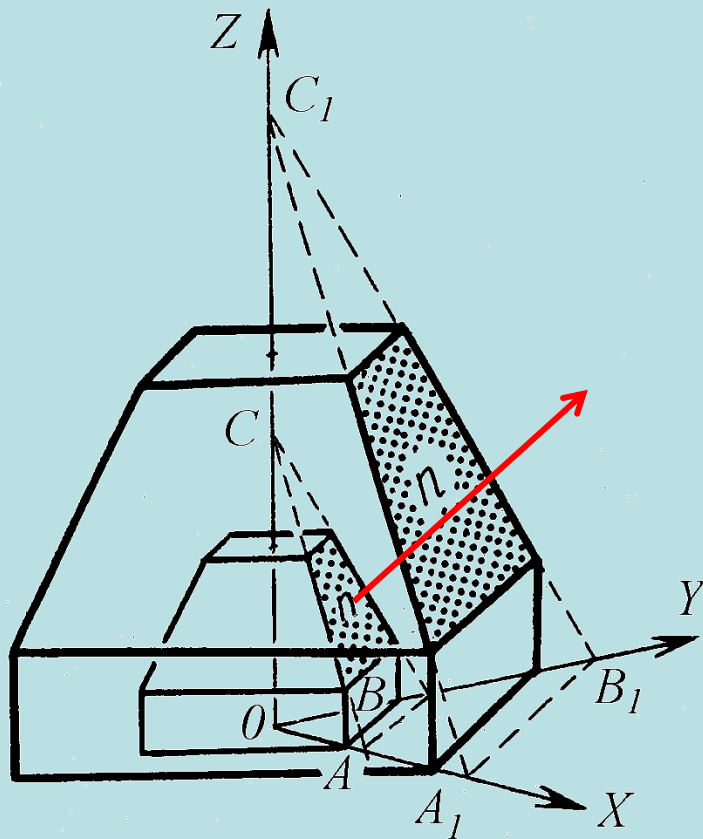
$$Ax + By + Cz = D,$$

где $\{A; B; C\}$ – координаты вектора нормали.

Существует так же уравнение плоскости в отрезках:



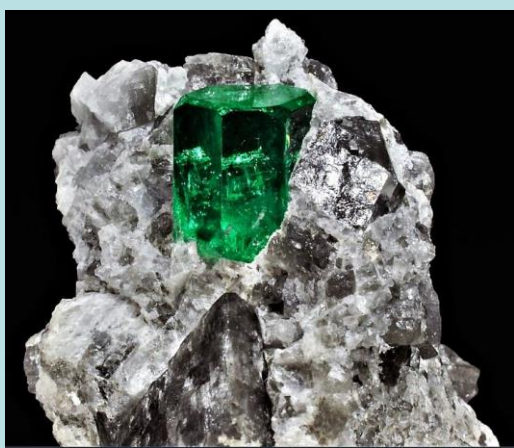
a, b, c – отрезки,
отсекаемые плоскостью
на соответствующих осях,
называемые
параметрами плоскости
(*границ или атомной*
плоскости).



При росте кристалла абсолютные значения a , b , c изменяются. Но благодаря тому, что грань (n) перемещается параллельно самой себе, отношение параметров остается постоянным:

$$a : b : c = \text{const}$$

Цифры (авс) или обратные (ABC) есть могут быть однозначными точными характеристиками и называются *СИМВОЛОМ ПЛОСКОСТИ*, которые в математике могут быть абсолютно любыми
А для кристалла какие?



Р.Ж.Гаюи
1743-1822

*Закон рациональности отношений
параметров граней кристалла:*

Двойные отношения размерных параметров
двух любых граней кристалла равны отношению
целых

небольших

взаимно простых

чисел

Открытие этого закона позволило другому кристаллографу, Х.С. Вейсу открыть еще один основных законов кристаллографии — **закон зон (поясов)**, устанавливающий связь между положением граней и рёбер кристаллов и ввести понятие индексов как числовой характеристики любой грани или направления кристалла:



*Христиан Самуэль
Вейс
1780-1856*

$$p_1 : q_1 : r_1 = \frac{a_1}{a} : \frac{b_1}{b} : \frac{c_1}{c},$$

где a_1, b_1, c_1 —
параметры определяемой грани, а a, b, c
— параметры другой грани того же самого
кристалла.

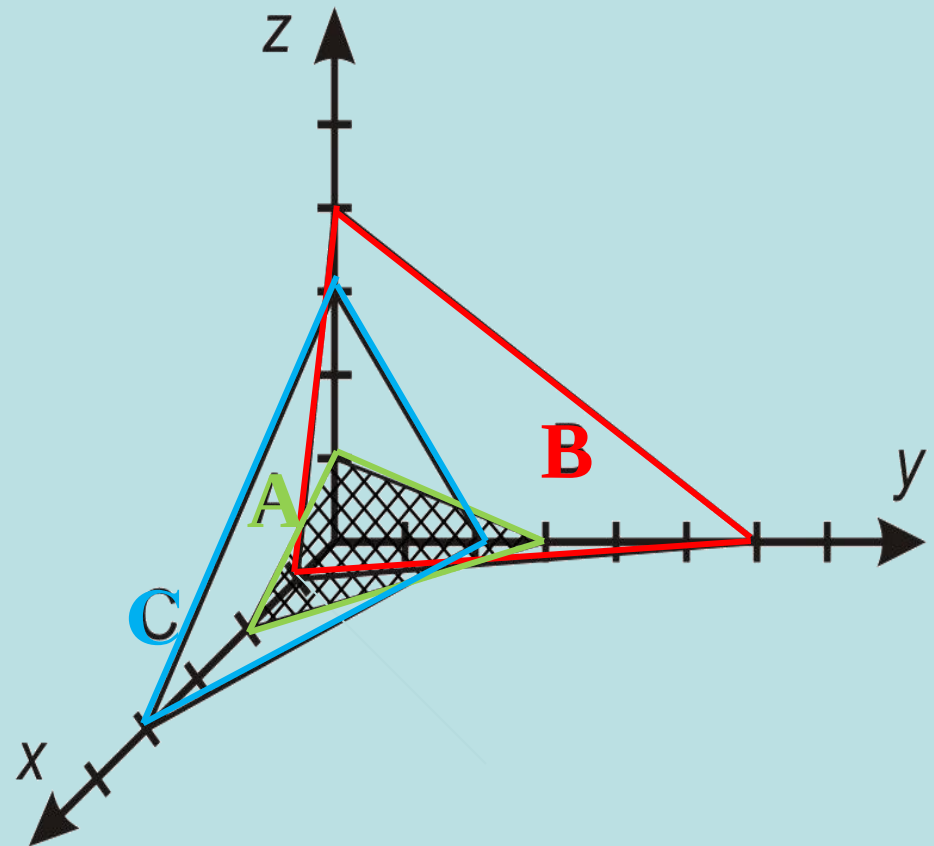
Основной принцип *индицирования граней кристалла* заключается в том, параметры всех граней измеряются относительно параметров одной специально выбранной грани. Параметры такой грани становятся масштабом, в котором измеряются параметры всех остальных граней.

Например, пусть в кристалле присутствуют грани **A**, **B** и **C**, отсекающие на координатных осях следующие отрезки:

$$a_A = 2 \text{ см} \quad b_A = 3 \text{ см} \quad c_A = 1 \text{ см}$$

$$a_B = 1 \text{ см} \quad b_B = 6 \text{ см} \quad c_B = 4 \text{ см}$$

$$a_C = 4 \text{ см} \quad b_C = 2 \text{ см} \quad c_C = 3 \text{ см}$$

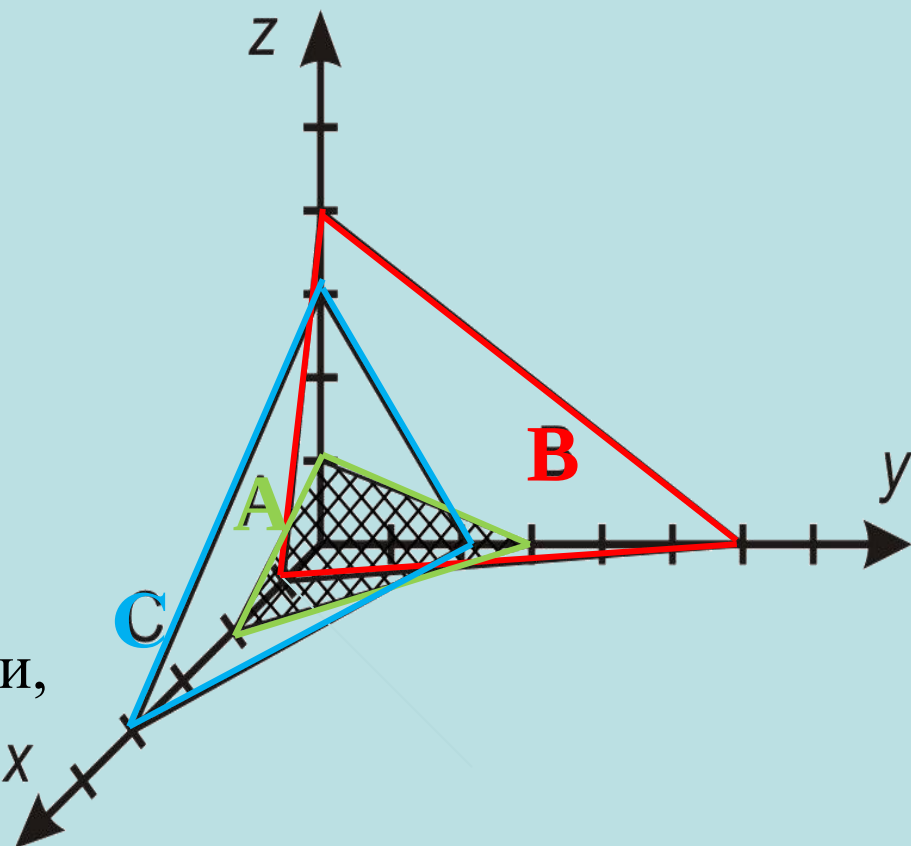


Как это работает?

$$a_A = 2 \text{ см} \quad b_A = 3 \text{ см} \quad c_A = 1 \text{ см}$$

$$a_B = 1 \text{ см} \quad b_B = 6 \text{ см} \quad c_B = 4 \text{ см}$$

$$a_C = 4 \text{ см} \quad b_C = 2 \text{ см} \quad c_C = 3 \text{ см}$$



Вычисление индекса каждой грани,
принимая грань A за единичную: χ

$$(p_A q_A r_A) = p_A : q_A : r_A = \frac{a_A}{a_A} : \frac{b_A}{b_A} : \frac{c_A}{c_A} = \frac{2}{2} : \frac{3}{3} : \frac{1}{1} = 1 : 1 : 1 = (111)$$

$$(p_B q_B r_B) = p_B : q_B : r_B = \frac{a_B}{a_A} : \frac{b_B}{b_A} : \frac{c_B}{c_A} = \frac{1}{2} : \frac{6}{3} : \frac{4}{1} = 1 : 4 : 8 = (148)$$

$$(p_C q_C r_C) = p_C : q_C : r_C = \frac{a_C}{a_A} : \frac{b_C}{b_A} : \frac{c_C}{c_A} = \frac{4}{2} : \frac{2}{3} : \frac{3}{1} = 6 : 2 : 9 = (629).$$

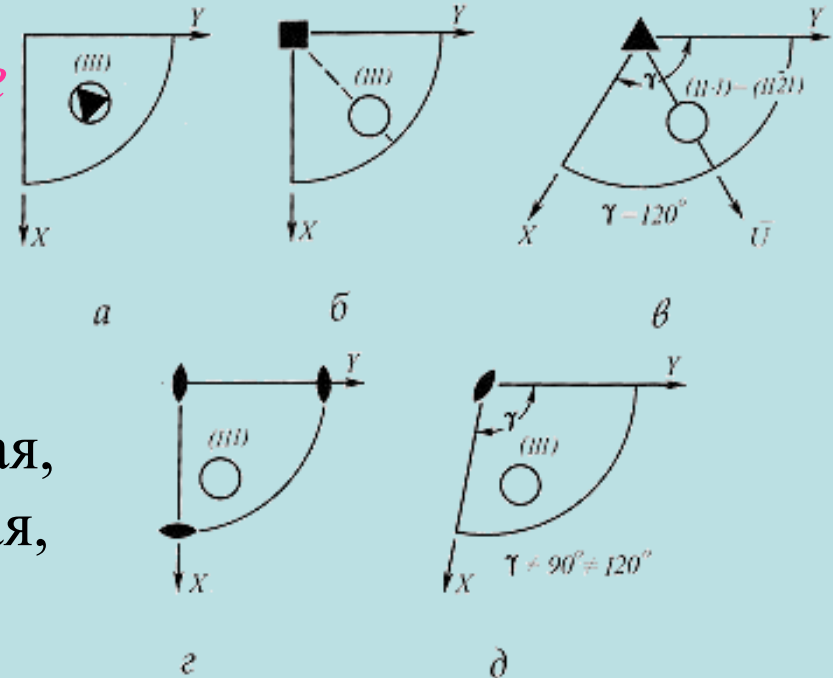


Выбор единичной грани – очень ответственное решение! От него зависит «судьба» всех остальных граней кристалла

Правила выбора единичной грани

1. Грань должна пересекать *все координатные оси* в соответствии с категорией

a – кубическая, *б* – тетрагональная,
в – гексагональная, *г* – ромбическая,
д – моноклинная

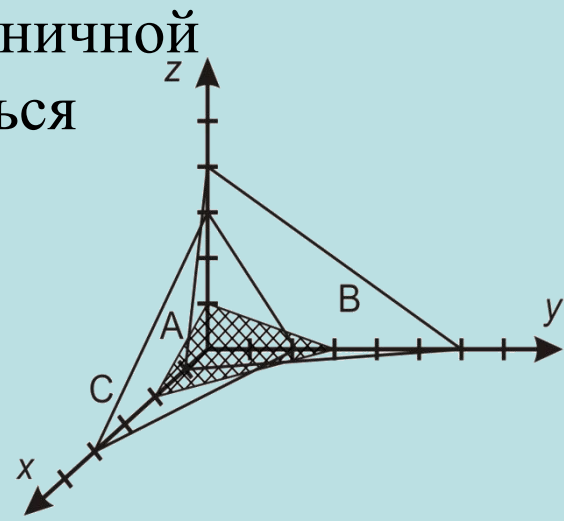


2. Грань должна быть максимально развита

3. Грань должна находиться на пересечении как можно большего количества зон.



В случае неправильного выбора единичной грани, индексы граней могут оказаться неоправданно усложненными



Расчет индексов Миллера для граней в вышеприведенном примере

Если за единичную принять грань A:

$$(h_A k_A l_A) = h_A : k_A : l_A = \frac{a_e}{a_A} : \frac{b_e}{b_A} : \frac{c_e}{c_A} = \frac{2}{2} : \frac{3}{3} : \frac{1}{1} = 1 : 1 : 1 = (111)$$

$$(h_B k_B l_B) = h_B : k_B : l_B = \frac{a_e}{a_B} : \frac{b_e}{b_B} : \frac{c_e}{c_B} = \frac{2}{1} : \frac{3}{6} : \frac{1}{4} = 8 : 2 : 1 = (821)$$

$$(h_C k_C l_C) = h_C : k_C : l_C = \frac{a_e}{a_C} : \frac{b_e}{b_C} : \frac{c_e}{c_C} = \frac{2}{4} : \frac{3}{2} : \frac{1}{3} = 3 : 9 : 2 = (392).$$

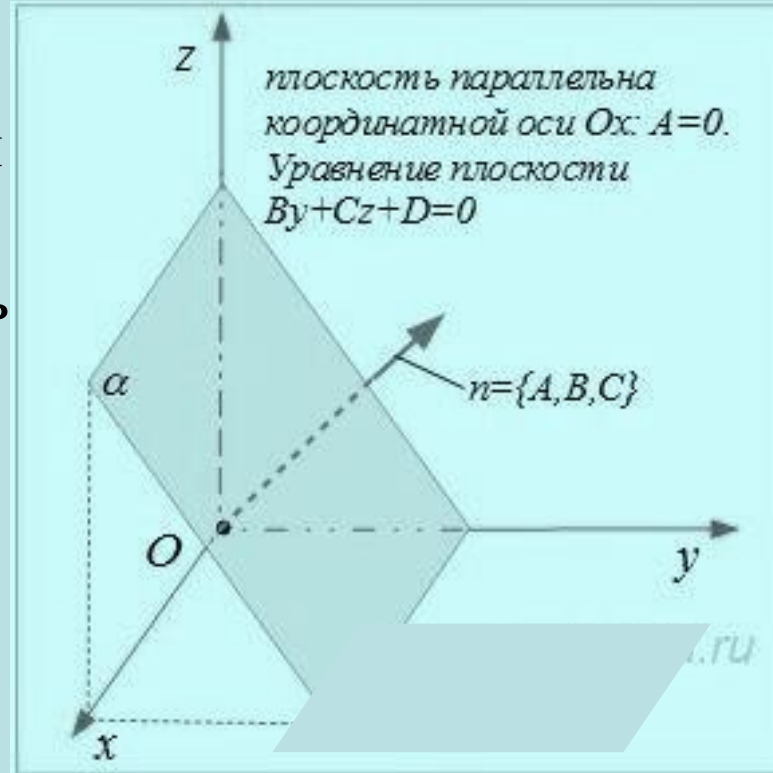
Если за единичную принять грань B:

$$(h_A k_A l_A) = h_A : k_A : l_A = \frac{a_e}{a_A} : \frac{b_e}{b_A} : \frac{c_e}{c_A} = \frac{1}{2} : \frac{6}{3} : \frac{4}{1} = 1 : 4 : 8 = (148)$$

$$(h_B k_B l_B) = h_B : k_B : l_B = \frac{a_e}{a_B} : \frac{b_e}{b_B} : \frac{c_e}{c_B} = \frac{1}{1} : \frac{6}{6} : \frac{4}{4} = 1 : 1 : 1 = (111)$$

$$(h_C k_C l_C) = h_C : k_C : l_C = \frac{a_e}{a_C} : \frac{b_e}{b_C} : \frac{c_e}{c_C} = \frac{1}{4} : \frac{6}{2} : \frac{4}{3} = 3 : 36 : 16 = (3\ 36\ 16).$$

Увеличение параметра сопровождается уменьшением угла между гранью и данной координатной осью. Если грань параллельна оси (угол равен 0), параметр равен ∞ , и соответствующий индекс – то же равен бесконечности ∞ , что неудобно при расчетах.



Поэтому английский минералог и кристаллограф В. Миллер предложил использовать в качестве индексов граней обратные величины:

$$(hkl) = h:k:l = \frac{a_e}{a} : \frac{b_e}{b} : \frac{c_e}{c}$$



Вильям
Холлоуз Миллер
(1801-1880)

Применительно к атомным плоскостям a_e , b_e , c_e есть параметры элементарной ячейки

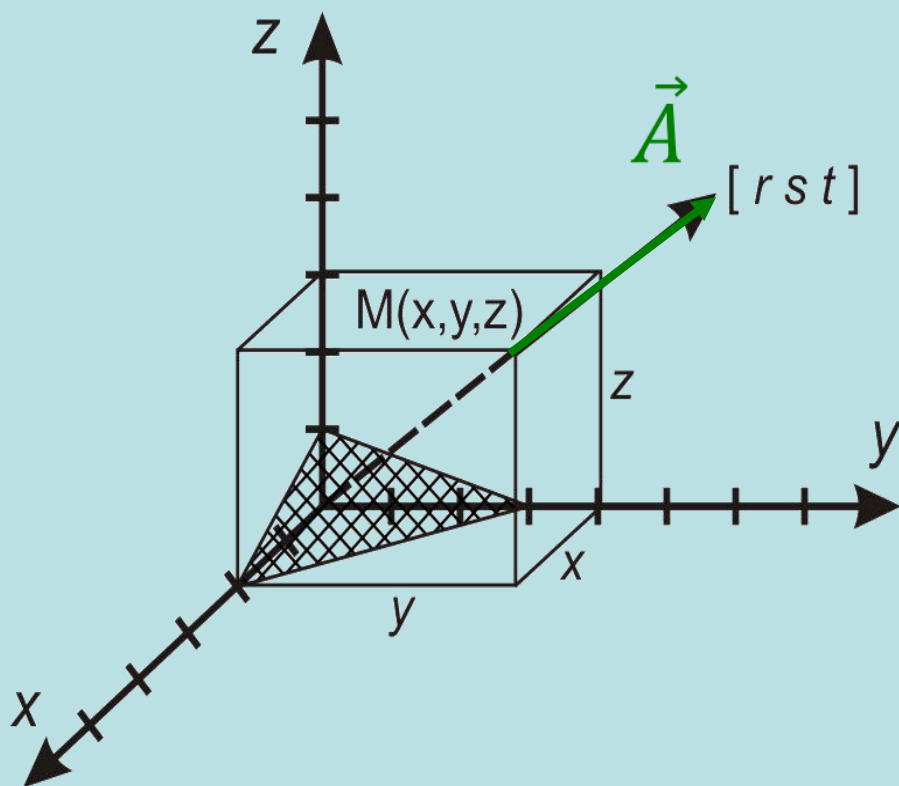


Минерал
миллерит NiS

Индексы Миллера h , k , l , заключенные в круглые скобки (hkl) без знаков отношения (которые подразумеваются!), составляют *символ грани кристалла*.

По аналогии с индексами грани вводится индекс направления:

Для индексов направлений используются *символы Вейса*, которые представляют собой отношения координат любой точки, принадлежащей этому направлению, нормированные масштабом единичной грани



Точка М, принадлежащая направлению $\vec{A}$ имеет координаты (2, 4, 3). Тогда символ направления $[rst]$ можно записать так:

$$\begin{aligned} [rst] &= r : s : t = \frac{x}{a_e} : \frac{y}{b_e} : \frac{z}{c_e} = \\ &= \frac{2}{2} : \frac{4}{3} : \frac{3}{1} = 3:4:9 = [349] \end{aligned}$$

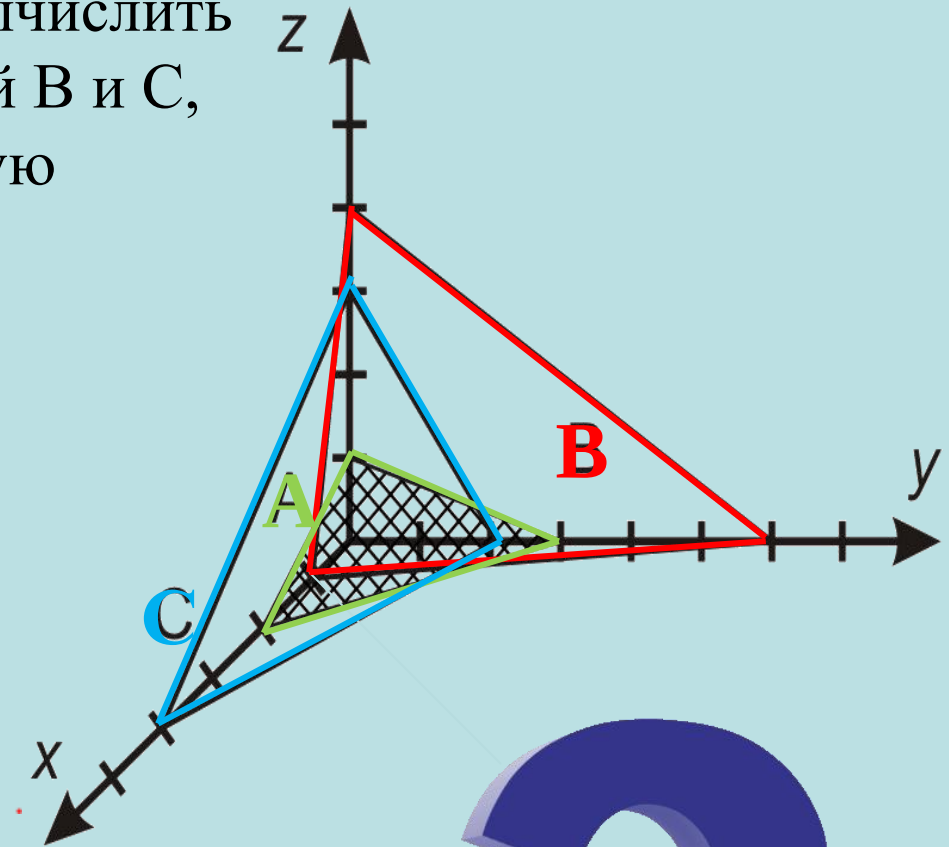
Попробуйте самостоятельно вычислить символы Миллера (hkl) граней В и С, принимая грань А за единичную

$$a_A = 2 \text{ см} \quad b_A = 3 \text{ см} \quad c_A = 1 \text{ см}$$

$$a_B = 1 \text{ см} \quad b_B = 6 \text{ см} \quad c_B = 4 \text{ см}$$

$$a_C = 4 \text{ см} \quad b_C = 2 \text{ см} \quad c_C = 3 \text{ см}$$

$$(hkl) = h:k:l = \frac{a_e}{a} : \frac{b_e}{b} : \frac{c_e}{c}$$



А мы вернемся к этому примеру на семинаре



Если величины a/a_e , b/b_e , c/c_e считать параметрами грани, измеренными в кристаллографических единицах, уравнение плоскости в отрезках

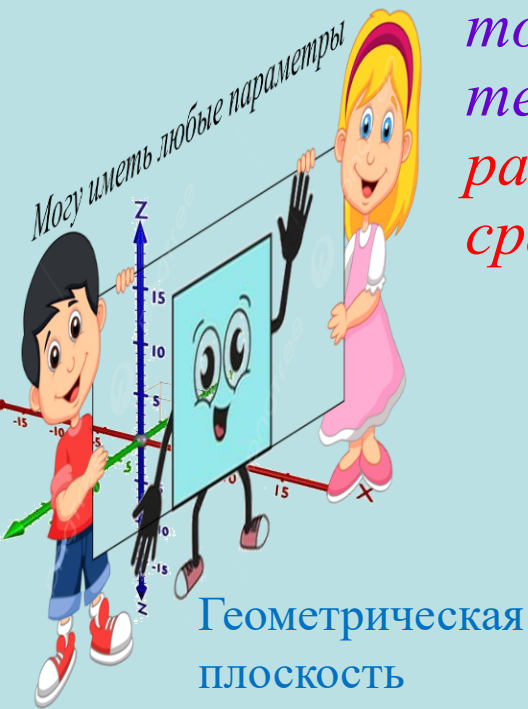
$$\frac{1}{a}x + \frac{1}{b}y + \frac{1}{c}z = 1$$

через индексы Миллера можно записать в следующем виде:

$$hx + ky + lz = 1$$

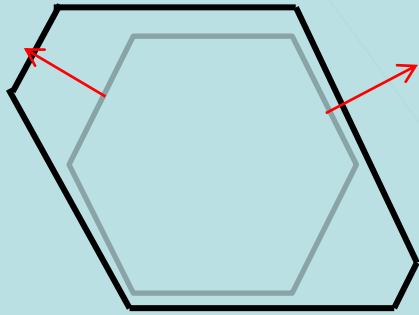
Кристаллографическое прочтение уравнения плоскости:

в виде грани кристалла может реализоваться только такая плоскость, коэффициенты при текущих координатах которой представлены рациональными, взаимно простыми, сравнительно небольшими числами.

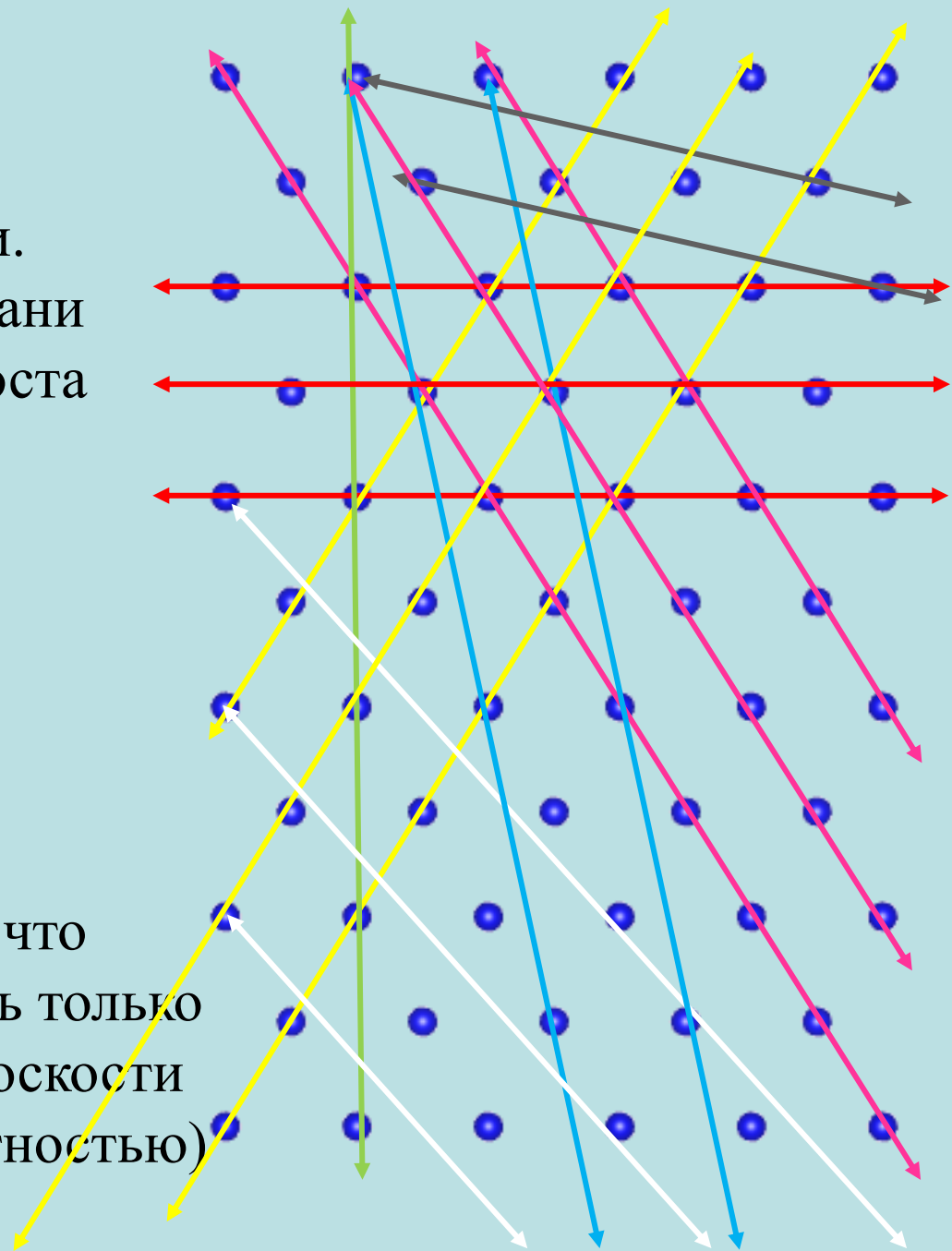


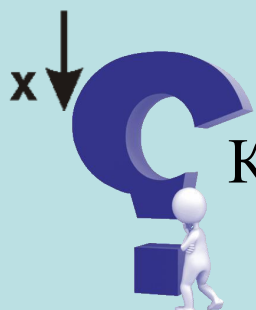
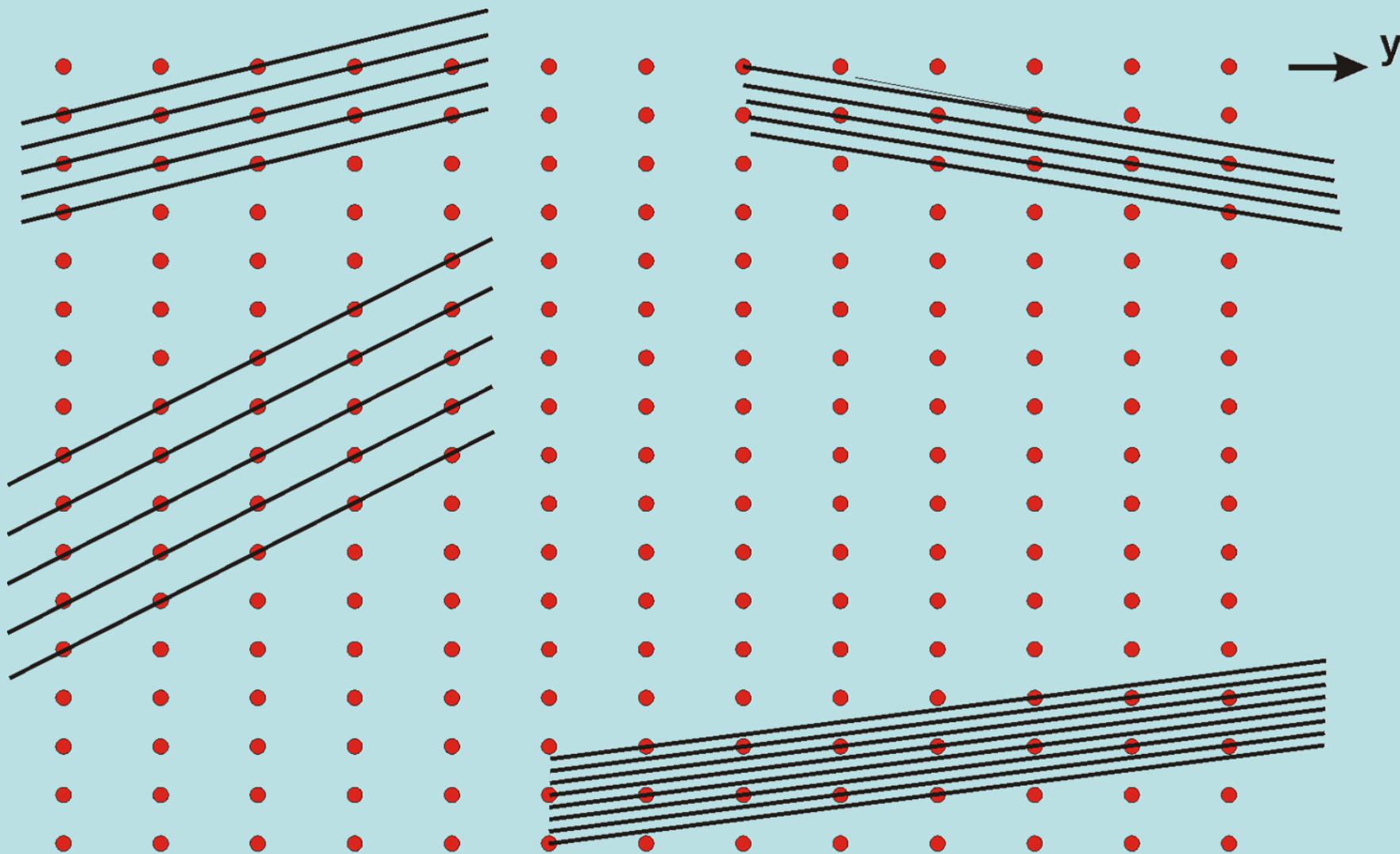
- Математически это означает, что символ грани – это координаты вектора нормали (или обратное отношение параметров), измеренные в *кристаллографическом масштабе*.
- Символы граней кубической сингонии в силу *одномасштабности* координатных осей – это просто координаты вектора нормали или обратное отношение параметров

Кристалл ограняется самыми
медленно растущими гранями.
Наиболее быстрорастущие грани
выклиниваются в процессе роста



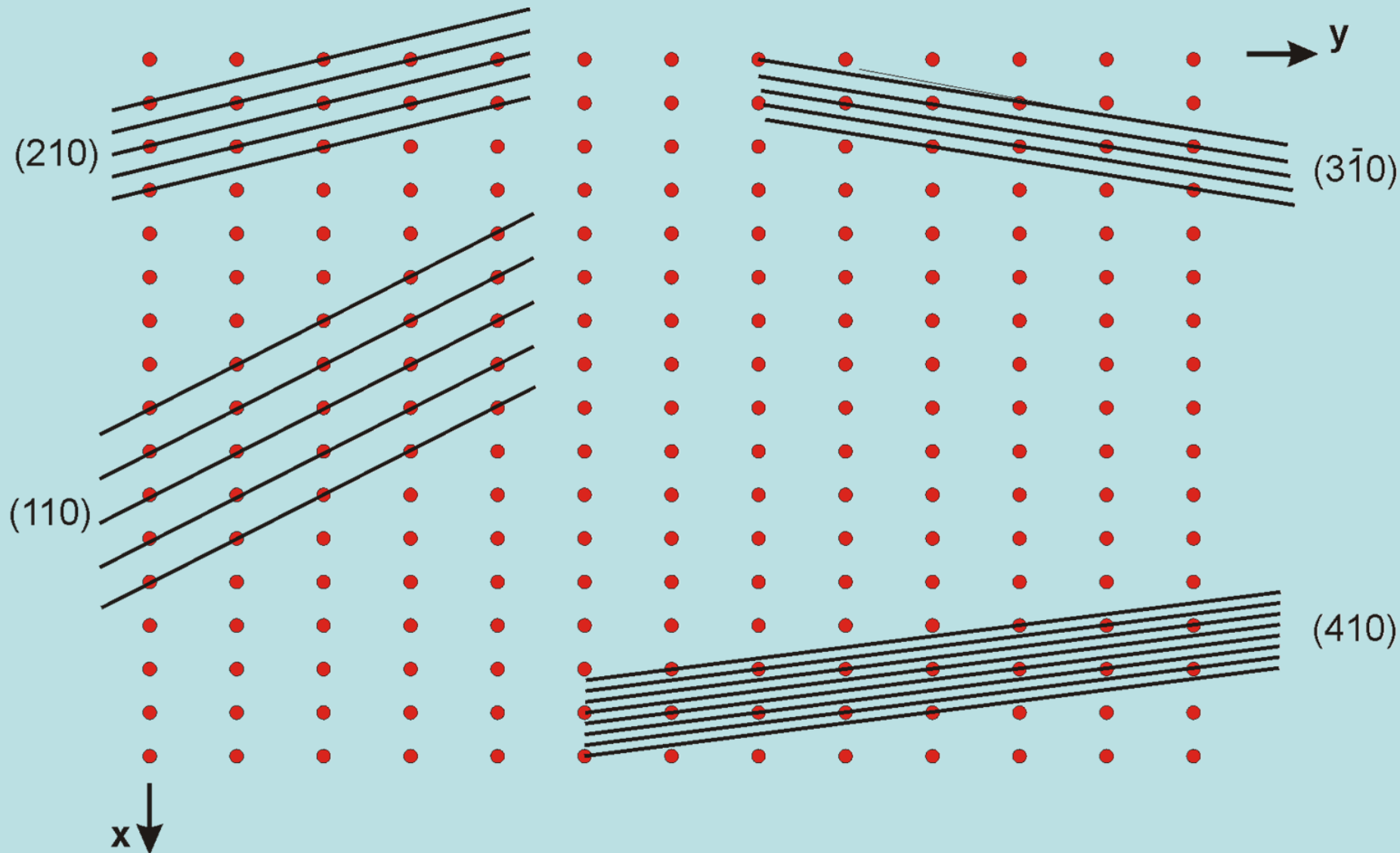
На микроуровне это означает, что
гранями кристалла могут стать только
самые плотноупакованные плоскости
(с высокой ретикулярной плотностью)



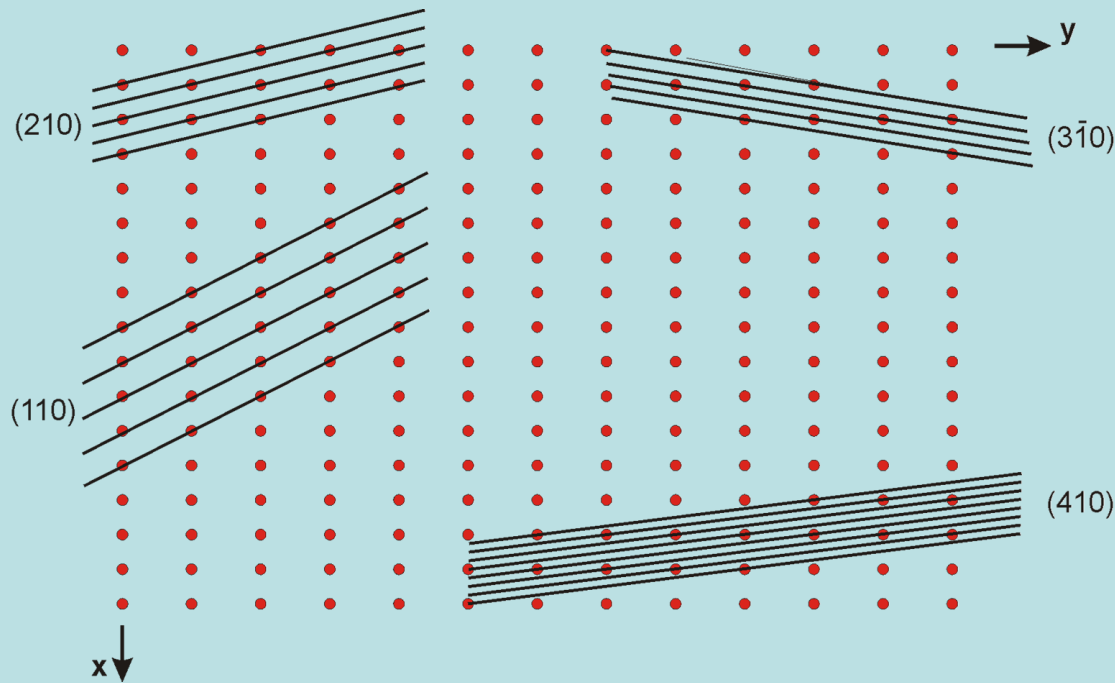


Каким индексам соответствуют приведенные выше
серии плоскостей?





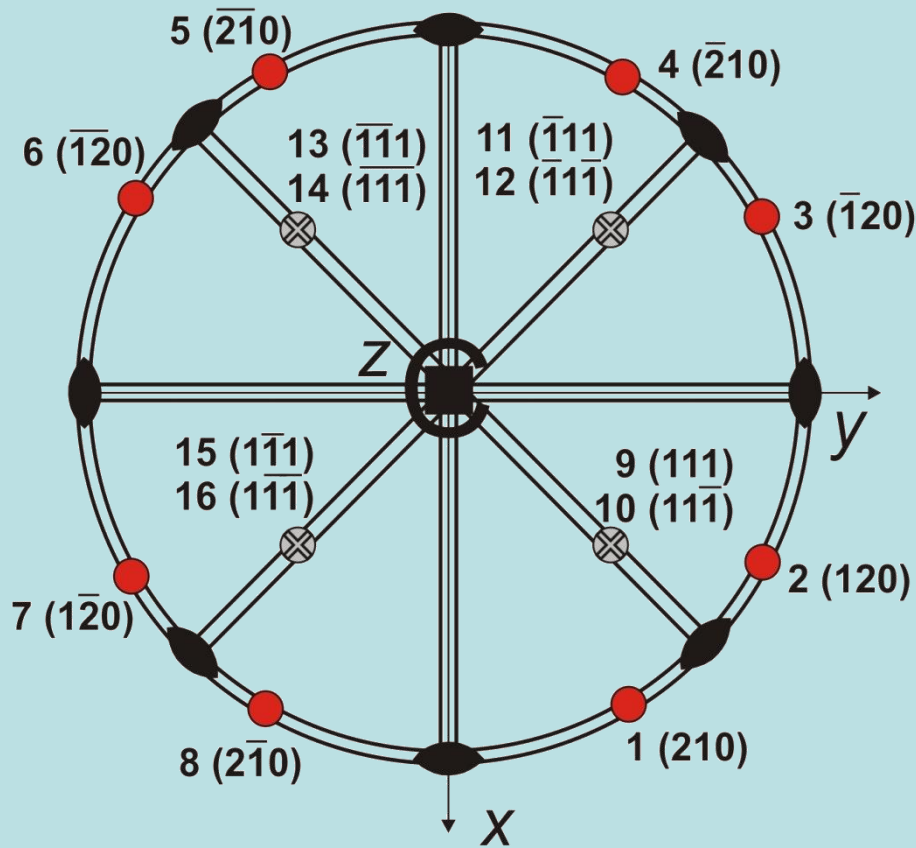
Закон рациональных отношений носит фундаментальный характер



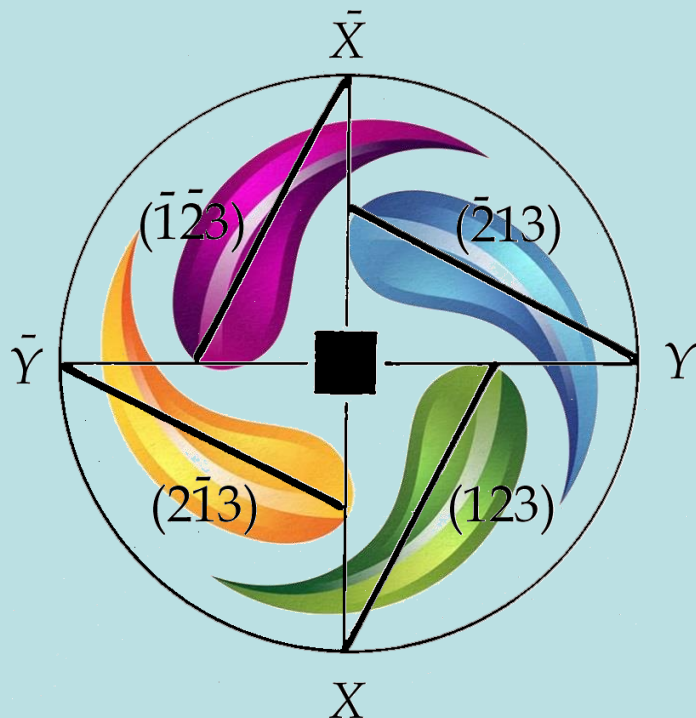
Закон рациональных отношений носит фундаментальный характер:

1. Символы атомных плоскостей кристалла - сравнительно небольшие числа
2. Символы атомных плоскостей кристалла – целые числа
3. Символы атомных плоскостей кристалла – взаимно простые числа

Чрезвычайно удобны индексы в плане размножения граней элементами симметрии



Символы граней, связанных элементами симметрии, *однотипны*, то есть содержат одни и те же цифры в качестве индексов, изменяются только их порядок следования и знаки.



Индексы эквивалентных плоскостей однотипны

Изменение индексов граней подчиняются *матрице преобразования координатных осей.*

Изменение символов плоскости $\{123\}$ тетрагонального кристалла при поворотах вокруг оси 4-ого порядка

Что это такое?



Связь между индексом плоскости и индексом лежащего в ней узлового ряда



Х.С.Вейс
1780-1856

Поскольку индекс направления может быть координатой точки, принадлежащей ему, выражение $hx + ky + lz = 0$ можно записать как

$$hr + ks + lt = 1$$

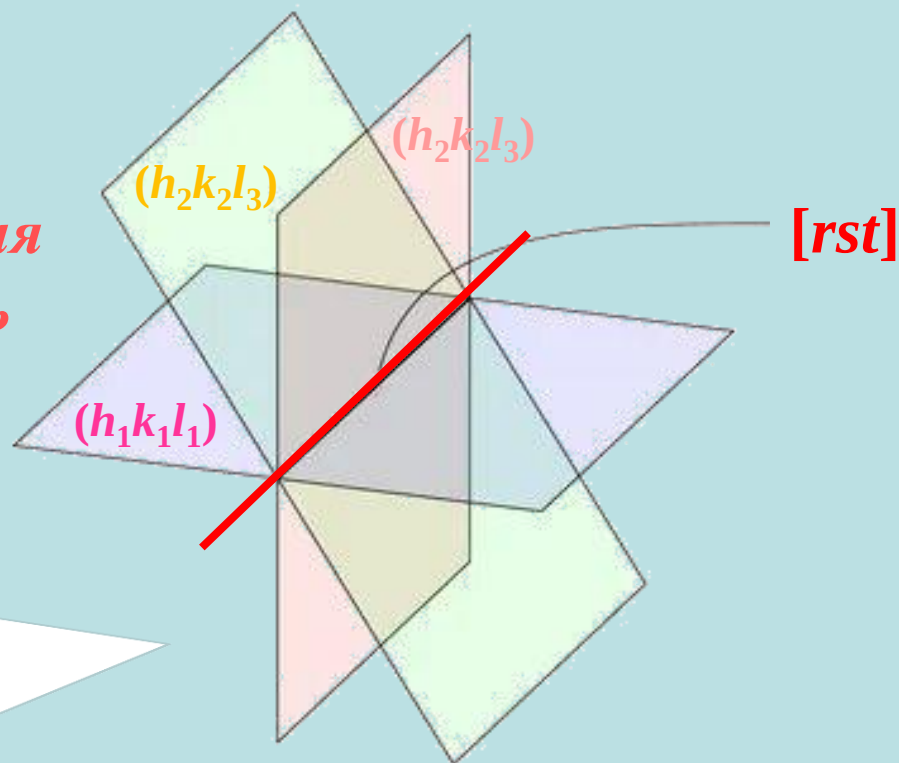
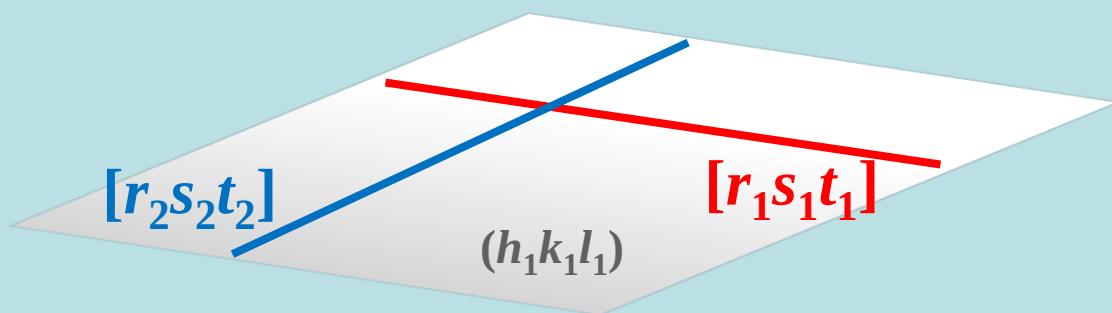
Это **фундаментальное уравнение** геометрической кристаллографии есть суть **закона Вейса - закона поясов или зон**

всякая плоскость, параллельная двум пересекающимся ребрам кристалла (принадлежащая двум его зонам), представляет собой возможную грань кристалла, а всякое направление, параллельное линии пересечения двух граней кристалла, - его возможное ребро.

Вывод из уравнения Вейса: *две непараллельные плоскости определяют направление (ребро) в кристалле*

$$hr + ks + lt = 1$$

два неколлинеарных направления определяют атомную плоскость



Для кристаллического могогранника это означает, что две грани определяют реальное или возможное ребро кристалла, а два ребра - реальную или возможную грань кристалла

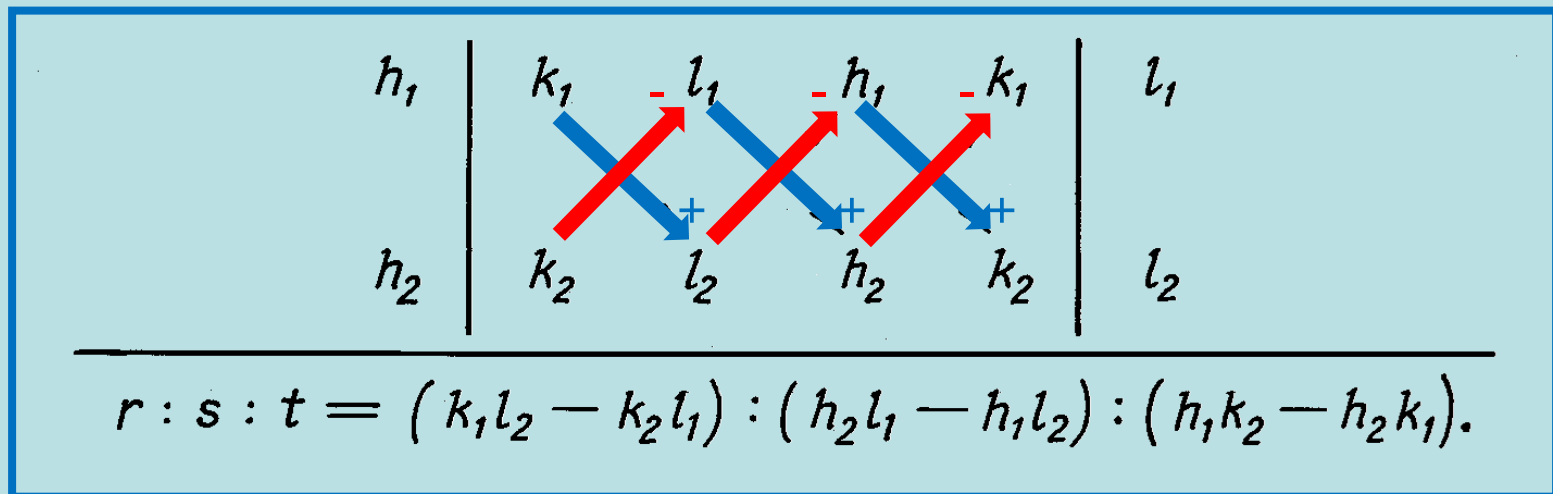
По символам двух плоскостей $(h_1k_1l_1)$ и $(h_2k_2l_2)$, можно определить символ узлового ряда $[rst]$, по которому они пересекаются.

Математически это означает векторное произведение векторов $(h_1k_1l_1)$ и $(h_2k_2l_2)$

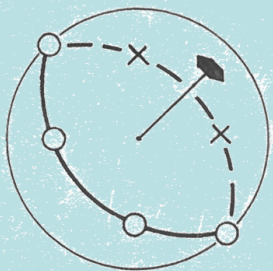
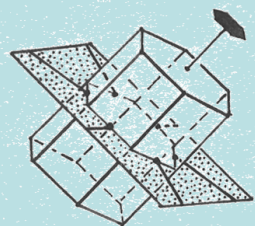
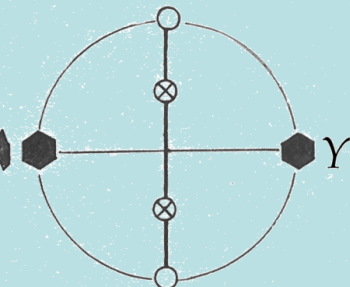
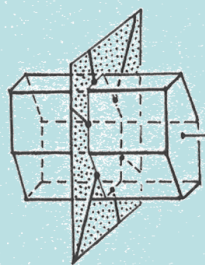
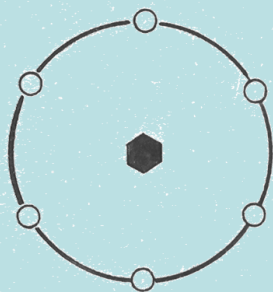
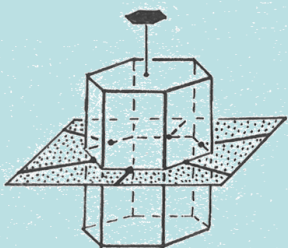
которое является решением системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} h_1r + k_1s + l_1t &= 1 \\ h_2r + k_2s + l_2t &= 1 \end{aligned} \right\}$$

Такие системы удобно решать с помощью мнемонического правила перекрестного умножения:



$$r : s : t = (k_1l_2 - k_2l_1) : (h_2l_1 - h_1l_2) : (h_1k_2 - h_2k_1).$$



Вспоминаем
изученное

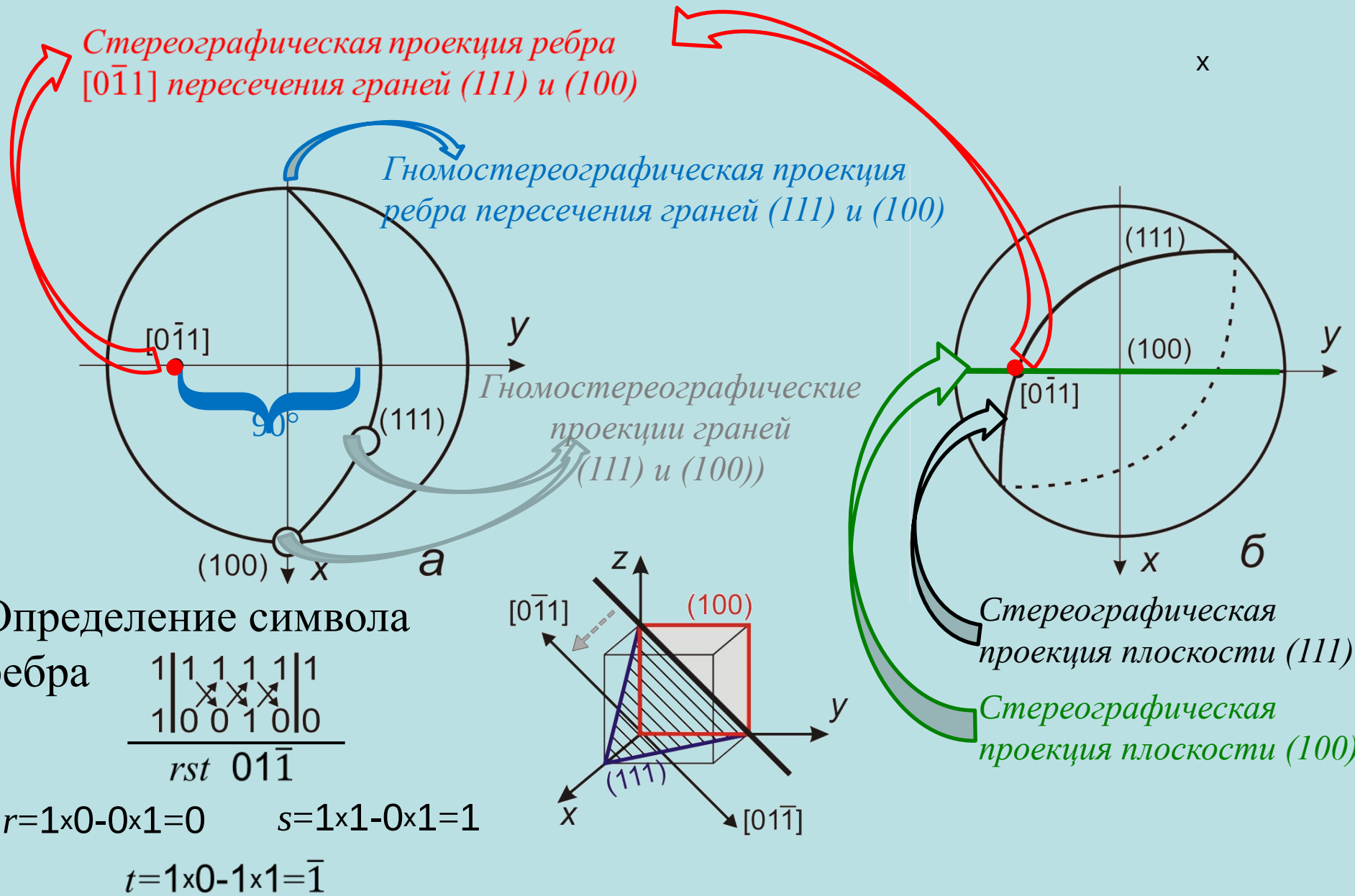


Зона (поясом) кристалла - это совокупность **таутозональных** граней, нормали которых лежат в одной плоскости. В кристалле такие грани пересекаются по параллельным ребрам, а их **гномотереографические проекции** попадают на один меридиан (окружность или диаметр)

Зная символы пересекающихся граней, можно рассчитать символ ребра, по которому они пересекаются и, наоборот, по символам двух пересекающихся ребер можно определить символ грани, в которой они лежат

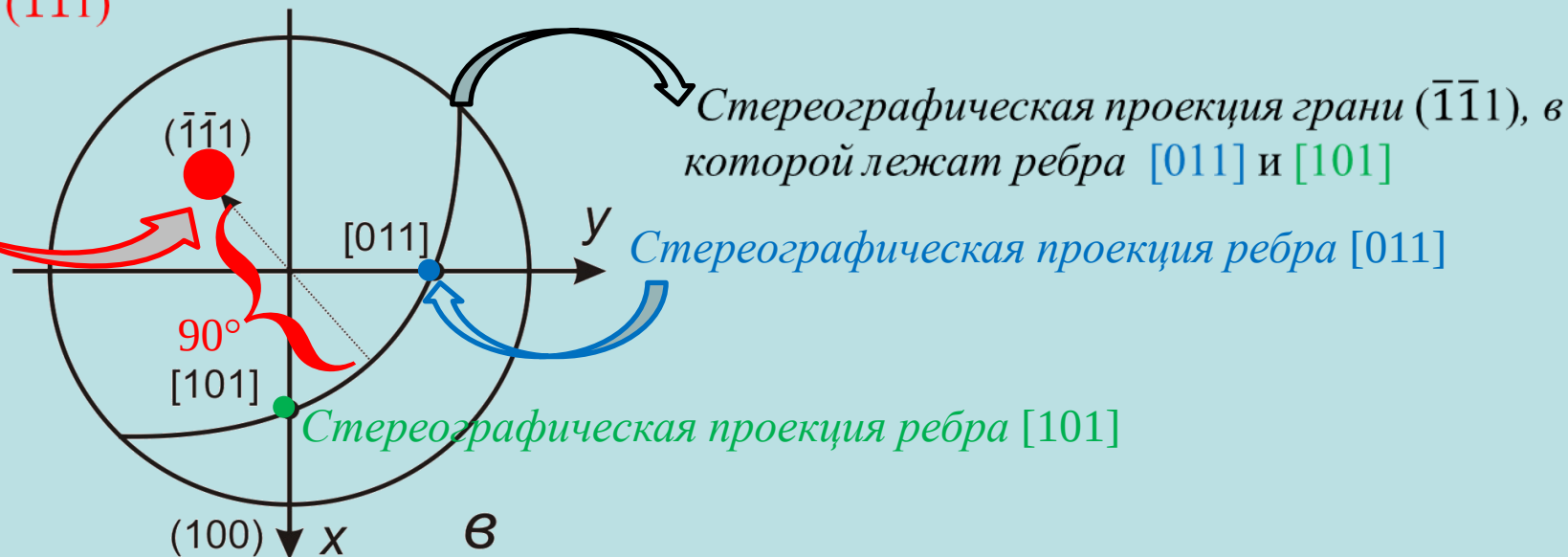
Проекции таутозональных граней, связанных осью 6-го порядка, являющейся осью зоны.

Графическое определение символа ребра, являющегося пересечением граней (100) и (111)



Графическое определение символа грани, в которой лежат ребра $[101]$ и $[011]$.

Гномостереографическая проекция плоскости $(\bar{1}\bar{1}1)$



Определение символа грани

$$\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline hkl & \bar{1} & \bar{1} & 1 & & \end{array}$$

$$h=0 \times 1 - 1 \times 1 = -1$$

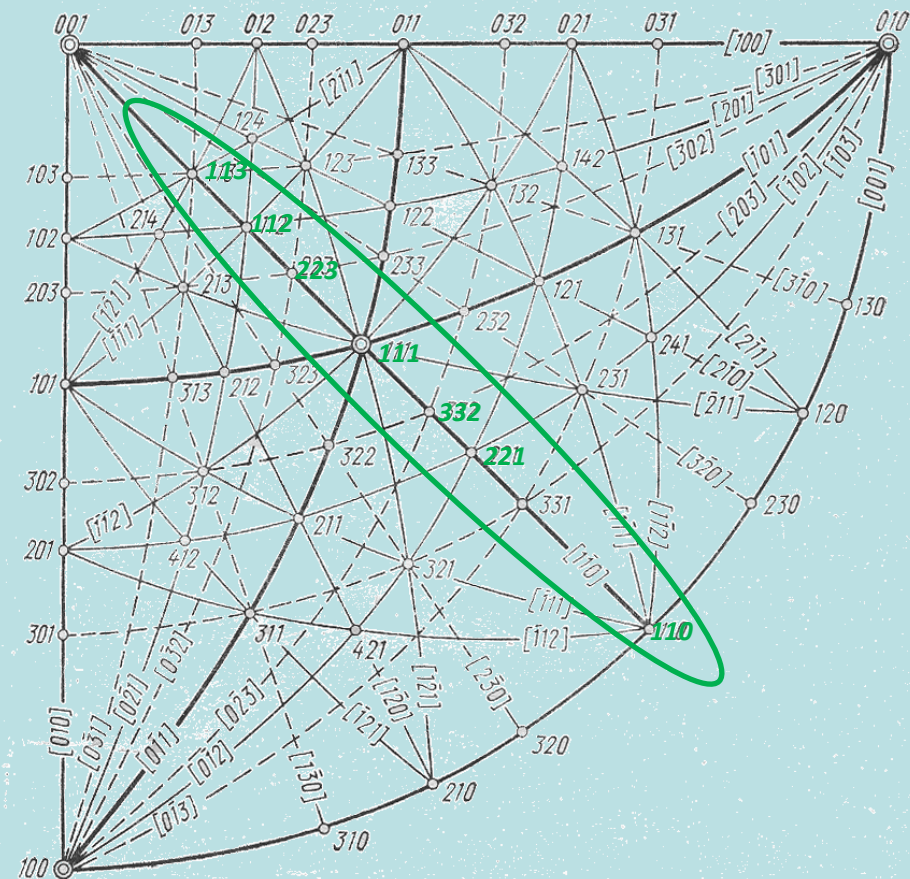
$$k=1 \times 0 - 1 \times 1 = -1$$

$$l=1 \times 1 - 0 \times 0 = 1$$

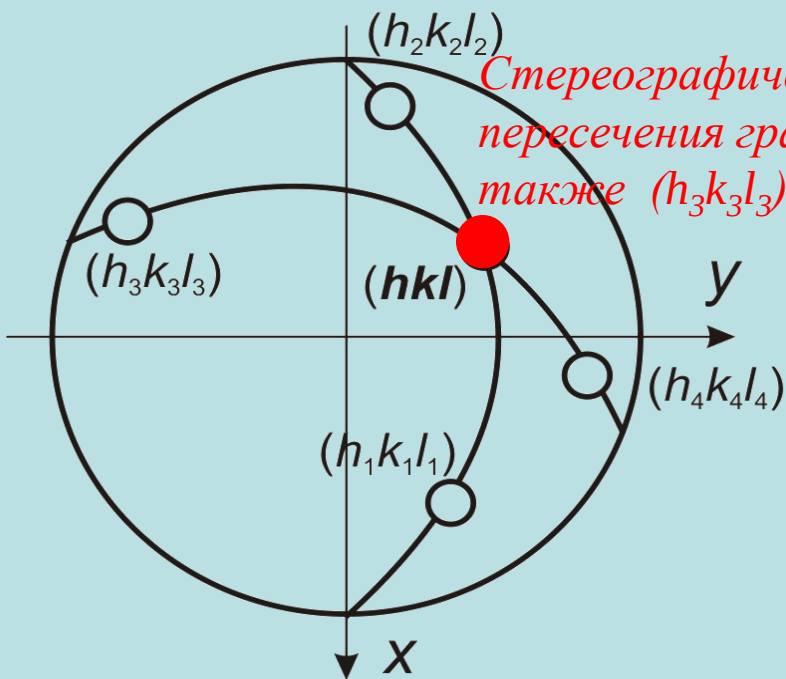
Метод развития зон (поясов), или метод Вейса (графическое получение возможных граней и ребер кристалла).

Некоторые следствия из соотношения $hr + ks + lt = 1$:

- В символе любой параллельной координатной оси грани, индекс, соответствующий этой оси, равен нулю. Например, в символах граней, параллельных оси X , $h = 0$. Действительно, символ оси X – $[100]$, следовательно, $h \cdot 1 + k \cdot 0 + l \cdot 0 = 1$, откуда $h = 1$.
- Для всех граней, принадлежащих любой из проходящей через грань (001) зон, кроме самой грани (001) , постоянно отношение $h : k = \text{const}$.



Для символов таутозональных граней (hkl) , $(h_1k_1l_1)$, $(h_2k_2l_2)$ существует следующая зависимость:



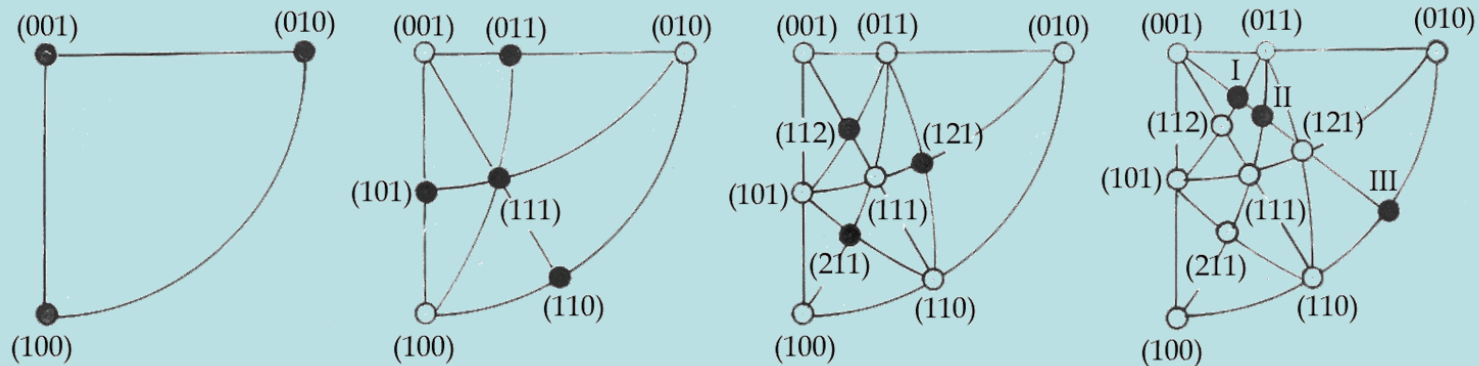
Стереографическая проекция ребра пересечения граней $(h_1k_1l_1)$ и $(h_2k_2l_2)$, а также $(h_3k_3l_3)$ и $(h_4k_4l_4)$

грань, символ которой получен простым почленным сложением индексов двух других граней, принадлежит этой же зоне

$$\left. \begin{aligned} (h_1 + h_2)r : (k_1 + k_2)s : (l_1 + l_2)t &= (hkl) \\ (h_3 + h_4)r : (k_3 + k_4)s : (l_3 + l_4)t &= (hkl) \end{aligned} \right\}$$

Метод развития зон.

С помощью этого метода можно, не прибегая к промежуточным расчетам, получить все возможные грани. Для этого необходимы 3 координатные грани, с известными символами (100), (010), (001) и предварительно выбранная единичная – (111)



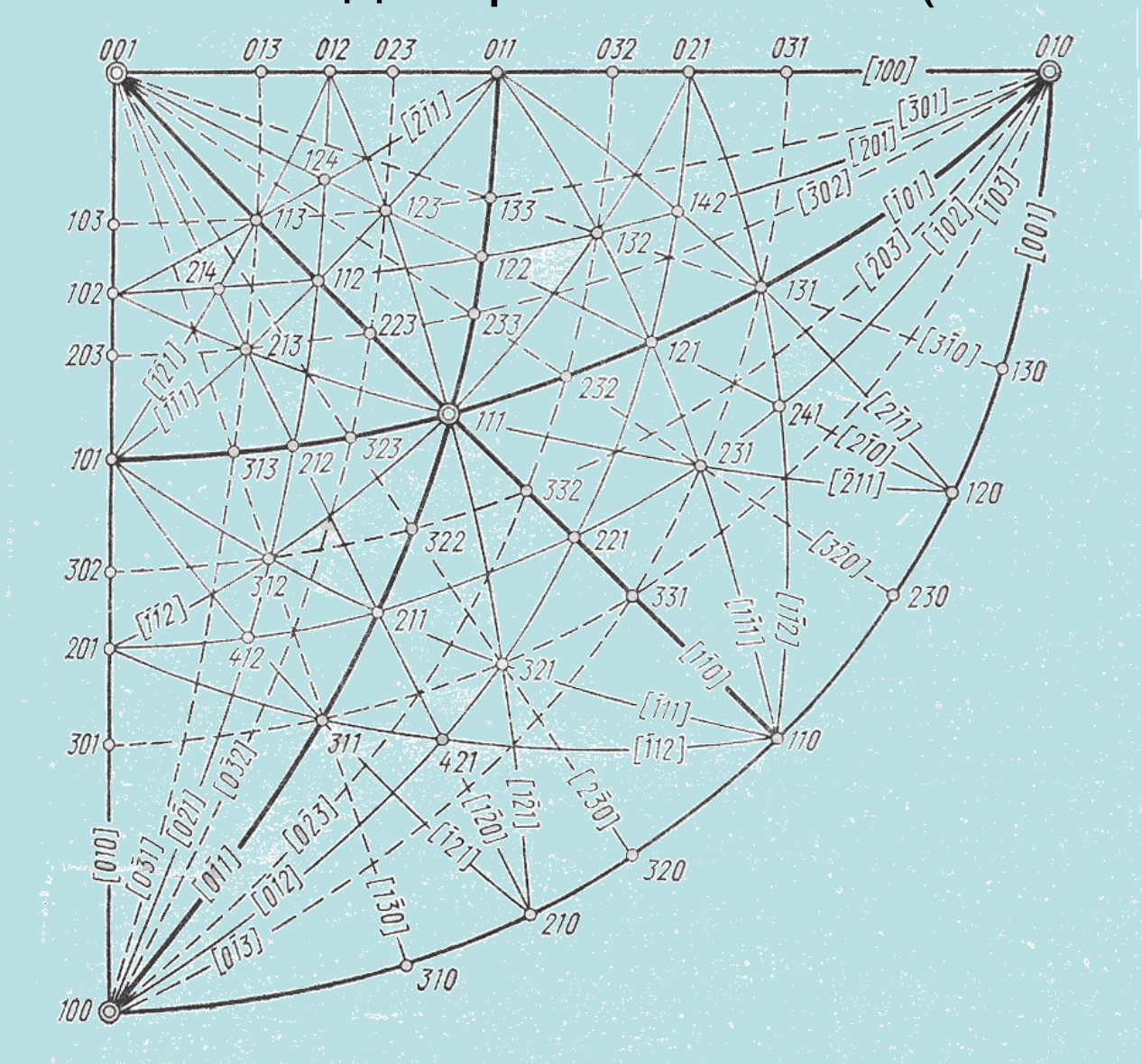
Зоны рекомендуется проводить последовательно, соединяя точки с минимальной суммой индексов:

1. через координатные грани – получим зоны координатных осей;
2. через единичную и координатные грани – получим двуединичные грани (011), (101), (110);
3. через двуединичные грани – получим грани с символами:
 $(112) = (111) + (001),$
 $(121) = (111) + (010),$
 $(211) = (111) + (100)$ и т.д .

Метод зон – кристаллографическое СУДОКУ!



Схема получения возможных граней кубического кристалла методом развития зон (поясов)



Как найти положение грани с заданным символом?

Грань с символом **(213)** в кубическом кристалле. Положение единичной грани однозначно фиксируется координатами $\varphi=45^\circ$ и $\rho\approx 55^\circ$. Символ грани следует представить как сумму символов различных пар (обратная задача к сложению символов).

Расщепив символ **(213)** двумя способами, найдем две такие зоны:

(101) – **(112)** и **(001)** – **(212)**, на пересечении которых находится искомая грань.

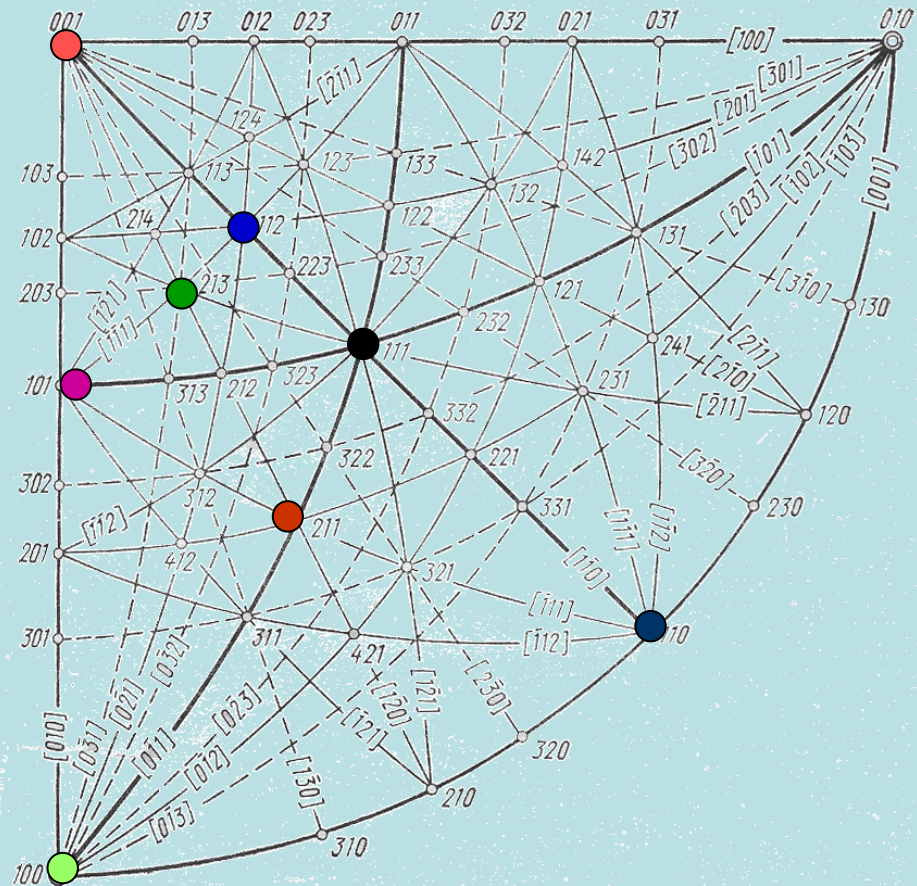
Всякая грань, кроме координатных и единичной, нуждается в подтверждении двумя зонами.

$$(112) = (111) - (001),$$

$$(212) = (211) - (001).$$

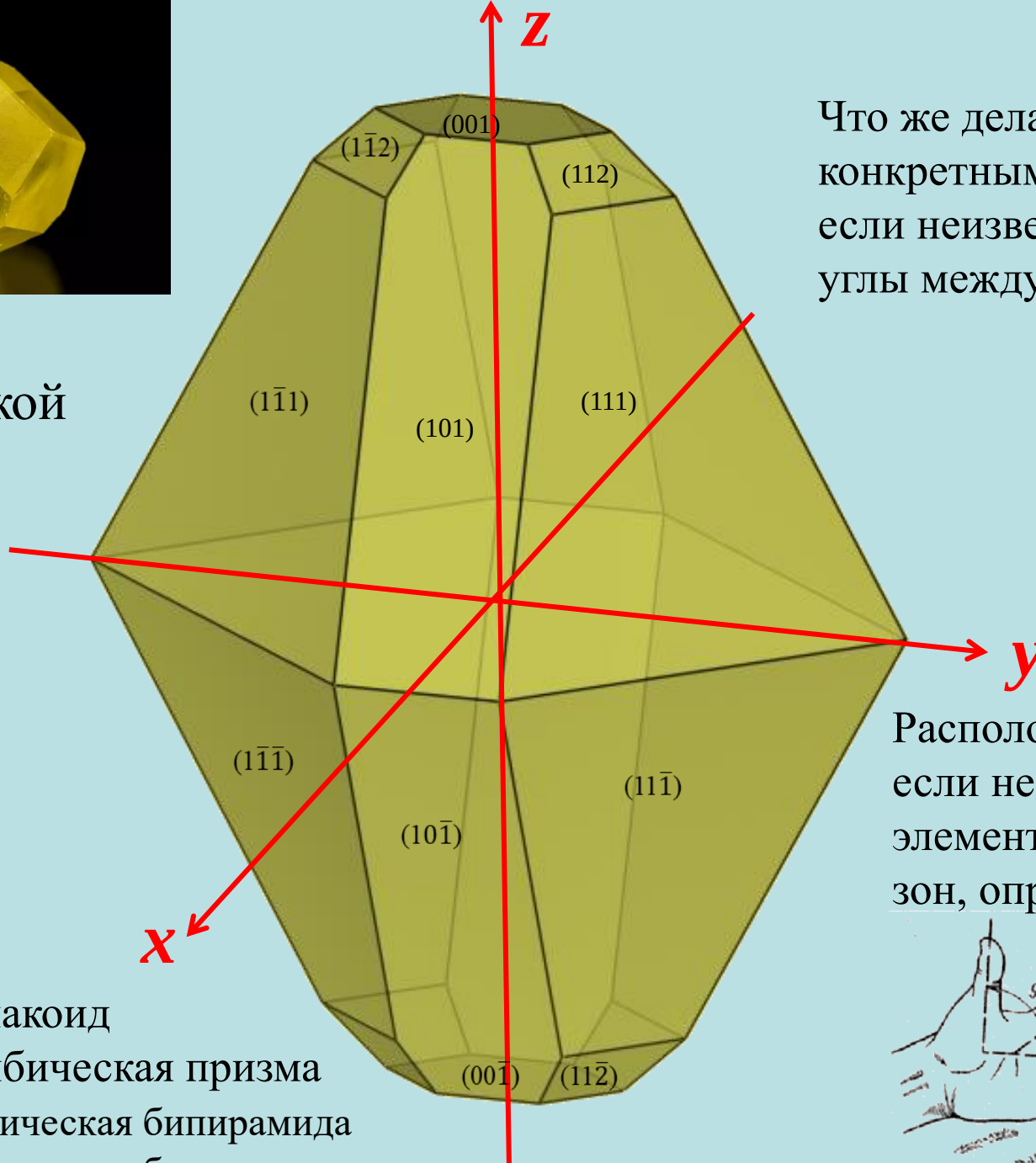
$$(211) = (100) - (111)$$

$$\text{и } (101) - (110).$$



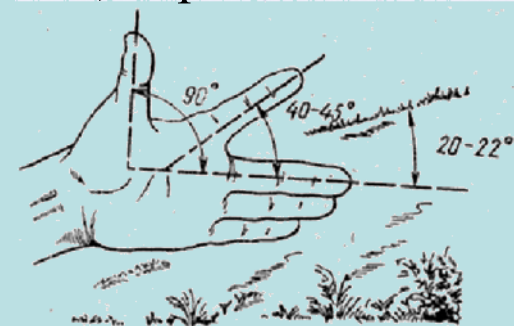


Кристалл
ромбической
серы



Что же делать с
конкретным кристаллом,
если неизвестны точные
углы между гранями?

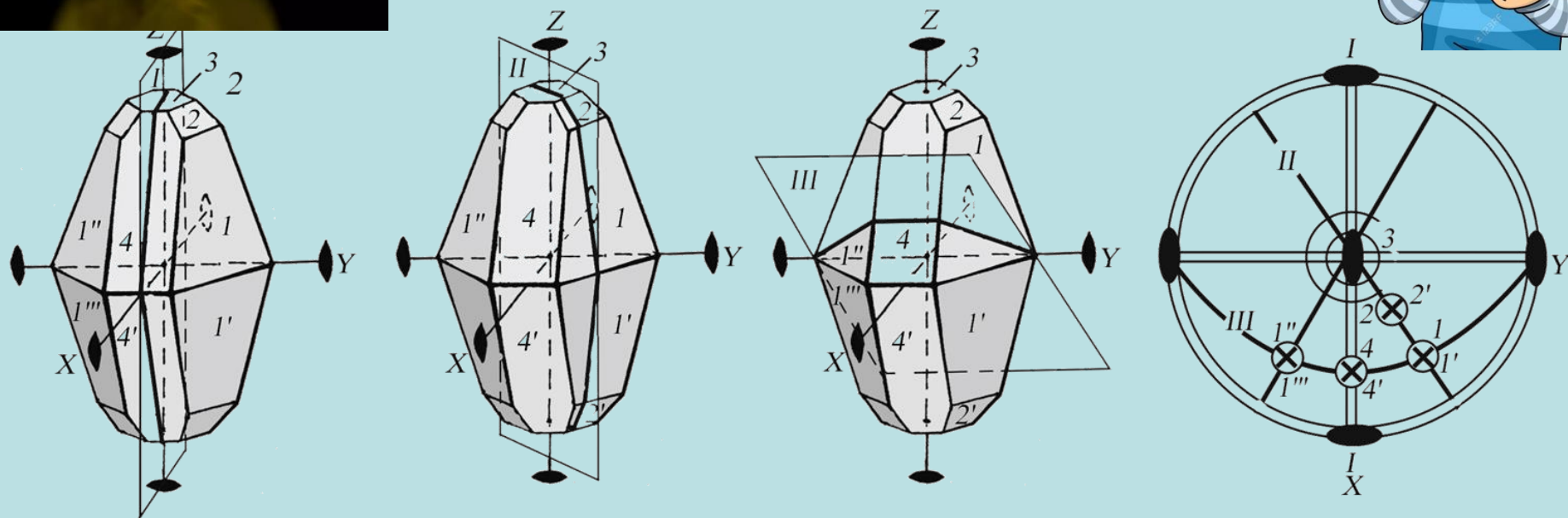
Расположение граней,
если не хватает
элементов симметрии и
зон, определяется на глаз



- $\{001\}$ – пинакоид
- $\{101\}$ – ромбическая призма
- $\{111\}$ – ромбическая бипирамида
- $\{112\}$ – ромбическая бипирамида



Индицирование кристалла ромбической серы



Зоны III и II позволяют однозначно позиционировать грани **1** и **4** относительно друг друга.

Грань **2** наносится приблизительно на зону II между гранями **3** и **1**.

Грань **3** имеет однозначный символ (001) и не нуждается в единичной грани.

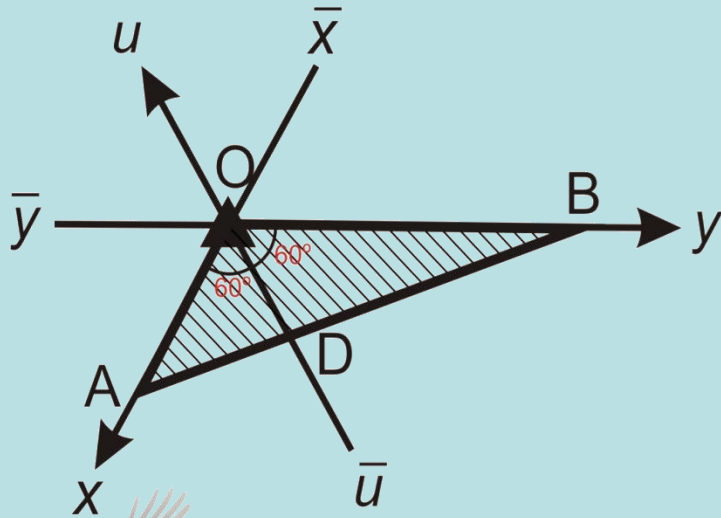
За единичную грань выбирается грань **1**, как наиболее развитая, лежащая в наибольшем количестве зон и пересекающая все координатные оси (111).

Тогда грань 4 однозначно определяется как (101), а грань **2** приблизительно как (112)

Индицирование гексагональных кристаллов

Особенности индицирования гексагональных кристаллов обусловлены принятой для описания гексагональных кристаллов четырехосной системой координат. Обязательное присутствие оси третьего или шестого порядков в этой сингонии ведет к появлению еще одной горизонтальной оси. «Лишняя» ось U полностью эквивалентна осям X и Y .

Наличие трех осей в одной плоскости, другими словами в двумерном пространстве, делает символ по третьей оси зависимым от двух остальных:



h

+



+



i

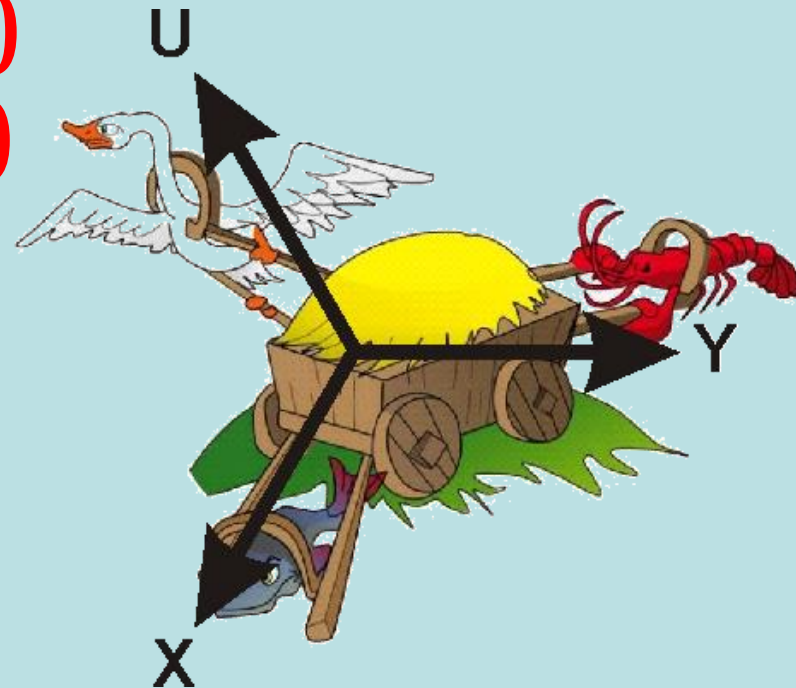
$= 0$

+

k

+

А координаты точки, заданные в такой четырехосной системе неоднозначны

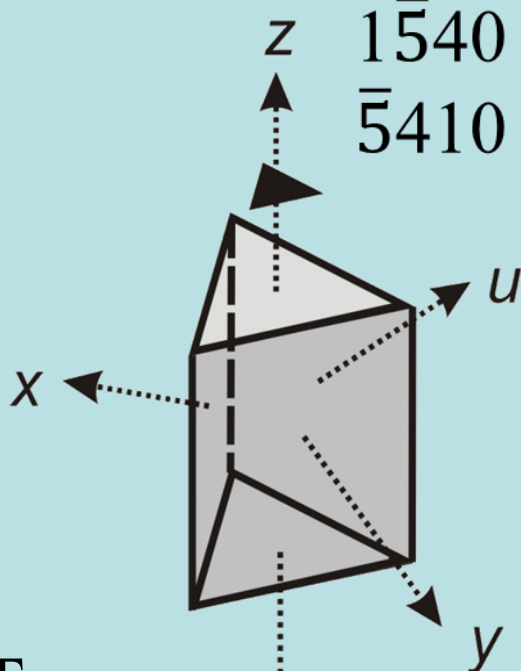


Четырехпозиционные индексы граней, связанных осью третьего или шестого порядка в явном виде демонстрируют их однотипность.

Индексы $41\bar{5}0$ состоят из одинаковых цифр

$1\bar{5}40$

$\bar{5}410$

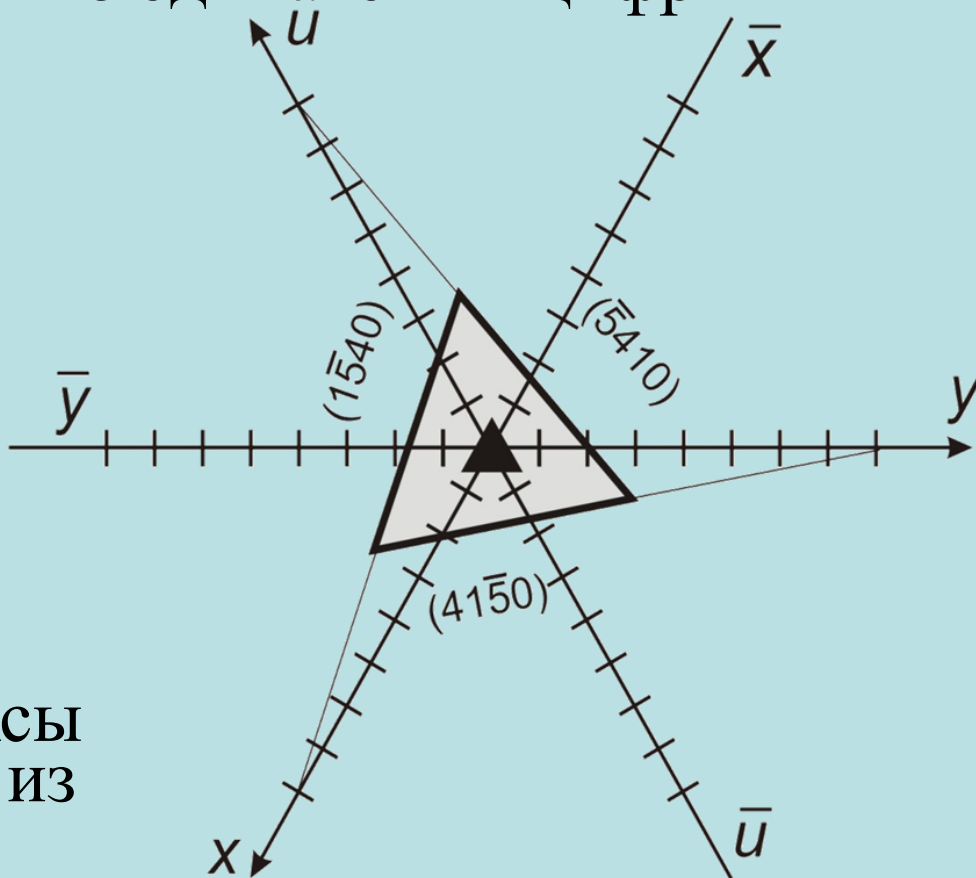


Трехпозиционные индексы

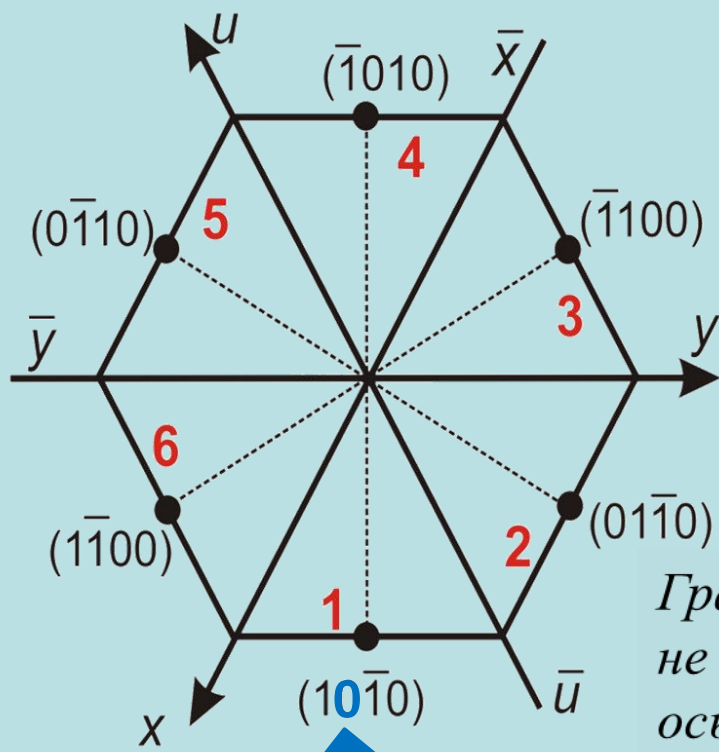
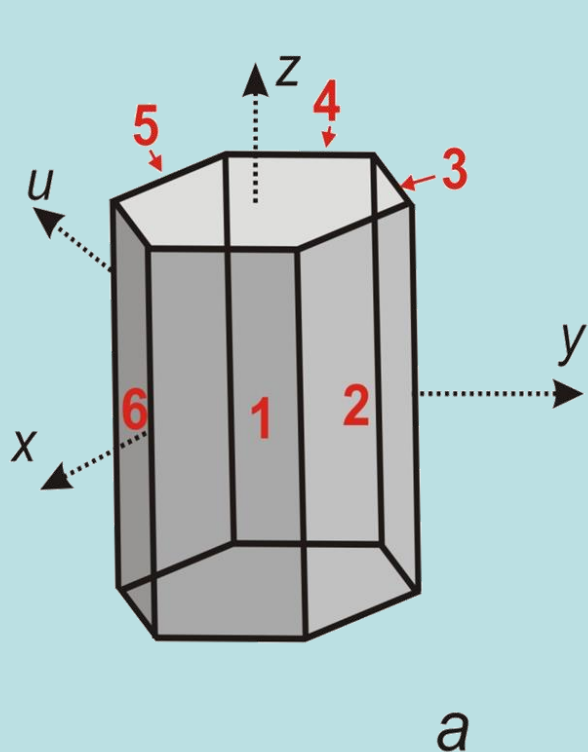
410 состоят из

$1\bar{5}0$ разных

$\bar{5}40$ цифр

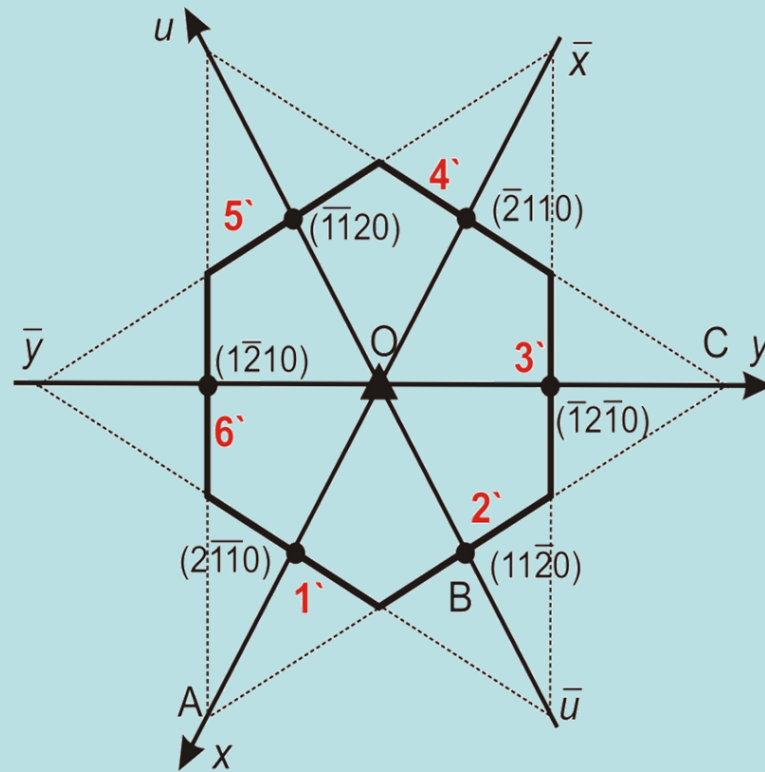
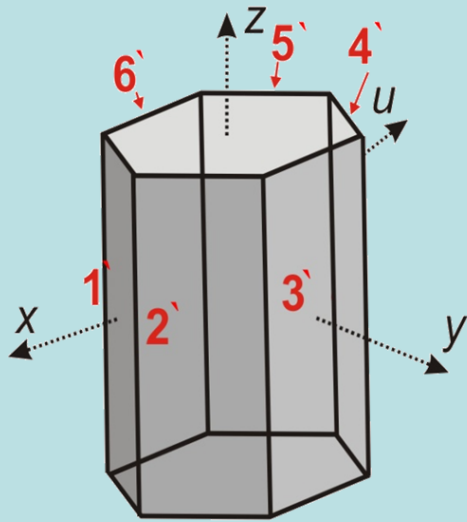


Индицирование граней гексагональной призмы $\{10\bar{1}0\}$.

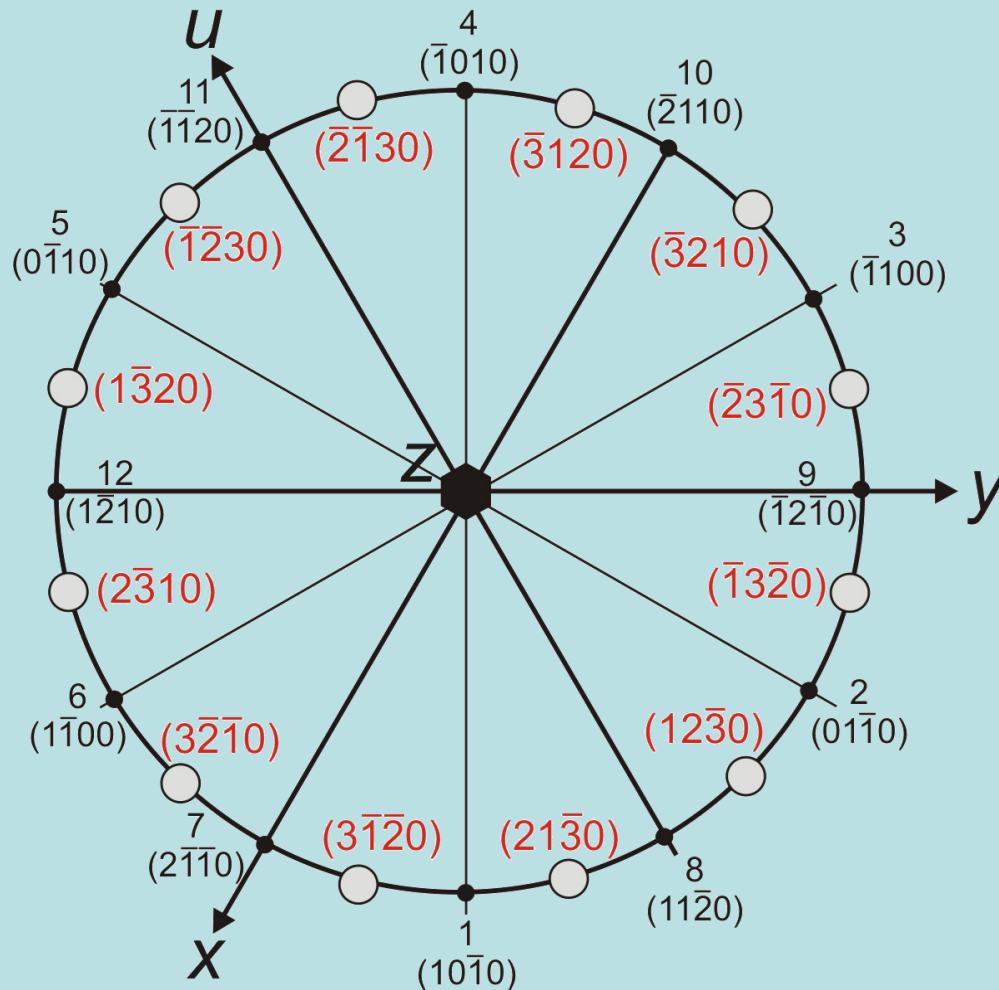


Грань $(10\bar{1}0)$
не пересекает
ось y и ось z

Индицирование граней гексагональной призмы $\{2\bar{1}\bar{1}0\}$.



Индицирование граней дигексагональной призмы $\{21\bar{3}0\}$.



В кристаллографии используются следующие обозначения:

✓ Индексы, заключенные в круглые скобки (hkl) – индексы Миллера конкретной плоскости

✓ Индексы, заключенные в фигурные скобки $\{hkl\}$ – индексы Миллера совокупности эквивалентных плоскостей

✓ Индексы, заключенные в квадратные скобки $[rst]$ – индексы Вейса для конкретного направления

✓ Индексы, заключенные в угловые скобки $\langle rst \rangle$ – индексы Вейса для всех эквивалентных направлений

Символы направлений и граней, несмотря на свою внешнюю простоту, обладают множеством поразительных достоинств:

1. Позволяют определить с математической точностью пространственное расположение элементов кристалла, как относительно координатных осей, так и относительно других элементов кристалла (граней, ребер и т. д.).
2. Отличать по внешнему виду наиболее плотноупакованные грани кристалла, соответствующие узловым плоскостям с наибольшей ретикулярной плотностью.
3. Выделять эквивалентные атомные ряды или плоскости, обладающие одинаковой структурой и физическими свойствами.
4. Характеризовать анизотропию кристалла и его симметрию.
5. Рассчитывать углы между гранями и ребрами кристалла.

Уникальное достоинство этих весьма простых и компактных кристаллографических символов благодаря учету закономерностей периодического атомного строения и соблюдению четких правил индицирования граней кристалла, заключается в поразительном сочетании *математической точности и кристаллографической ёмкости*.



Широкое распространение символов в кристаллографии не ограничивается индицированием в морфологическом аспекте. Система индексов плоскостей и направлений оказалась широко востребованной в микрорентгенографии в качестве основного геометрического инструмента рентгеноструктурного анализа и других методов расшифровки структур.



(421)



($\bar{4}\bar{2}\bar{1}$)

Господа индексы!

Все остаются на своих местах, но меняют знаки

Что же за операция симметрии скрывается за такой перестановкой?



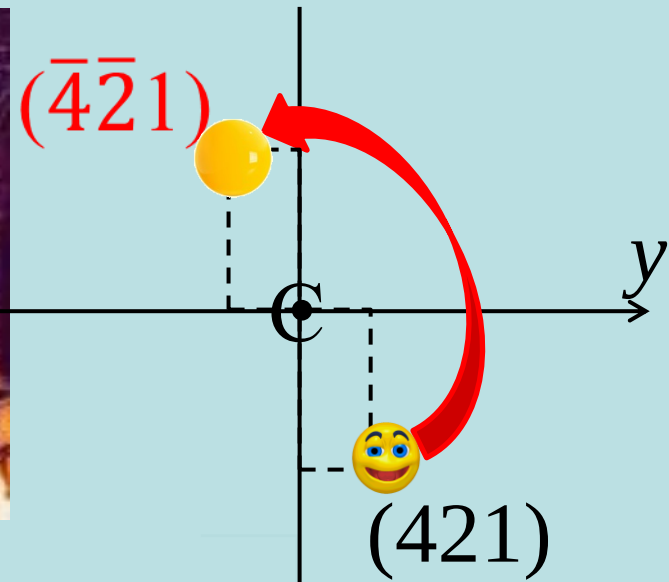


(421)



$(\bar{4}\bar{2}\bar{1})$

Инверсия знаков всех индексов
символа демонстрирует
отражение в точке





(421)



$(\bar{2}41)$

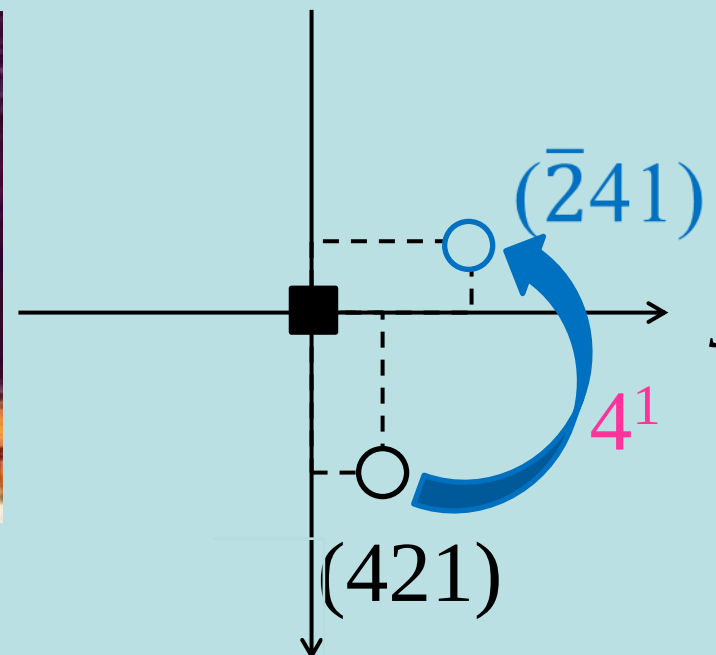
Господа индексы!

Индекс ***k*** переходит на первое место и меняет знак.

Последний индекс ***l*** остается на месте без изменения

Что же за операция симметрии скрывается за такой перестановкой?

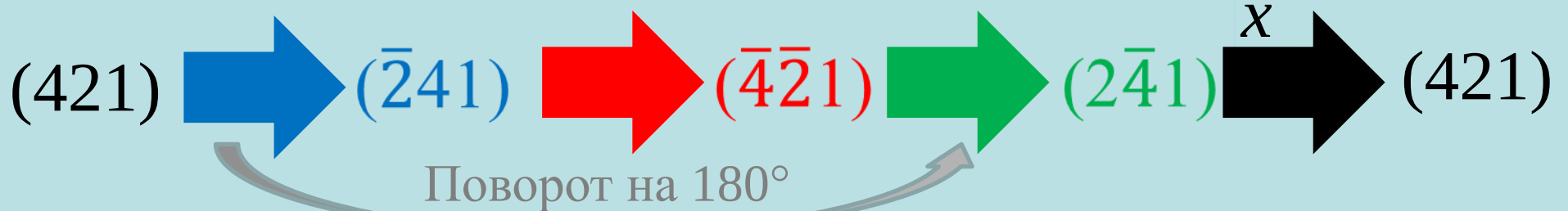
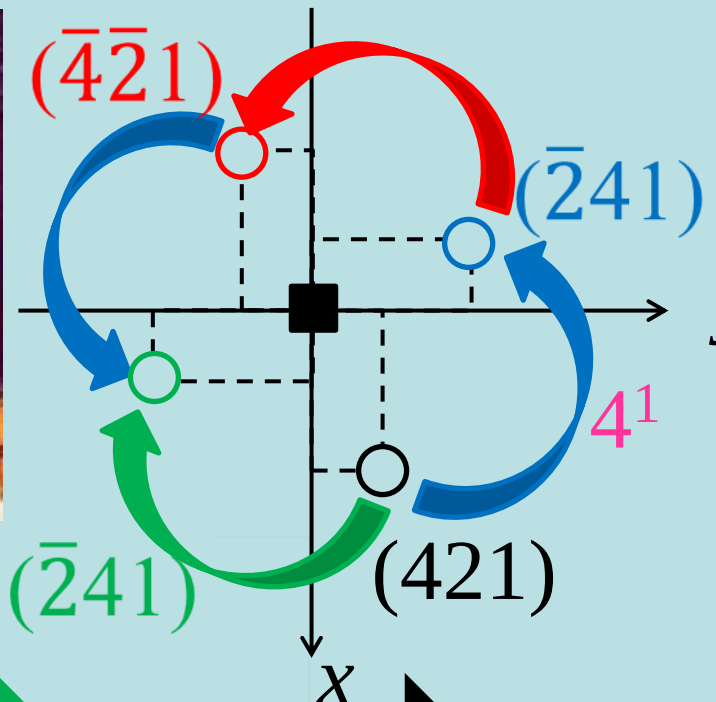




$(421) \longrightarrow (\bar{2}41)$

Поворот против часовой
стрелки на 90° вокруг
оси 4-ого порядка 4_z





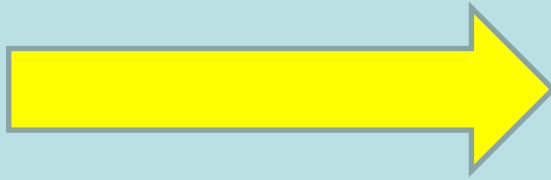
Господа индексы!

Первые два индекса ***h*** и ***k*** меняются местами, при этом выходящий на первое место меняет знак. Индекс ***k*** переходит на первое место и меняет знак. Операция повторяется до возвращения в исходное положение

Последний индекс ***l*** остается на месте без изменения



(421)



(24 $\bar{1}$)

Господа индексы!

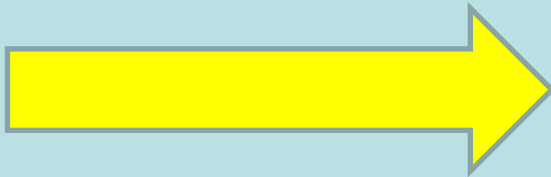
Первые два индекса **h** и **k** меняются местами с сохранением знаков, а последний индекс **l** меняет знак, оставаясь на месте.

Что же за операция симметрии скрывается за такой перестановкой?

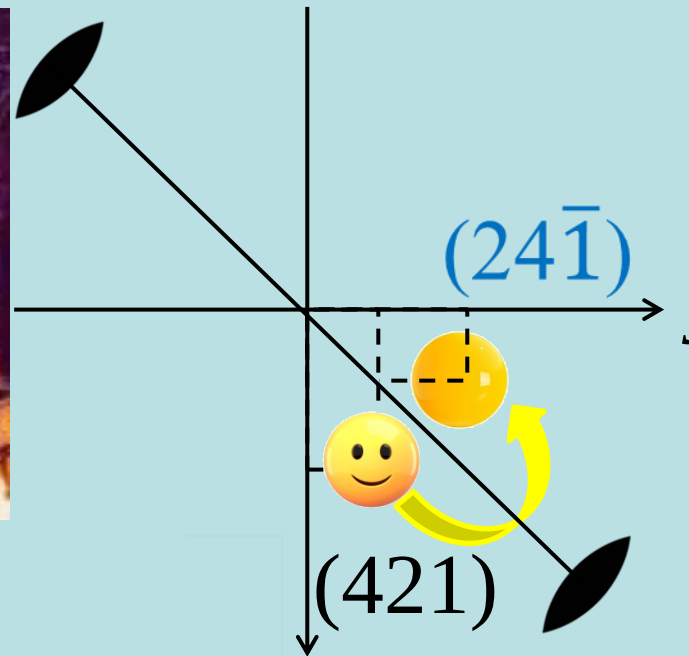




(421)



$(24\bar{1})$





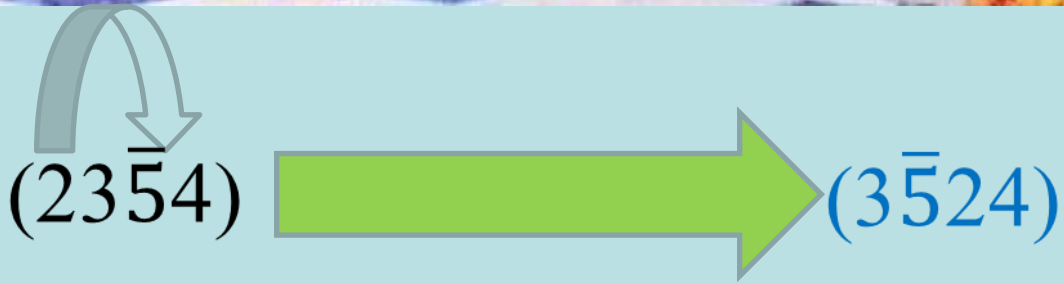
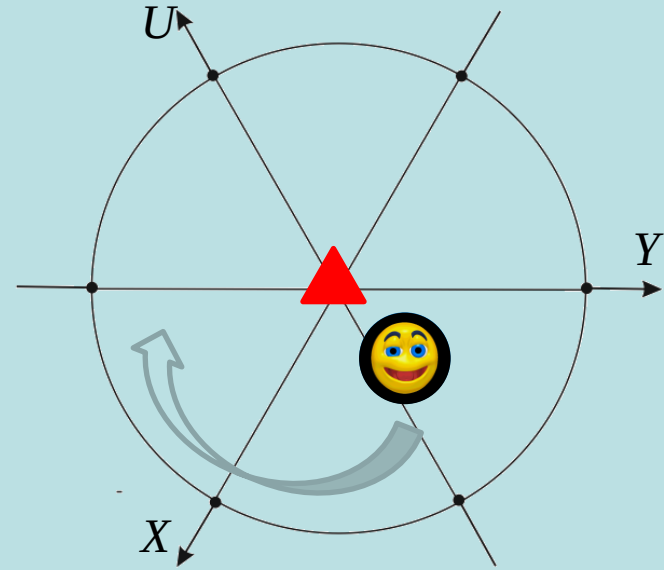
Господа индексы!

Первые три индекса (*h*, *k* и *i*) меняются местами по часовой стрелке, прихватив свои знаки.

Последний индекс *l* остается на месте без изменения

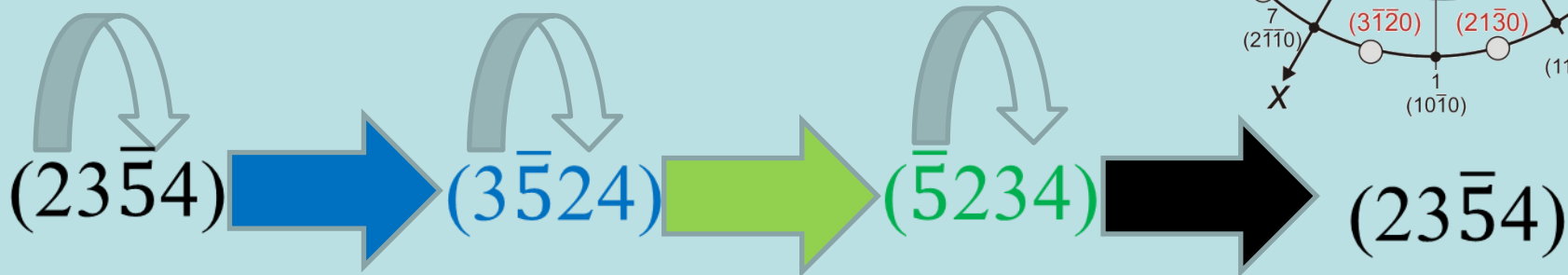
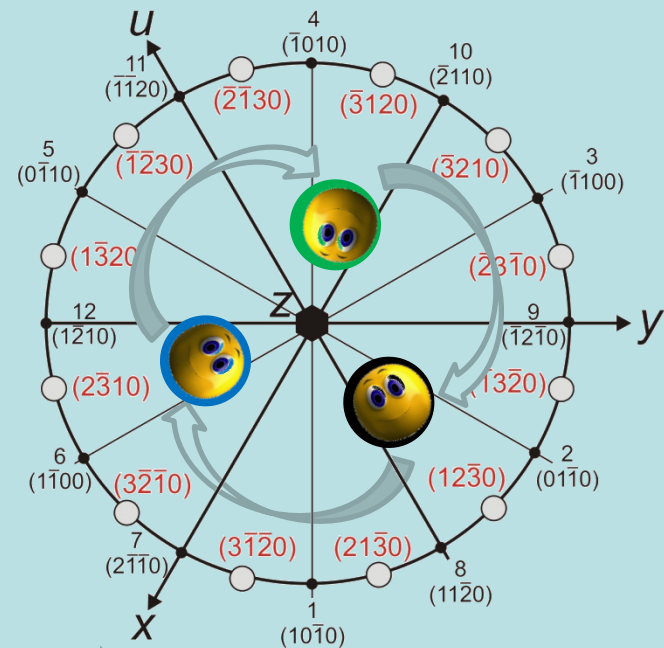
Что же за операция симметрии скрывается за такой перестановкой?







h k l
 i



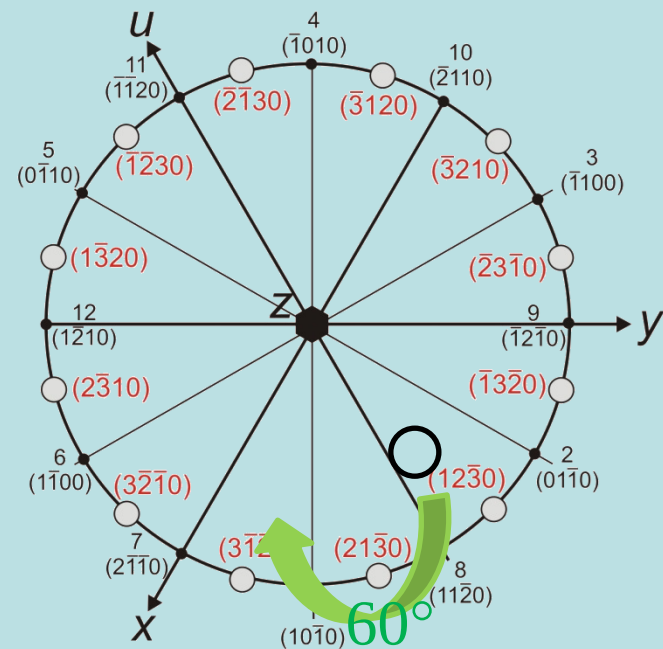
Господа индексы!

Первые три индекса (h , k и i) повторяют перестановку еще два раза, не забывая про свои знаки.

Последний индекс l по-прежнему остается на месте без изменения



Если все сделано верно, точка возвращается в исходной положение



$$23\bar{5}1 \longrightarrow 5\bar{2}\bar{3}1$$

Господа индексы!

Первые три индекса (h , k и i) меняются местами, i выходит на первое место. Одновременно каждый из горизонтальных индексов h , k и i меняет знак на противоположный.

Последний индекс l остается на месте без изменения

Что же за операция симметрии скрывается за такой перестановкой?





$23\bar{5}1$

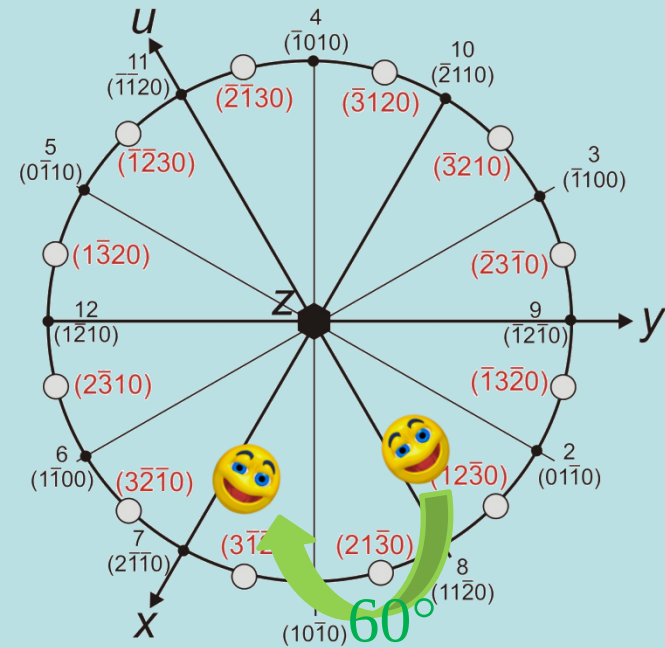


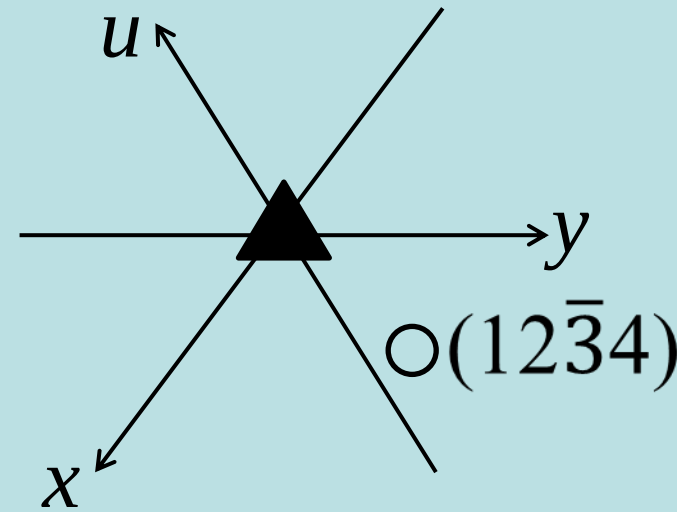
$5\bar{2}\bar{3}1$

Господа индексы!

Первые три индекса (h , k и i) повторяют перестановку (третий индекс выходит на первое место и все трое меняют знаки) до тех пор пока точка не придет в исходное положение.

Последний индекс l по-прежнему остается без изменения на месте





$(12\bar{3}4)$



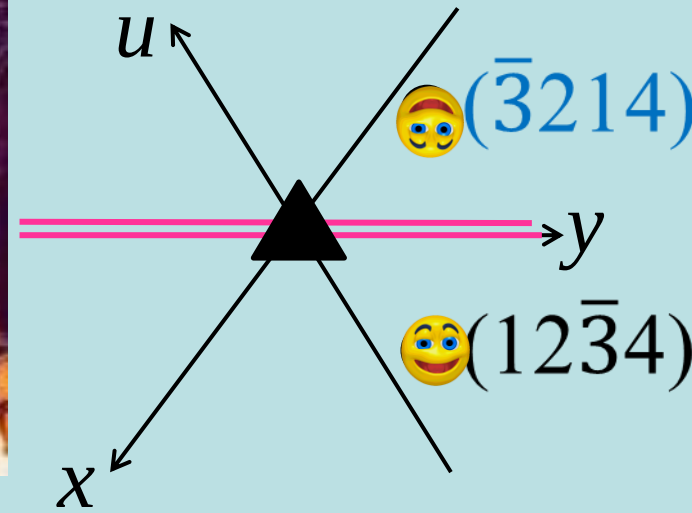
$(\bar{3}214)$

Господа индексы!

Индекс ***k*** остается без изменения на месте. Индексы ***h*** и ***i*** меняются местами без изменения своих знаков. Индекс ***l*** остается на месте без изменения

Что же за операция симметрии скрывается за такой перестановкой?





$(12\bar{3}4)$



$(\bar{3}214)$

