ЛЕКЦИЯ 3

Некоторые основы сферической тригонометрии.

Вывод классов симметрии

***<u>А также</u>*: некоторые кристаллографические аспекты войны 1854-1855г.**

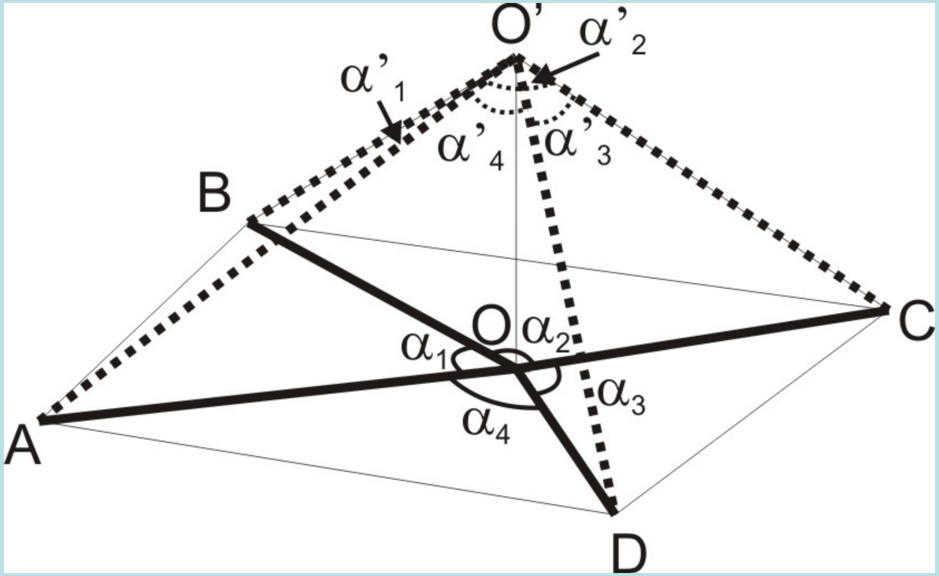


Математическая разминка

Для выпуклых многогранников справедливы следующие высказывания:

1. По теореме Эйлера для выпуклых многогранников В+Г=Р+2

2. В любом ***трехмерном многограннике*** (в том числе и правильном) сумма всех углов между ребрами, сходящимися в одной вершине, всегда меньше 360°.



Очевидно, что при бесконечно большом расстоянии от плоскости углы α\` вырождаются в бесконечно малые углы, следовательно, каждый угол $\alpha$\` будет меньше соответствующего угла α. Т.е. сумма будет меньше 360.

Таким образом, в вершине могут сходится лишь:

1) 3 равносторонних треугольника с углом 60°. $60° \times 3 = 180°$ **тетраэдр**

2) 4 равносторонних треугольника с углом 60°. $60° \times 4 = 240°$ **октаэдр**

3) 5 равносторонних треугольников с углом 60°. $60° \times 5 = 300°$ **икосаэдр**

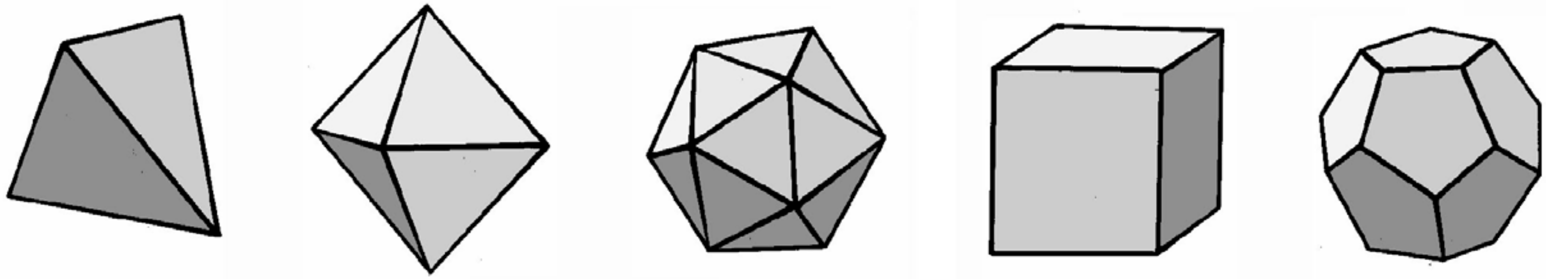
6 таких треугольников дают уже $60° \times 6 = 360°$ - нельзя!

4) 3 квадрата ($90° \times 3 = 270°$)
гексаэдр (слово куб оставим для детского сада)

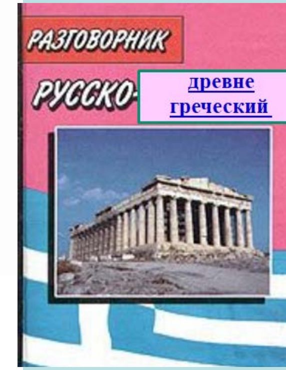
4 таких квадрата дают уже $90° \times 4 = 360°$ - нельзя!

5) 3 правильных пятиугольника ($108° \times 3 = 324°$) **додекаэдр** (правильный!)

3 правильных шестиугольника ($120° \times 3 = 360°$) –нельзя!

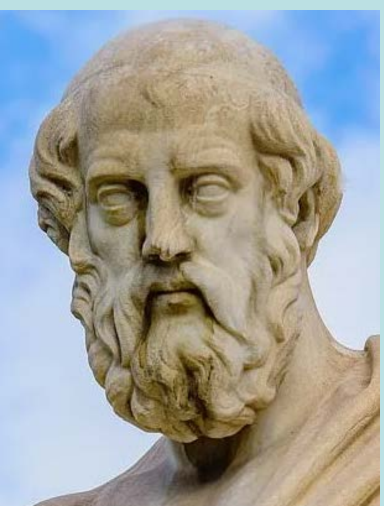


тетра-эдр 4 | окта-эдр 8 | икоса-эдр 20 | гекса-эдр 6 | додека-эдр 12

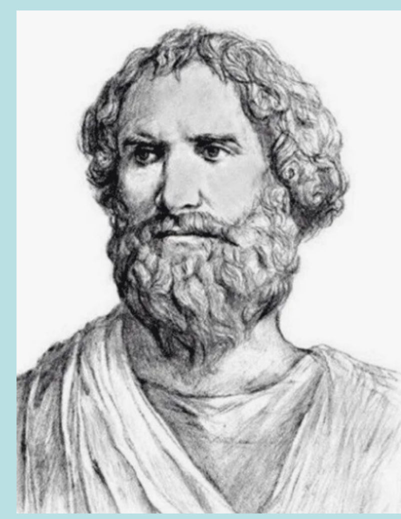


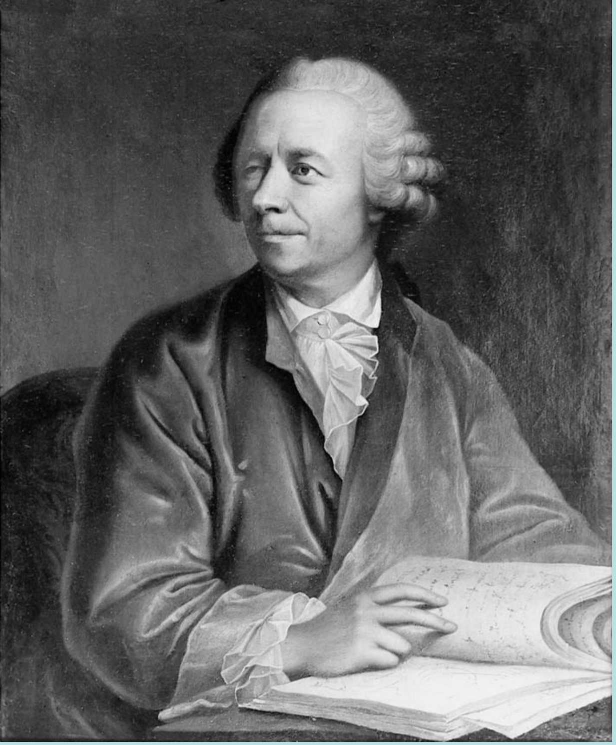
Право же, удивительно, что из пятиугольников тоже можно построить многогранник. А из шестиугольников нельзя! И теперь понятно почему.

Итого: правильных многогранников всего пять.



Мы повторили сейчас выводы великих древнегреческих мыслителей





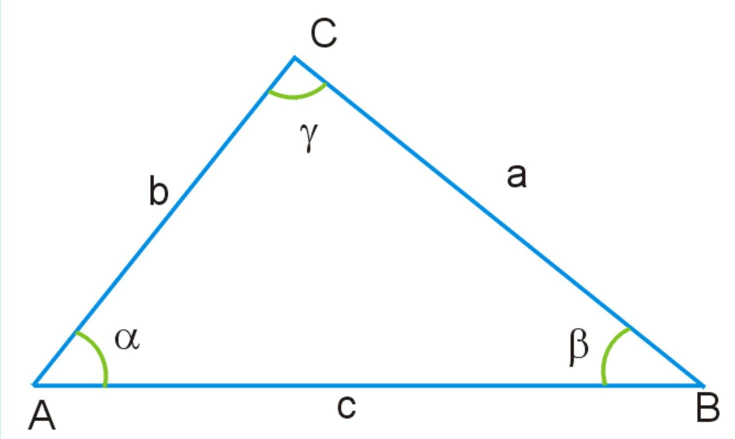
Леонард Эйлер
(1707-1783 гг.)

Современный вид **сферической тригонометрии** придал Эйлер - математик, физик, астроном. Швейцарец по происхождению он с 1727 г. работал в России, а с 1741 г. – в Берлине. Автор более 800 работ, оказавших значительное влияние на развитие науки.

ВАЖНО!
Геометрия на плоскости и на поверхности сферы разительно отличаются друг от друга

***Например*.**

На плоскости сумма внутренних углов треугольника всегда равна 180 градусам



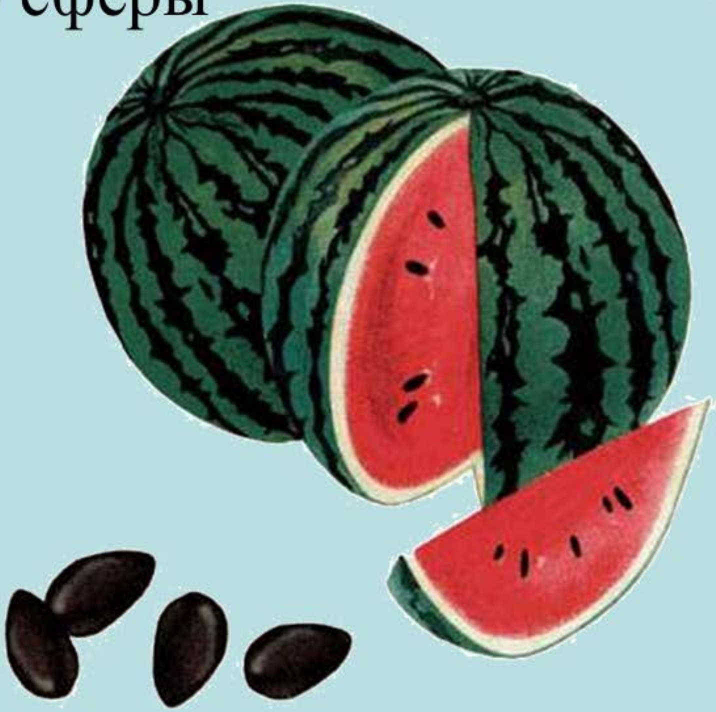
А на сфере – не совсем…..

**Земля плоская.
Но она натянута на шар.**

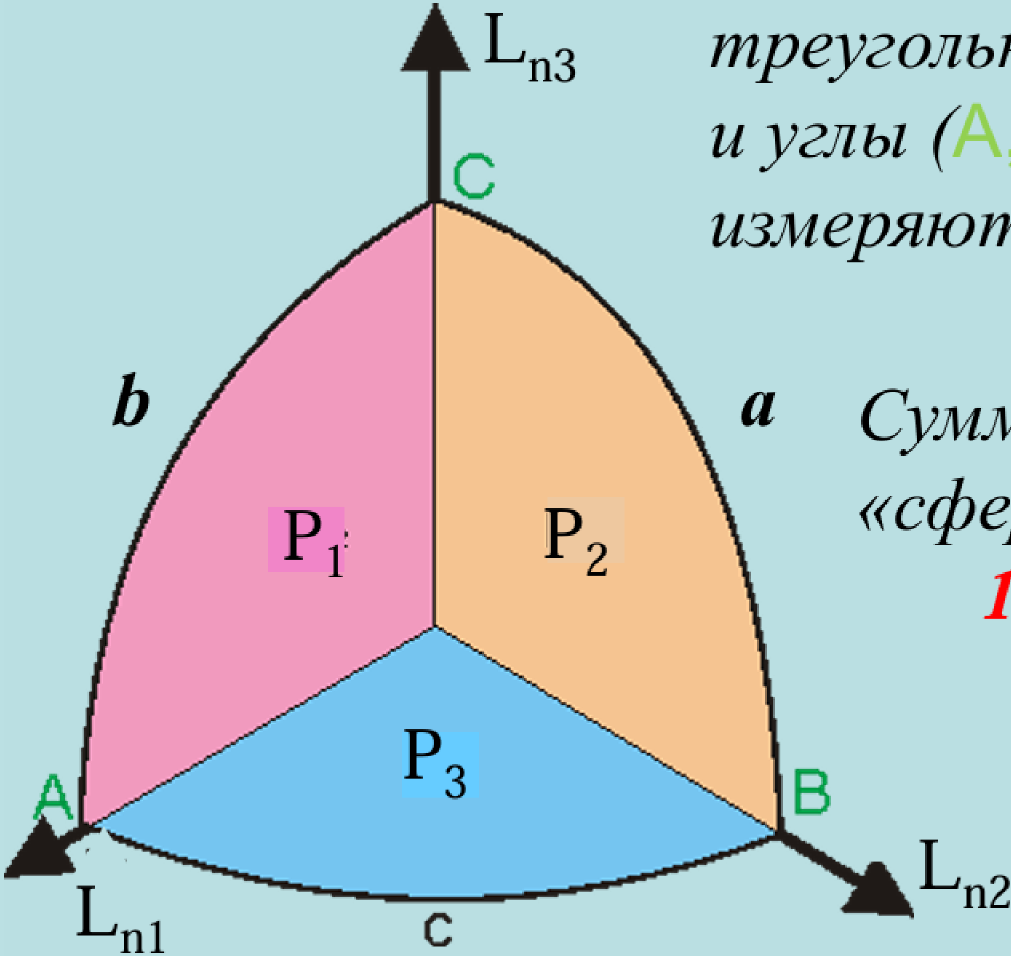
Геометрия на плоскости и на поверхности сферы разительно отличаются друг от друга

Кто же такой сферический треугольник?

Сферический треугольник живет на сфере. Его грани – кусочки меридианов, то есть сферические проекции плоскостей, проходящих через центр сферы



Особенности сферических треугольников



Параметры сферического треугольника однородны:
*и углы (*A, B, C*) и стороны (**a, b, c**) измеряются в градусах!*

Сумма углов треугольника в «сферическом» мире:

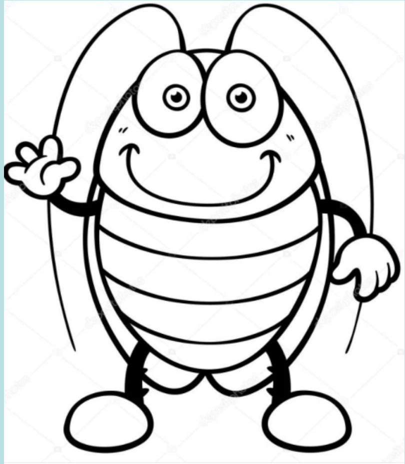
$$180° < A + B + C < 540°$$

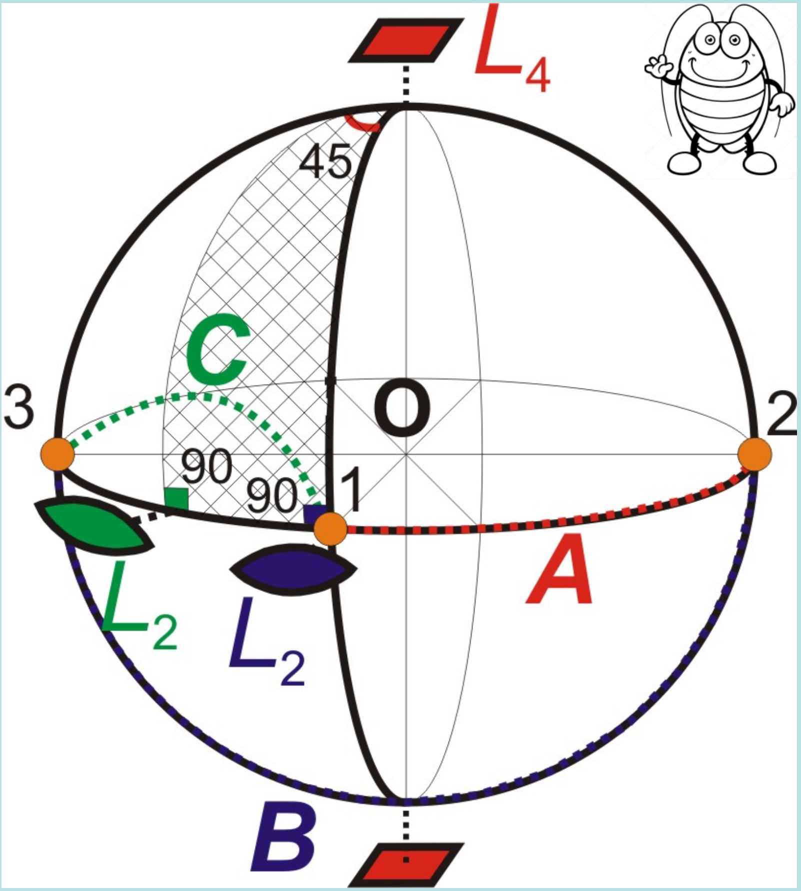
На прошлой лекции мы не задумывались о величине дуги перемещения *A*, *B* и *C* по поверхности Земли.

Однако, для наличия осей вращения (поворотных или инверсионных)
<u>с целым кристаллографическим *n*</u>

на сферический треугольник 1-2-3, символизирующий поездку Москва-Симферополь-Миасс, накладываются определенные дополнительные условия существования.

Проведем эксперимент



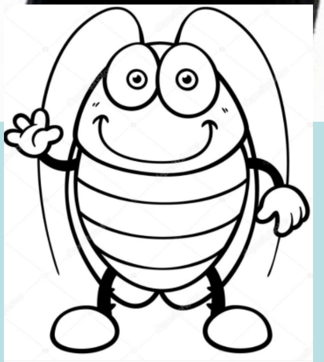


К взаимосвязи углов поворота осей и перемещения точки по поверхности сферы. ***A***, ***B*** и ***C*** – путь, пройденный тараканом в результате последовательного поворота вокруг осей L_4, L_2 и L_2, соответственно.

Сферический треугольник с углами 45˚, 90˚ и 90˚ (сумма внутренних углов 225˚) выделен штриховкой.

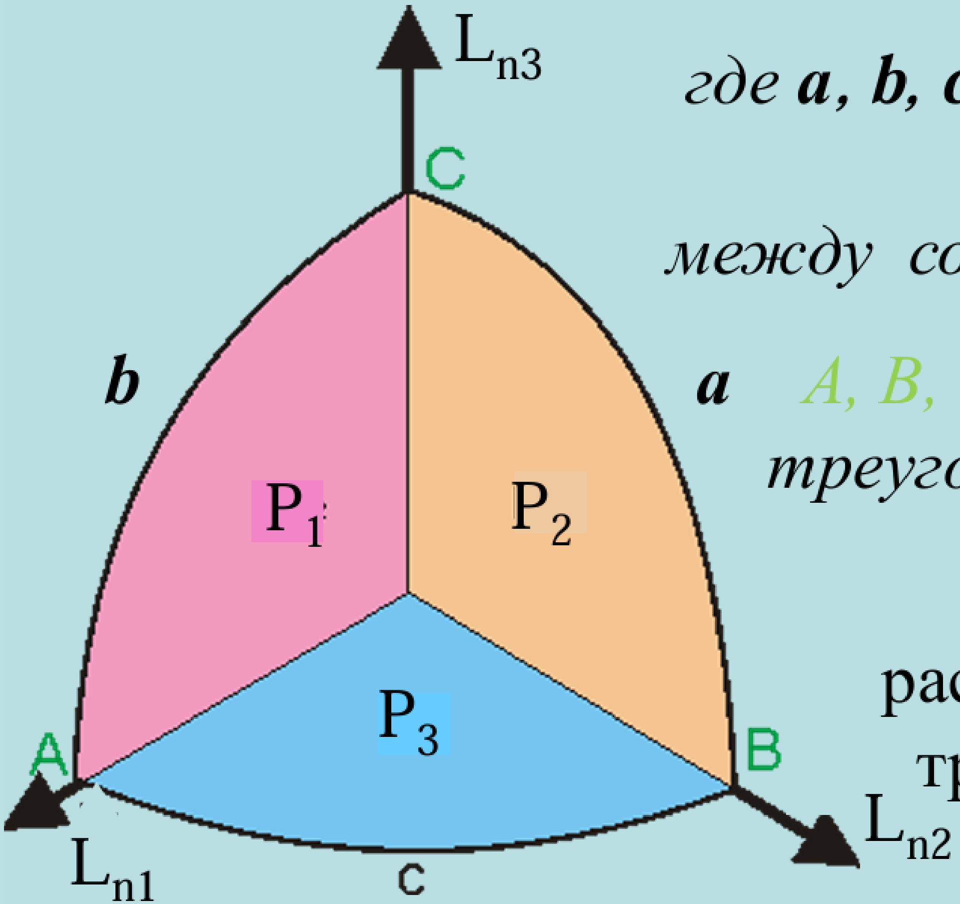
Таким образом:

В сферическом треугольнике АВС (из вершин которого выходят оси), углы А, В и С при вершинах равны **ПОЛОВИНАМ** элементарных углов поворота осей, осуществляющих повороты, т. е. $A = \alpha/2$, $B = \beta/2$ и $C = \gamma/2$.



Это, кстати, следует из теоремы косинусов сферической тригонометрии:

cos a = cosb cosc + sinb sinc cosA,



*где **a, b, c** - **с**тороны сферического треугольника **углы** между соответствующими осями*

A, B, C - углы сферического треугольника (α/2)

По этой формуле можно рассчитать угол сферического треугольника по известным сторонам

Напомним, что Эйлер показал, что для сферических треугольников

Сумма углов (S) не должна превышать 540° и должна быть больше 180°

(180° < S ≤ 540°)

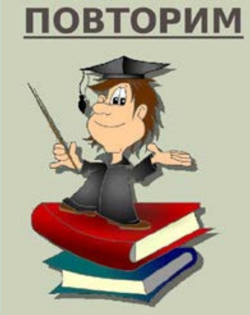
- А так как возможными **для кристаллов могут быть лишь оси симметрии порядков 1, 2, 3, 4, 6** т.е. углы между сторонами сферического треугольника могут быть равны соответственно ***половинам элементарных углов поворотов этих осей***: 180°, 90°, 60°, 45° и 30° соответственно.

Работая с кристаллами, исследователи обратили внимание на то, что элементы симметрии располагаются в них не случайно, а закономерным образом. Напомним, что:

Полный набор элементов симметрии строго определенным образом располагающихся по отношению друг к другу называется ***классом симметрии***.

Сочетания симметрических операций в классе (а, следовательно и элементов симметрии) не случайны, а образуют группу симметрии ***с конечным числом членов***.

Число классов симметрии бесконечно (узнаем позже), но в кристаллах, где могут существовать только оси определенных целочисленных порядков, число классов закономерно сокращается до **тридцати двух**.



В 1826 г. немецкий кристаллограф
М. Л. Франкенгейм*(1801-1869 гг.) вывел 32 класса симметрии.*

*И. Ф. Х. **Гессель** (1796-1872 гг.) в 1830 г. вывел 32 класса симметрии.*

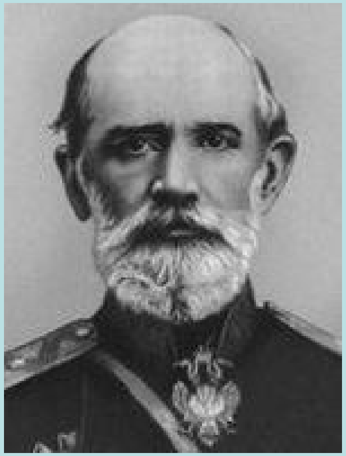
Ио

Хри

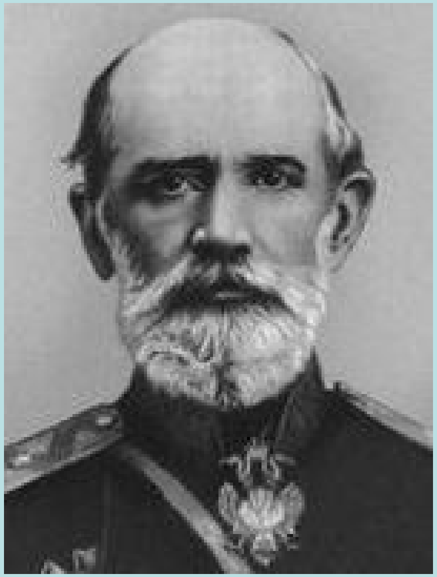
Однако их работы были недопоняты минералогическим сообществом начала XIX века и практически забыты.

Аксель Вильгельмович Гадолин
(1828-1892)
русский учёный в области артиллерийского вооружения, механической обработки металлов, минералогии и **кристаллографии**, с 1875 года действительный член Петербургской АН, с 1873 г. член-корреспондент, генерал от артиллерии (1890).

За оказанные военные подвиги 1854-1855 годов награждён орденом св. Георгия 4-й степени (не сразу, а в 1871).



И лишь в 1867 г. Аксель Вильгельмович Гадолин **дал строгий математический вывод** *32 групп симметрии*.
(Петербургская АН в 1868 присудила ему за это Ломоносовскую премию).



(1828-1892)

Его награды: (Российской империи):
Орден Святого Георгия 4-й степени (1871) Орден Святой Анны 3-й степени (1859)
Орден Святого Владимира 4-й степени (1862) Орден Святой Анны 2-й степени(1864)
Орден Святого Владимира 3-й степени (1868) Орден Святого Станислава (Российская империя) 1-й степени (1870) Орден Святой Анны 1-й степени (1872)
Орден Святого Владимира 2-й степени (1875) Орден Белого орла (Российская империя) (1879) Орден Святого Александра Невского (1884)
+
Французский Орден Почетного Легиона командорский крест (1867)
Шведский Орден Меча Большой крест (1885)

«Крымская война» 1853-1856 - театры военных действий

Черное море

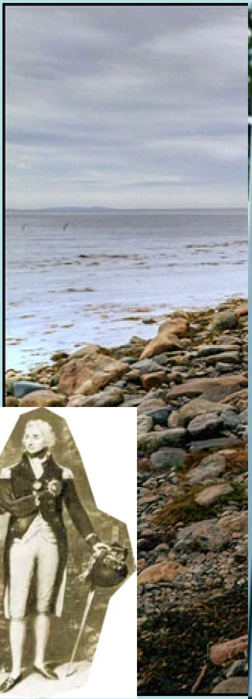
Белое море

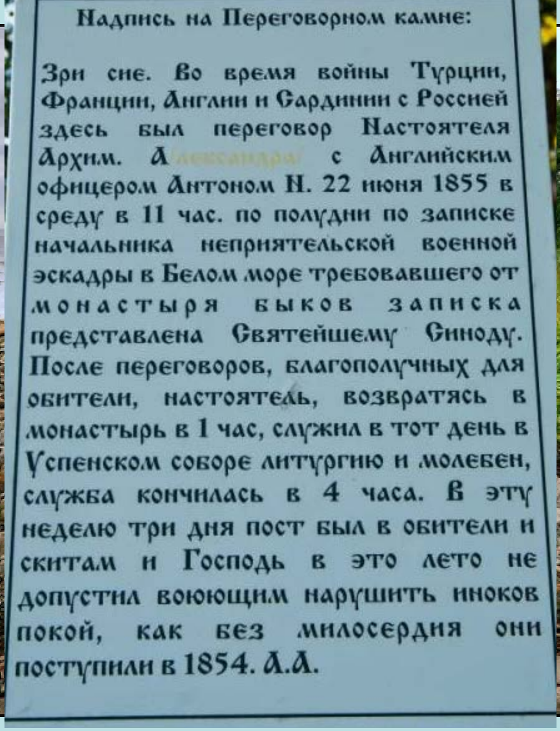
Тихий океан

12 мая 1854 в условиях густого тумана в 6 верстах от Одессы сел на мель английский 16-пушечный пароходофрегат Tiger. 225 человек экипажа и пушки были взяты в русский плен, а само судно потоплено

Оборона Камчатки является одним из значимых сражений Крымской войны и второй половины XIX века. Петропавловская победа 1854 года – **это «луч свет», который вдруг прорвался «сквозь мрачные тучи».**

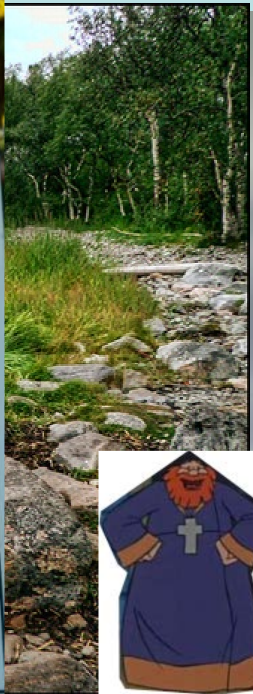
В 1854 г. у Соловков появляются английские пароходофрегаты «Бриск» и «Миранда». Происходит перестрелка с англичанами в гавани Благополучия и обстрел Соловецкого монастыря.





Надпись на Переговорном камне:

Зри сие. Во время войны Турции, Франции, Англии и Сардинии с Россией здесь был переговор Настоятеля Архим. Александра с Английским офицером Антоном Н. 22 июня 1855 в среду в 11 час. по полудни по записке начальника неприятельской военной эскадры в Белом море требовавшего от монастыря быков записка представлена Святейшему Синоду. После переговоров, благополучных для обители, настоятель, возвратясь в монастырь в 1 час, служил в тот день в Успенском соборе литургию и молебен, служба кончилась в 4 часа. В эту неделю три дня пост был в обители и скитах и Господь в это лето не допустил воюющим нарушить иноков покой, как без милосердия они поступили в 1854. А.А.



В июне 1855 г. корабли англичан снова появляются у монастыря. Рандеву состоялось 22 июня на нейтральной полосе. Тема переговоров была одна: английский офицер требовал волов. Соловецкий **настоятель** отвечал, что коров они отдать не могут, так как они кормят молоком монахов.

Английский офицер пробовал припугнуть собеседника. Он говорил: "*Мы отсюда поплывем, а через три недели явится здесь сильный флот, где будет наш главный начальник на таком корабле, что вы от одного взгляда будете страшиться, вы должны к нему с белым флагом прибыть…* ".

Не подействовало и это средство. Уполномоченный настоятель непоколебимо стоял на своем, заявив, ***что коров не даст*** *(и не дал)*.

Допустимые сочетания углов:

Сочетания осей	Сумма углов
$L_1\ L_1\ L_1$	540° совсем грустно… одни оси L_1
$L_2\ L_1\ L_1$	360+90=450° повеселее…
$L_3\ L_1\ L_1$	360+60=420° повеселее…
$L_4\ L_1\ L_1$	360+45=405° повеселее…
$L_6\ L_1\ L_1$	360+30=390° повеселее…

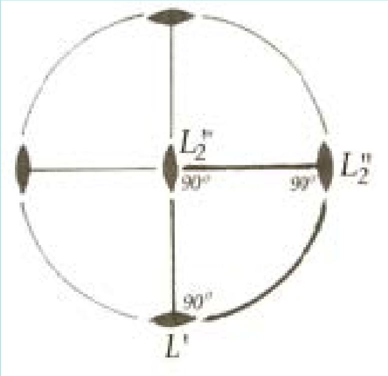
Допустимые сочетания углов:

Сочетания осей   Сумма углов

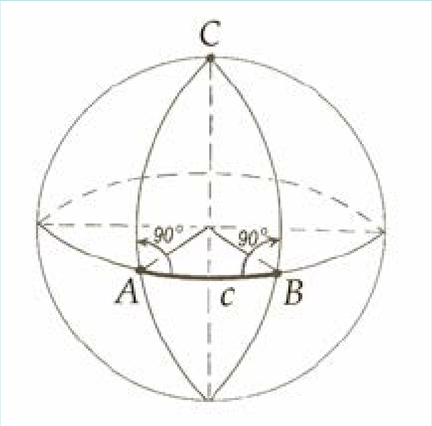
$L_2\ L_2\ L_2$ $90° + 90° + 90° = 270°$

$L_2\ L_2\ L_1$ – *нет!! Понятно почему?*

Будешь третьим!



$L_2\,L_2\,L_2$

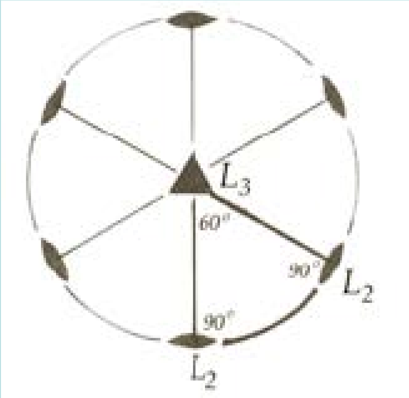


для этого треугольника все углы между осями окажутся равными 90°. Зафиксировав положения этих осей на сфере, можно вычертить и стереографическую проекцию полученного осевого класса симметрии

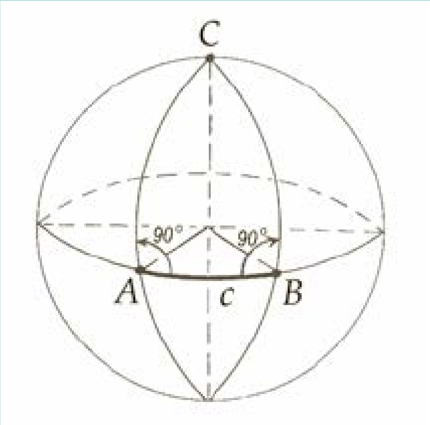
L_2 L_2 L_2 ($3L_2$), где все оси 2-го порядка будут ***неэквивалентны*** друг другу

Допустимые сочетания углов:

Сочетания осей	Сумма углов
$L_2\ L_2\ L_2$	$90° + 90° + 90° = 270°$
$L_3\ L_2\ L_2$	$60° + 90° + 90° = 240°$



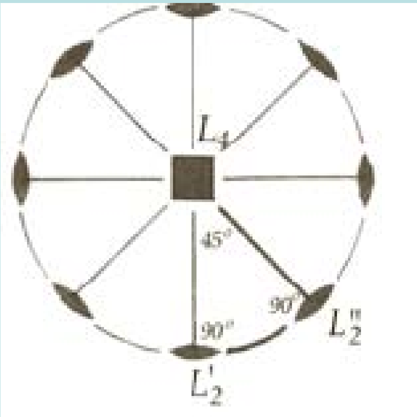
$L_3\ L_2\ L_2$



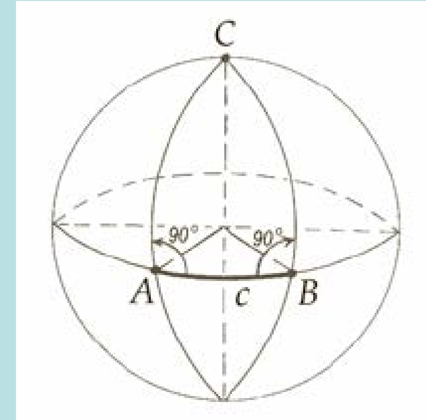
две стороны между осями L_3 - L_2 будут равны 90°, а угол между осями L_2 – L_2 = 60°. Нанеся выходы осей на сферу и построив стереографическую проекцию, получим (после размножения элементов симметрии друг другом) также осевой класс – $L_3 3L_2$, где все три оси 2-го порядка будут связаны поворотами на 120° вокруг оси L_3, а следовательно, ***эквивалентны***

Допустимые сочетания углов:

Сочетания осей	Сумма углов
$L_2\ L_2\ L_2$	$90° + 90° + 90° = 270°$
$L_3\ L_2\ L_2$	$60° + 90° + 90° = 240°$
$L_4\ L_2\ L_2$	$45° + 90° + 90° = 225°$



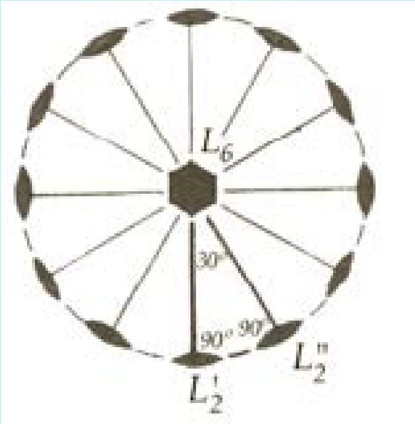
$L_4\,L_2\,L_2$



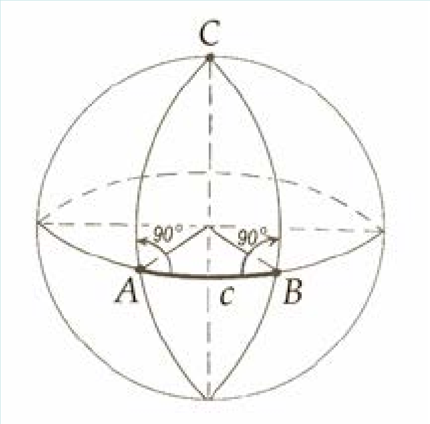
две стороны между осями L_4-L_2 = 90°, сторона L_2-L_2 = 45°. Вычертив этот сферический треугольник и построив стереографическую проекцию, увидим, что получен класс симметрии с одной осью L_4 и четырьмя побочными осями L_2 , разбивающимися на ***два неэквивалентных*** между собой семейства – класс $L_4 2L_2 2L_2$

Допустимые сочетания углов:

Сочетания осей	Сумма углов	
$L_2\ L_2\ L_2$	$90° + 90° + 90° = 270°$	
$L_3\ L_2\ L_2$	$60° + 90° + 90° = 240°$	
$L_4\ L_2\ L_2$	$45° + 90° + 90° = 225°$	
$L_5\ L_2\ L_2$	$36° + 90° + 90° = 216°$	не в кристаллах
$L_6\ L_2\ L_2$	$30° + 90° + 90° = 210°$	



$L_6\ L_2\ L_2$



две стороны $L_6 - L_2 = 90°$, сторона $L_2 - L_2 = 30°$. В итоге вновь получаем осевой класс – $L_6\ 6L_2$ = также с двумя неэквивалентными семействами осей 2-го порядка $L_6 3L_2 3L_2$

Мы вывели несколько классов симметрии (из 32), они содержат только поворотные оси (элементы симметрии 1-ого рода).

Давайте наведем порядок

…

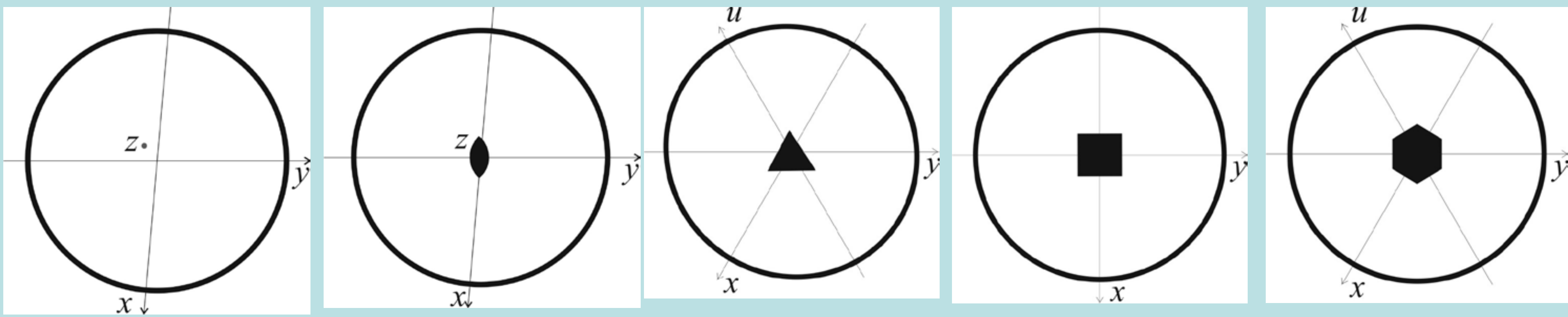
(Фрнакенгейм смог же….)

Ведь можно добавить еще и инверсионные оси!

Вывод групп (классов) симметрии в символике Браве

1) За основу вывода можно взять все возможные в кристаллах поворотные оси симметрии. В результате получим 5 исходных классов L_n

L_1, L_2, L_3, L_4, L_6

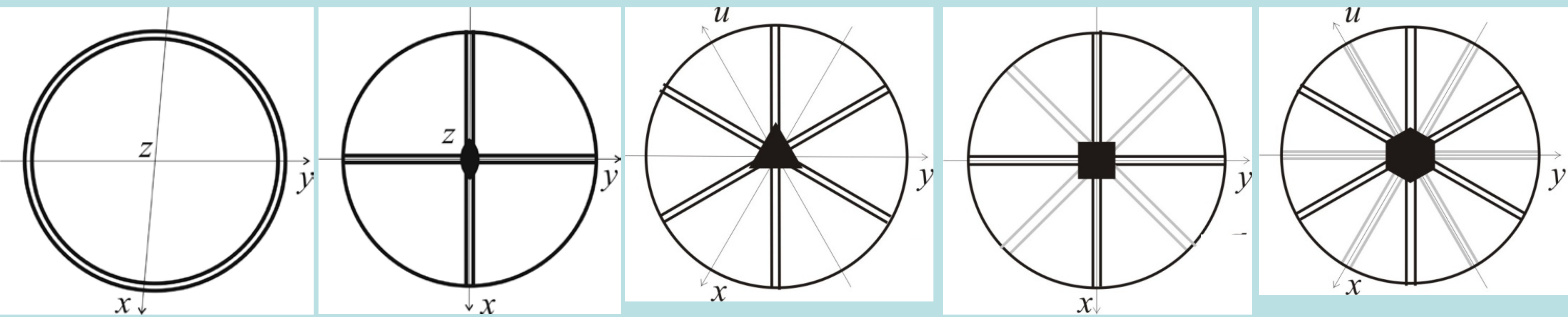


ИТОГО - 5

Вывод групп (классов) симметрии в символике Браве

2) Добавляем вертикальную зеркальную плоскость симметрии, проходящую вдоль каждой из осей (P_v)

$L_1 \to P$, $L_2 \to L_2 2P$, $L_3 \to L_3 3P$, $L_4 \to L_4 4P$, $L_6 \to L_6 6P$

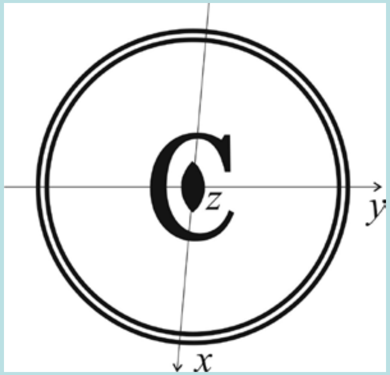


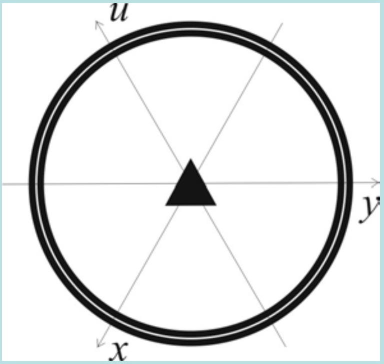
ИТОГО - +5 = 10

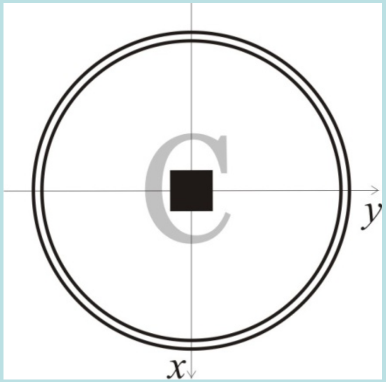
Вывод групп (классов) симметрии в символике Браве

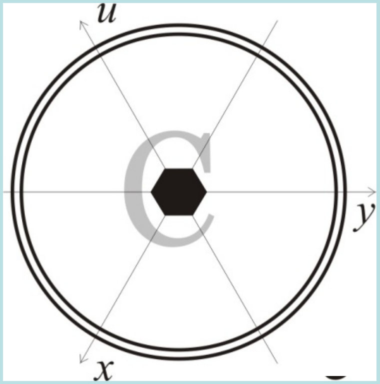
3) Добавляем горизонтальную зеркальную плоскость симметрии, перпендикулярную оси (P_h)

$L_1 \rightarrow P$, $L_2 \rightarrow L_2PC$, $L_3 \rightarrow$ Ł$_6$, $L_4 \rightarrow L_4PC$, $L_6 \rightarrow L_6PC$







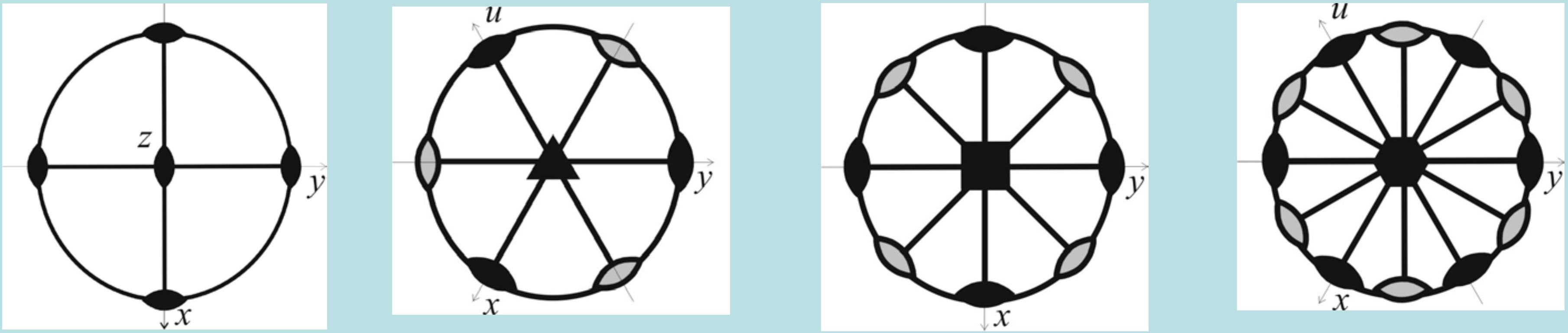


ИТОГО - +4 = 14

Вывод групп (классов) симметрии в символике Браве

4) Добавляем горизонтальную ось симметрии 2-го порядка, перпендикулярную оси ($L_2\perp$)

$$L_1 \rightarrow L_2,\ L_2 \rightarrow 3L_2,\ L_3 \rightarrow L_3 3L_2,\ L_4 \rightarrow L_4 4L_2,\ L_6 \rightarrow L_6 6L_2$$

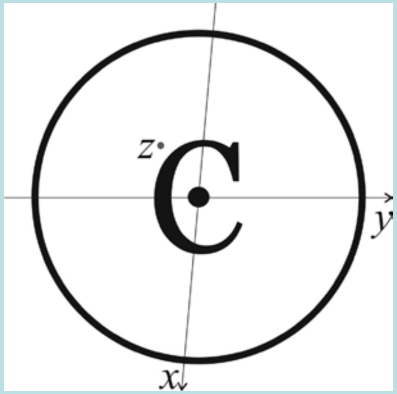


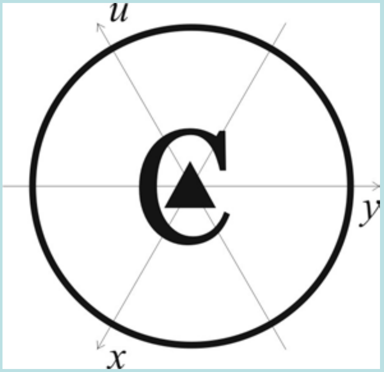
ИТОГО - +4 = 18

Вывод групп (классов) симметрии в символике Браве

5) Добавляем операцию инверсии в точке (***i***), т.е. центр симметрии

$L_1 \rightarrow C$, $L_2 \rightarrow L_2PC$, $L_3 \rightarrow Ł_3$, $L_4 \rightarrow L_4PC$, $L_6 \rightarrow L_6PC$



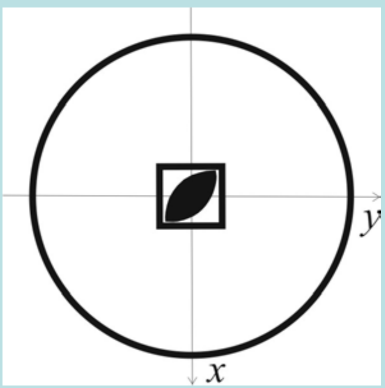


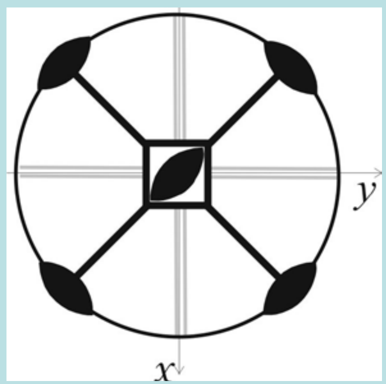
ИТОГО - +2 = 20

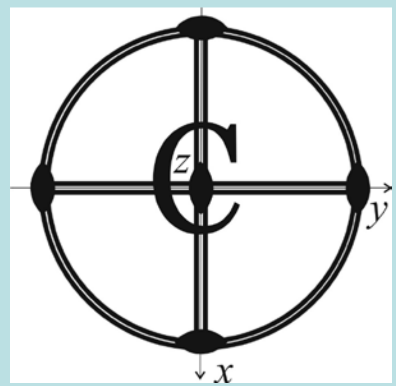
Вывод групп (классов) симметрии в символике Браве

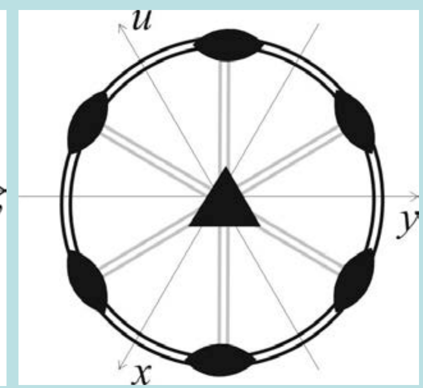
Теперь добавим к полученным классам любую комбинацию перечисленных выше элементов симметрии
(и не забываем про существование инверсионных осей 4-ого порядка)

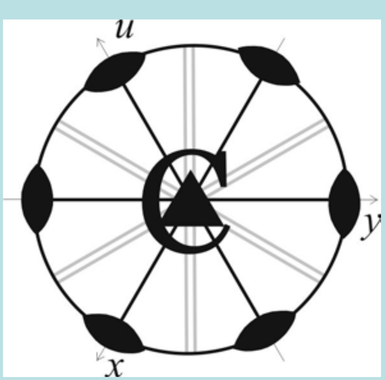
Ł$_4$ → Ł$_4 2L_2 2P$, $L_2 \rightarrow 3L_2 3PC$, $L_3 \rightarrow L_3 3L_2 4P$, $L_3 3L_2 3PC$,
$L_4 \rightarrow L_4 4L_2 5PC$, $L_6 \rightarrow L_6 6L_2 7PC$

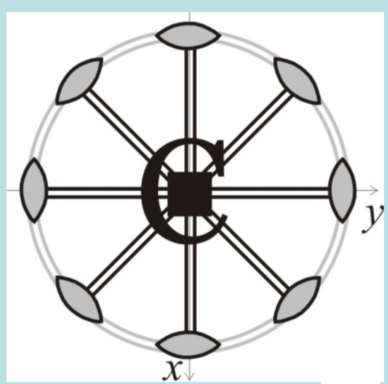


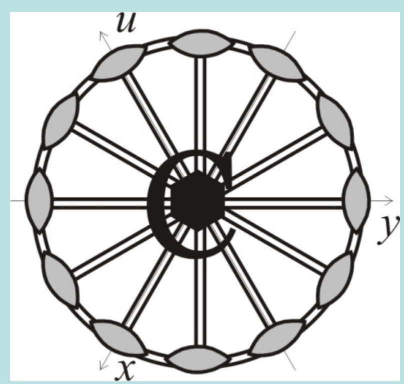












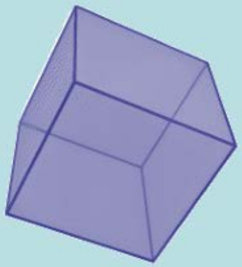
ИТОГО : +7 = 27

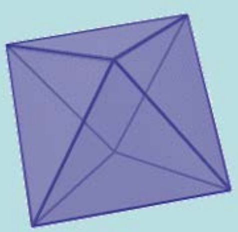
Таким образом выведены 27 классов либо без осей высшего порядка, либо с единственной осью высшего порядка

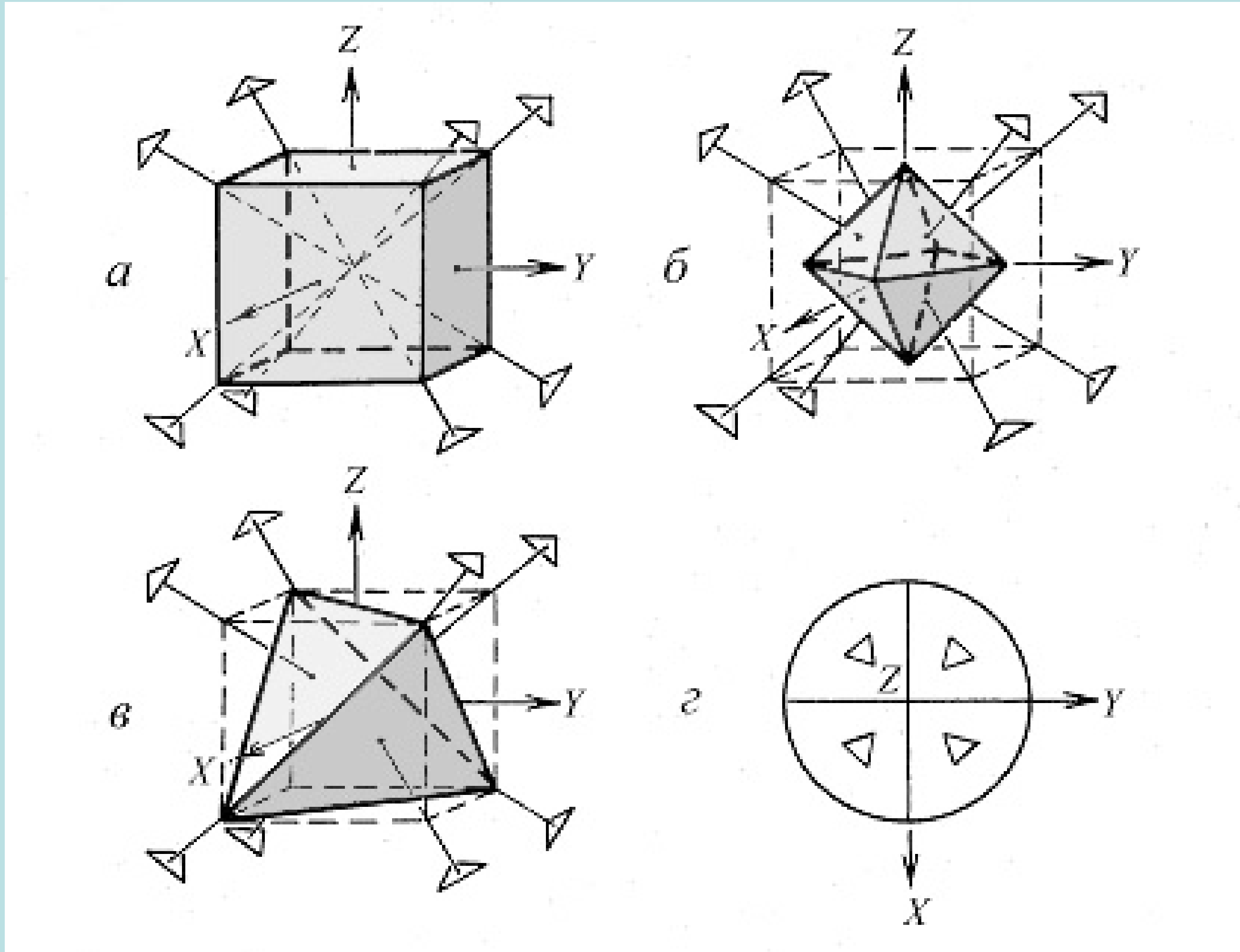
Могут ли и каким образом пересекаться оси высших порядков?

Конечно, ДА!

3 из 5 Платоновых тел разрешены в кристаллографии!



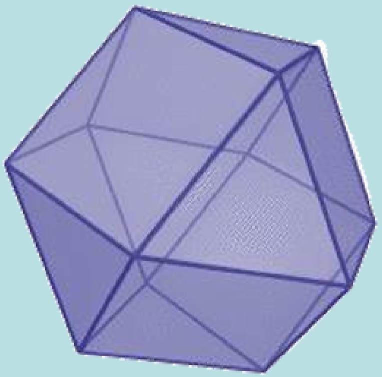




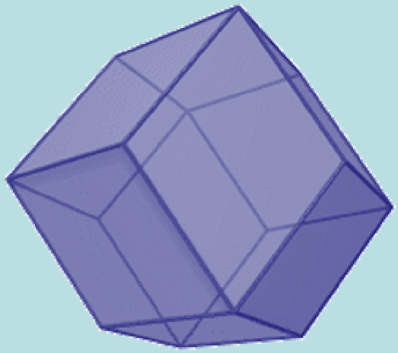
. Расположение координатных направлений X, Y, Z и четырех осей 3-го порядка в кубе (*а*), октаэдре (*б*), тетраэдре (*в*) и стереограмма этих направлений (*г*)

И не только Платоновы!

Помимо 5 правильных многогранников существуют полуправильные, которые называются **архимедовыми** и **каталановыми** телами.



Архимедовы тела – многогранники с топологически одинаковыми вершинами и гранями – правильными многогранниками, но разного сорта



Каталановы тела – многогранники с одинаковыми гранями, но не правильными многоугольниками) и топологически разными вершинами

Точный ответ на вопрос какие оси высших порядков и под какими углами могут пересекаться в многогранниках дает **теорема сферической тригонометрии Эйлера.**

Допустимые сочетания углов:

Сочетания осей Сумма углов

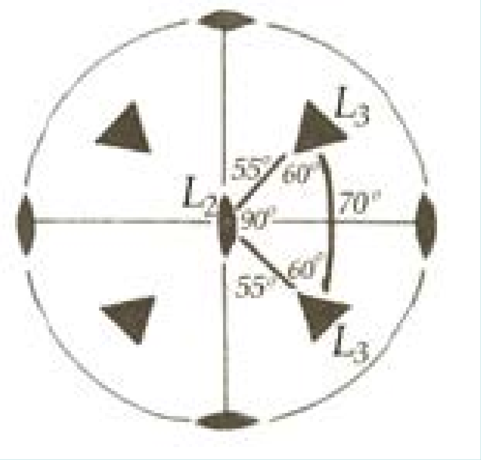
$L_2\ L_2\ L_2$	$90° + 90° + 90° = 270°$
$L_3\ L_2\ L_2$	$60° + 90° + 90° = 240°$
$L_4\ L_2\ L_2$	$45° + 90° + 90° = 225°$
$L_5\ L_2\ L_2$	$36° + 90° + 90° = 216°$ не в кристаллах
$L_6\ L_2\ L_2$	$30° + 90° + 90° = 210°$
L_7-*итд* $L_2\ L_2$	*° + 90° + 90° => 180° не в кристаллах

$L_3\ L_3\ L_2$ **$60° + 60° + 90° = 210°$**

Допустимые сочетания углов:

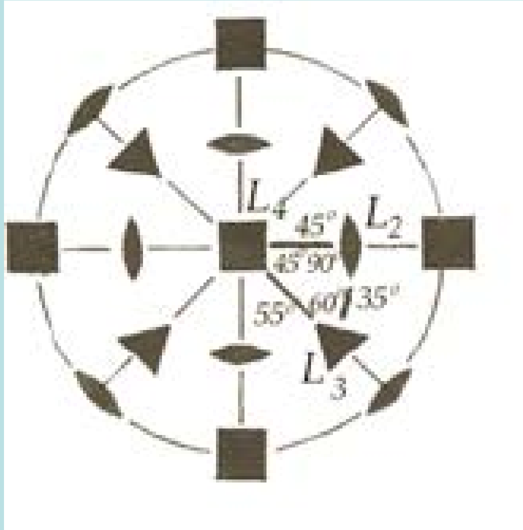
Сочетания осей	Сумма углов	
$L_2\ L_2\ L_2$	$90° + 90° + 90° = 270°$	
$L_3\ L_2\ L_2$	$60° + 90° + 90° = 240°$	
$L_4\ L_2\ L_2$	$45° + 90° + 90° = 225°$	
$L_5\ L_2\ L_2$	$36° + 90° + 90° = 216°$	не в кристаллах
$L_6\ L_2\ L_2$	$30° + 90° + 90° = 210°$	
L_7-*итд* $L_2\ L_2$	$*° + 90° + 90° => 180°$	не в кристаллах
$L_3\ L_3\ L_2$	**$60° + 60° + 90° = 210°$**	
$L_4\ L_3\ L_2$	**$45° + 60° + 90° = 195°$**	
$L_6\ L_3\ L_2$	$30° + 60° + 90° = 180°$	НЕЛЬЗЯ!

Кстати! $L_5\ L_3\ L_2$ $36° + 60° + 90° = 186° > 180°$ не в кристаллах



$L_3\ L_3\ L_2$

Расположив рассчитанный треугольник на сфере и размножив данные элементы симметрии, получим стереографическую проекцию еще одной осевой группы – $3L_2 4L_3$



$L_4\,L_3\,L_2$

Расположив рассчитанный треугольник на сфере и размножив данные элементы симметрии, получим стереографическую проекцию еще одной осевой группы :
$3L_4 4L_3\ 6L_2$

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$$

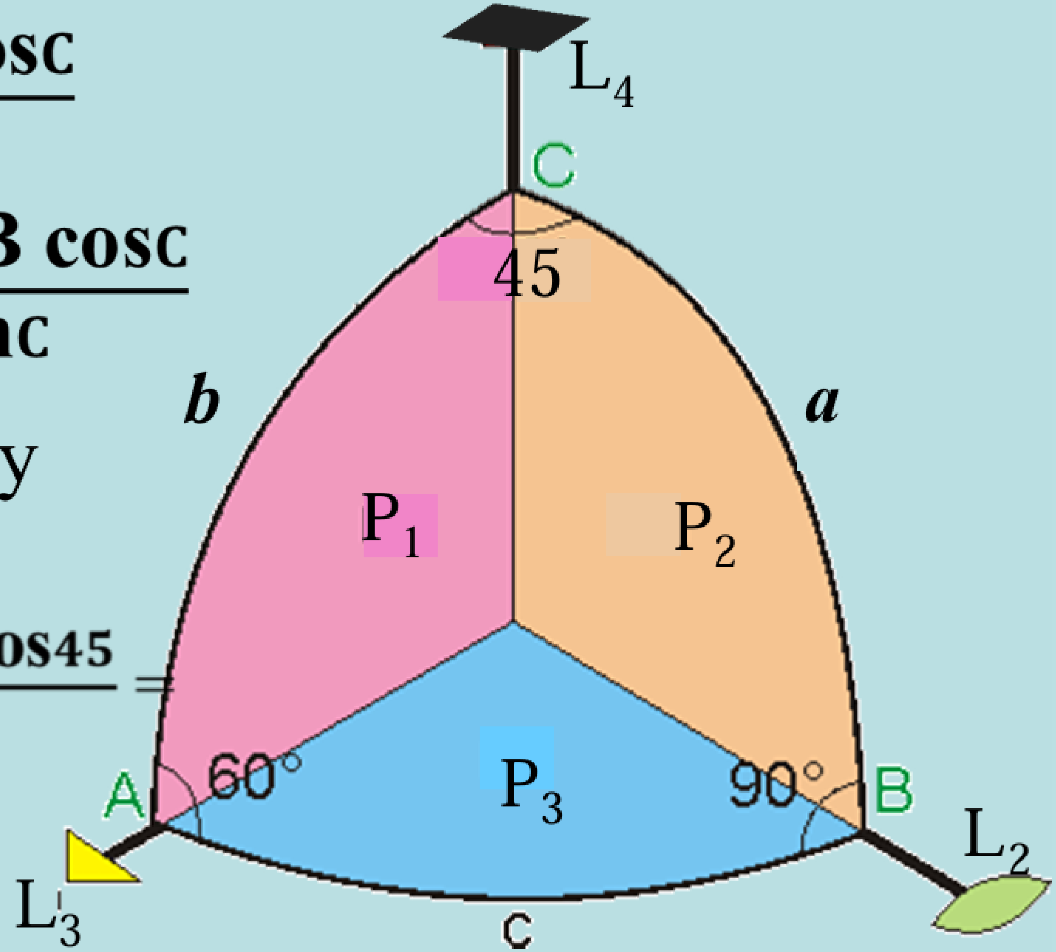
$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos c}{\sin B \sin c}$$

$$a = \arccos \frac{\cos A + \cos B \cos c}{\sin B \sin c}$$

Рассчитаем угол между осями L_3 и L_4:

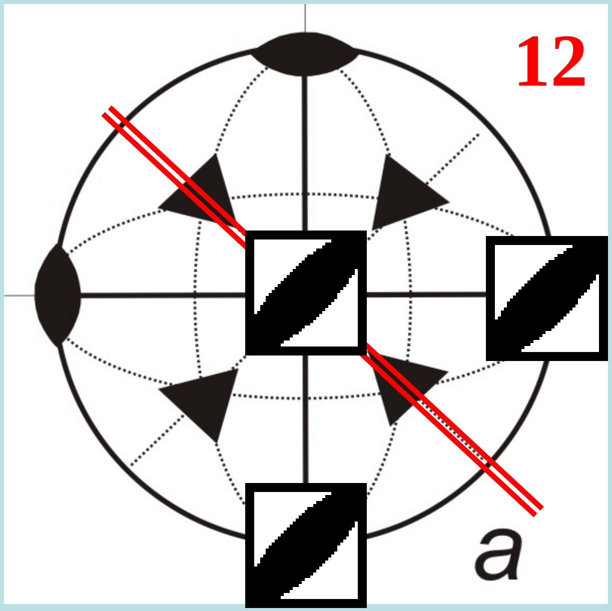
$$b = \arccos \frac{\cos 90 + \cos 60 \cos 45}{\sin 60 \sin 45} =$$

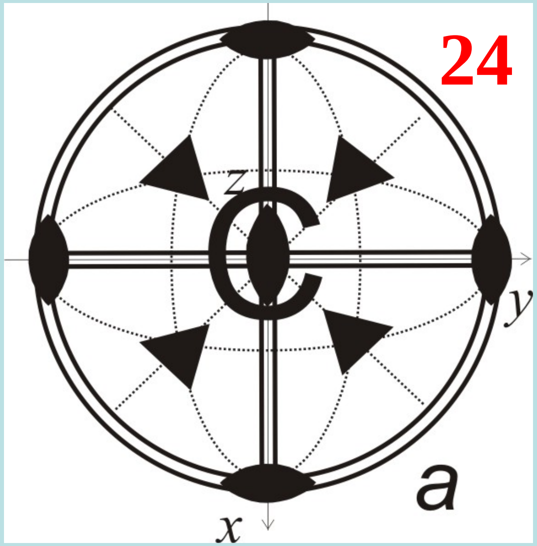
$$= \arccos \frac{0 + 1/2 * \sqrt{2}/2}{\sqrt{3}/2 * \sqrt{2}/2} = \arccos 0,5773 = 54,74°$$

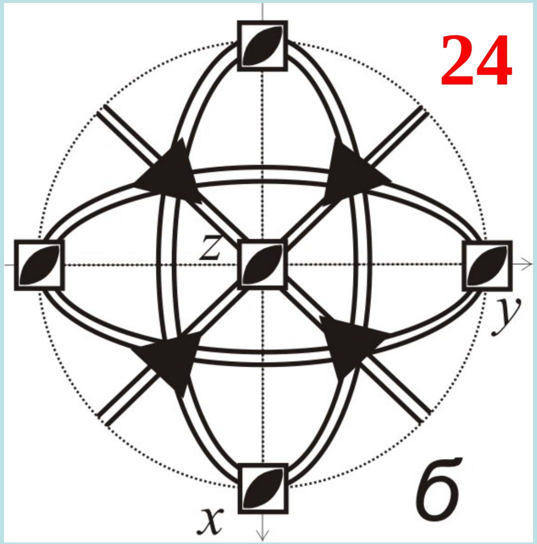


Вывод кубических групп (классов) симметрии

$L_3 L_3 L_2 \quad 60° + 60° + 90° = 210°$



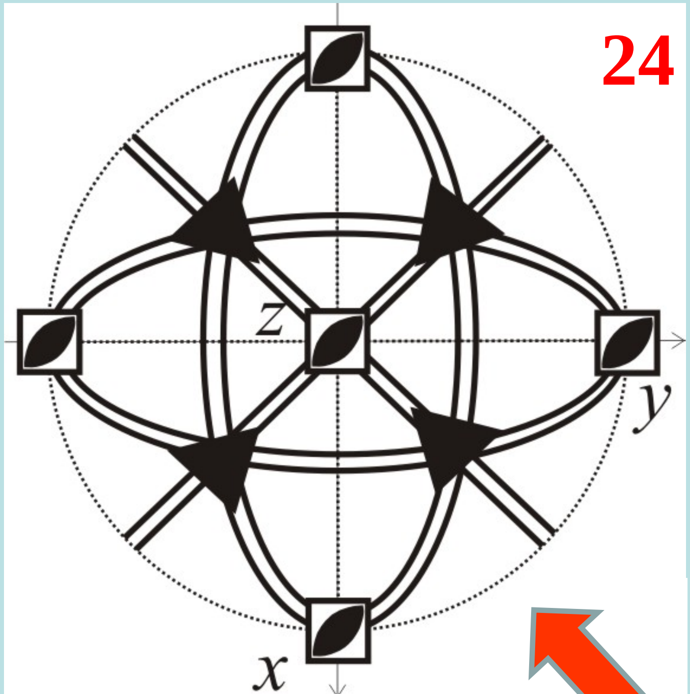


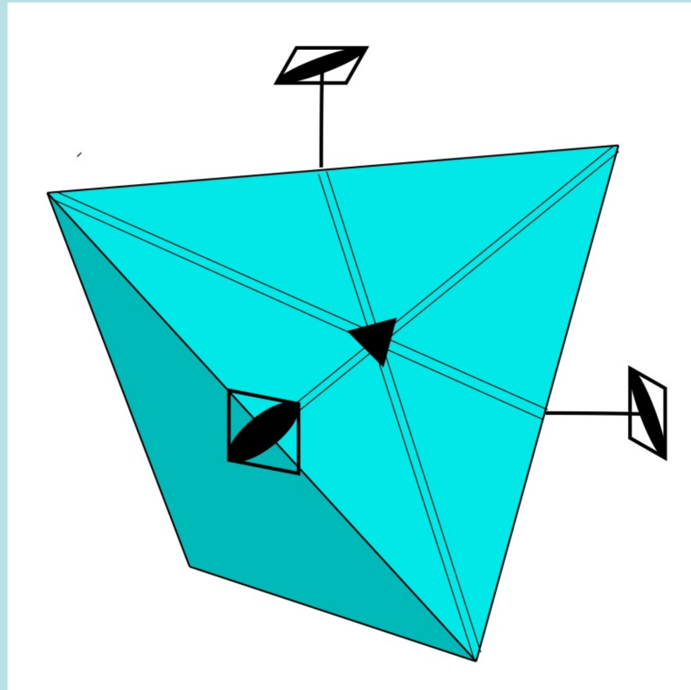


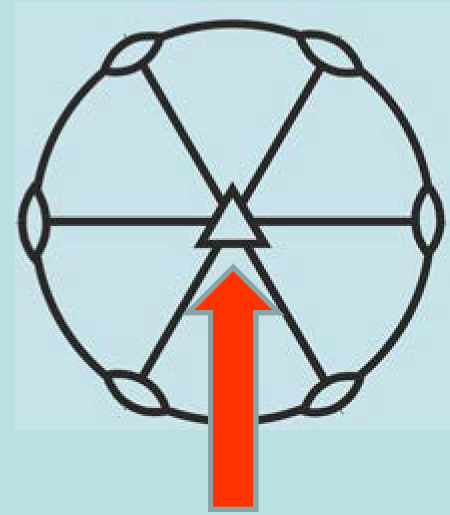
Три класса с тетраэдрическим осевым набором

Три хитрых лейтенанта или как обмануть командира части…

Собственная симметрия тетраэдра как раз описывается этим классом







Кто поставит на северный полюс одну из осей L_3 – ***будет расстрелян на месте!***

Описывая кристаллы, похожие на тетраэдр – ставим их на ребро и поворачиваем на 45 °!

Тогда на северный полюс будет смотреть координатная ось $Ł_4$.

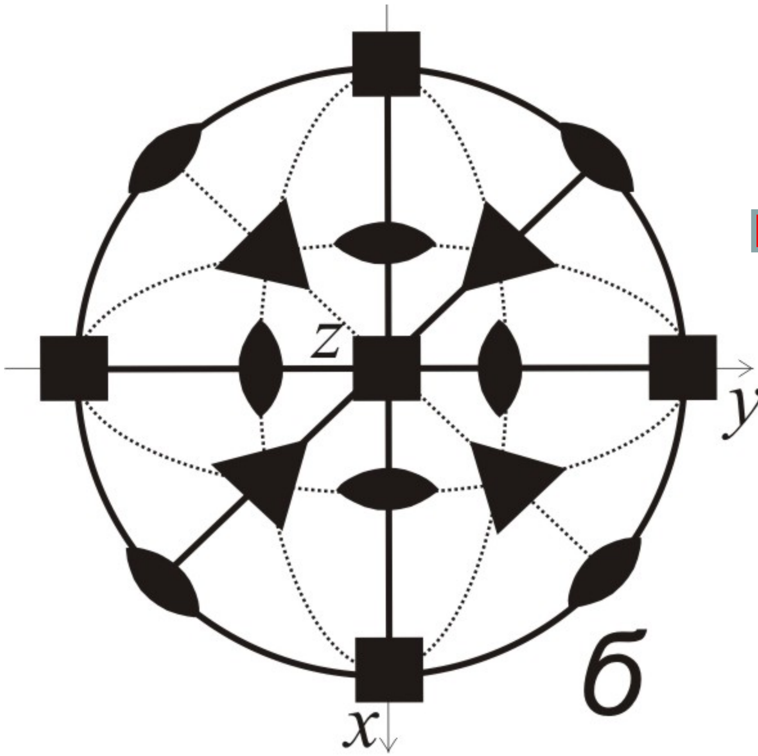
<u>Эквивалентные оси L_3 в кубических кристаллах</u> будут равнонаклонны к координатным осям и их выходы на сферу будут иметь координаты:

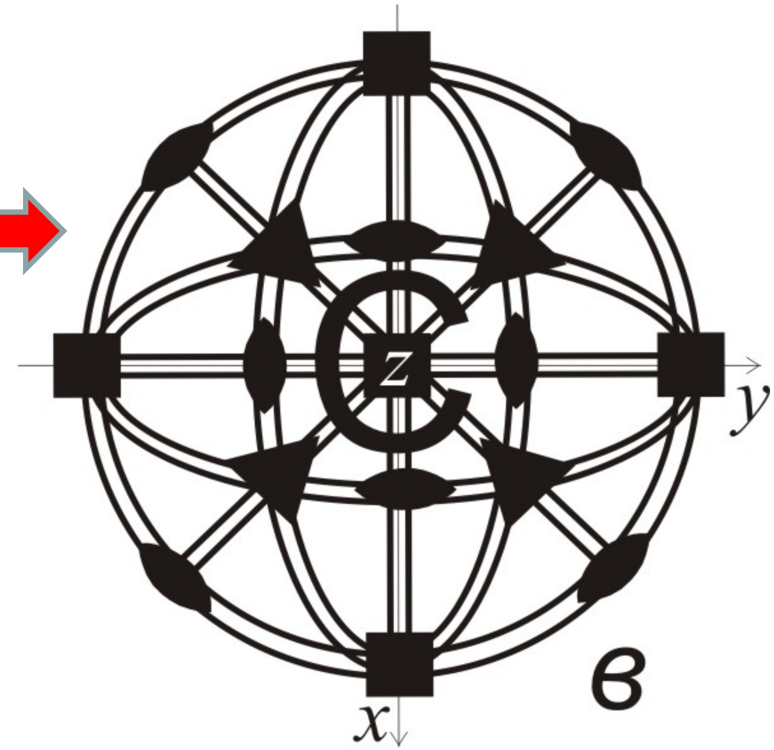
$\varphi = 45, 135, 225, 315°$

$\rho \approx 54{,}74°$ (верхняя полусфера) и $125{,}26°$ (нижняя полусфера)

Вывод кубических групп (классов) симметрии

$L_4 L_3 L_2 \quad 45° + 60° + 90° = 195°$





Два класса с октаэдрическим осевым набором

Всего 32 класса

http://cryst.geol.msu.ru/appliances/pics/32.jpg


https://cryst.geol.msu.ru/courses/crgraf/

geokniga

Рейтинг@Mail.ru

Информация для группы 103

1. РЕЙТИНГ
2. Правила зачетной аттестации 2025 учебный год
3. Домашняя работа №1 от 08 сентября

Информация для группы 119

1. РЕЙТИНГ
2. Правила зачетной аттестации 2025 учебный год
3. Домашняя работа №1 от 12 сентября

Информация для группы РУП

Информация для группы ММ

Видеозаписи лекций на платформе teach-in

1. 1-ый семестр

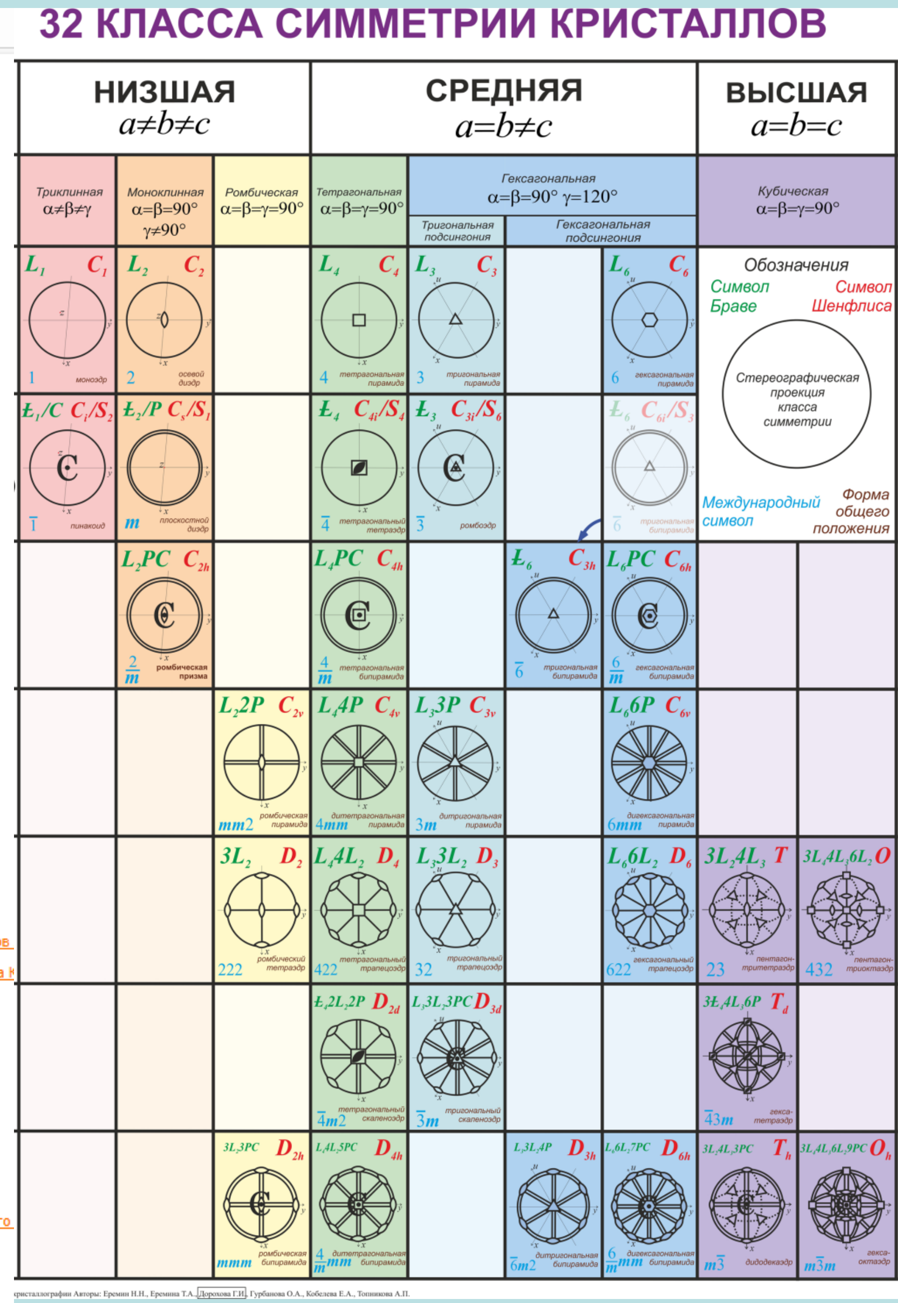
ИНТЕРАКТИВНАЯ САМОПОДГОТОВКА

1. Интерактивная составляющая 1-ой контрольной работы (Закрыто)
2. Интерактивная составляющая 2-ой контрольной работы (Закрыто)

Вопросы к экзамену

Справочный материал

1. Правила формирования международного символа
2. Правила формирования символа Шенфлиса
3. Сетка Вульфа в формате BMP, радиусом 10 см с разрешением 300 dpi в архиве
4. Трафарет для рисования, радиус 8 см
5. Матричные представления операций симметрии - перемножение матриц
6. "Связь символов ребер и граней" xls- файл
7. "Простые формы кристаллов" Плакат
8. "Простые формы кубической сингонии" Плакат
9. Название класса по общей форме
10. Анимация взаимосвязи кубических форм в pps-формате (14,5 М). Выполнил студент 1 курса Волков
11. Анимация взаимосвязи тетрагональных форм в pps-формате (3,6 М). Выполнила студентка 1 курса К
12. "32 класса симметрии" Плакат
13. "Трафарет гексагональных сеток"
14. "14 типов решеток Браве" Плакат-А4
15. Ионные радиусы. Плакат А3
16. "Наиболее типичные координационные полиэдры" Плакат-А4
17. Реферат "Кристаллическая решетка" Егорова-Тисменко Ю.К.
18. Трафарет гексагональных координат (pdf)
19. Лабораторный практикум кафедры кристаллографии и экспериментальной физики Нижегородского
20. Трафарет для гексагональных групп (pdf)
21. Расчет расстояний для ленивых геохимиков в прямоугольной системе координат



В следующий раз

Координатные системы. Категории. Сингонии. Символики Шенфлиса, Германа-Могена – <u>требуют знания теорем взаимодействия</u>

! Материал опять думательный. **Чуть-чуть** сложнее сегодняшнего..

Переходим на..

Следующий кристаллографический уровень

Гарри Каспаров наконец-то выиграл у компьютера,
и «с двумя очками» – см персональный рейтинг и «тремя жизнями» (экзамен-пересдача-комиссия)
*перешел **на следующий кристаллографический уровень**.*