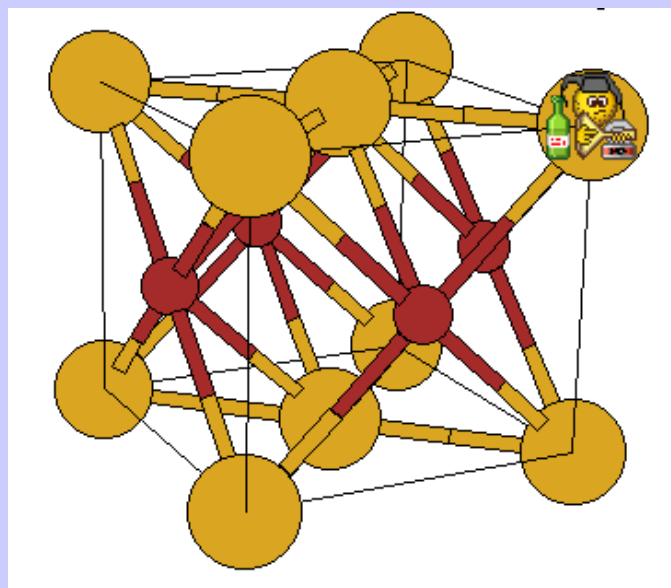


**ЛЕКЦИЯ 10**  
**СИММЕТРИЯ**  
**КРИСТАЛЛИЧЕСКОГО**  
**МИКРОМИРА.**  
**ЧАСТЬ 1**



# Прощание с макросимметрией



(С) Корзун. «Каждой твари - по паре»



**Контрольная  
работа №1 –  
первая  
торжественная  
порка  
(на этой неделе)**

- 32 класса симметрии
- Символики
- Теоремы взаимодействия операций
- Представления операций симметрии
- Простые формы
- Облик и габитус кристаллов
- Предельные группы Кюри и зачем они нам нужны
- Символы граней и ребер
- Метод зон – «кристаллагрофическое sudoku»
- Работа с сеткой Вульфа
- Икосаэдрические группы и зачем они нам нужны

На прощание еще один  
прикладной аспект  
этих групп

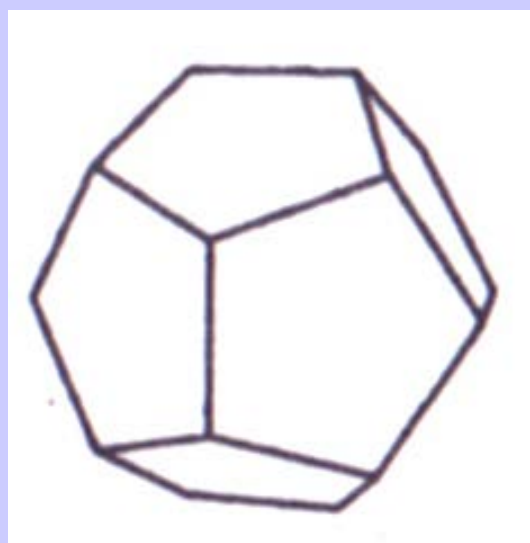
# Футбольный мяч



*22 человека полтора часа из всех сил пинают его а ему хоть бы что...*

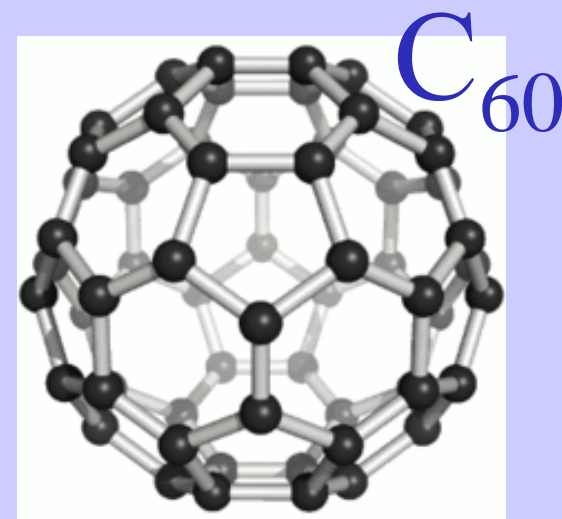
Все хотя бы раз видели футбольный мяч. Тысячи людей видят его «в натуре», на стадионе. Все знают, что покрышки мяча состоят из белых и черных фигурок (конечно, если это классический мяч, а не джимбулани – там хуже видно). Но, как ни странно, лишь немногие (**включая самих футболистов**) могут с уверенностью сказать, из каких именно многоугольников он состоит.

Давайте присмотримся к футбольному мячу повнимательнее.



У мячей покрышка состоит из изогнутых многоугольников. Она составляется из 12 черных и 20 белых «полей». Вокруг каждого черного пятиугольника располагается шесть белых шестиугольников.

Футбольный мяч является геометрическим аналогом фуллерена  $C_{60}$ , так как представляет собой подкачанный до сферы комбинационный 32-гранник с гранями икосаэдра (20 белых шестиугольников) и додекаэдра (12 черных пятиугольников)



**Такая конструкция, кстати, была не всегда  
и переход на нее оказался для наших  
футболистов не совсем удачным...**

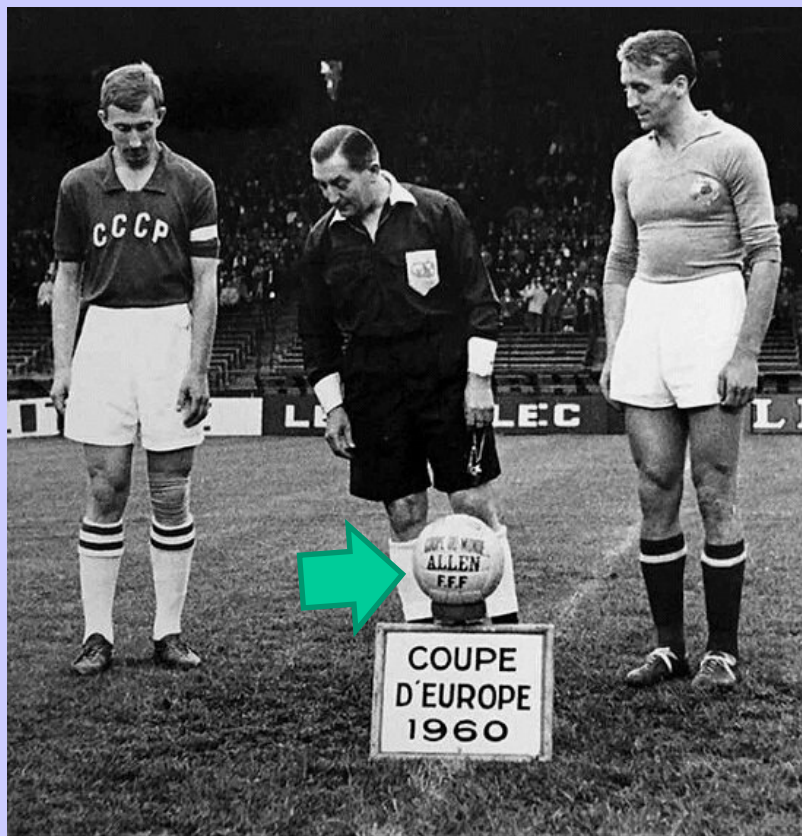


**Победитель Олимпийских игр 1956 года в Мельбурне**

Слева направо: Гавриил Качалин(старший тренер), Игорь Нетто (капитан), Лев Яшин, Борис Разинский, Эдуард Стрельцов, Анатолий Башашкин, Сергей Сальников, Алексей Парамонов, Михаил Огеньков, Валентин Иванов, Никита Симонян, Анатолий Ильин, Анатолий Масленкин, Борис Кузнецов, Анатолий Исаев, Николай Тищенко, Борис Татушин.



**1956 г. – Олимпийские чемпионы**



**1960 г. – Первые чемпионы Европы**



1966 г. ЧМ  
(4-ое место! - лучшее)



1970 г.  
(5-6-ое место)



# Новые коммерческие идеи в сфере футбола

## Бизнес-идея

1

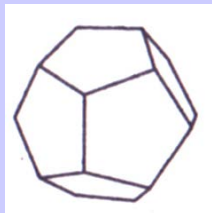
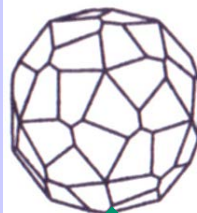
**Проанализировать**  
собственную  
рыночную ситуацию:  
- социальный статус;  
- финансовые  
возможности;  
- **ОПЫТ** и все ваши  
**умения**

2

**Выбрать сферу**  
бизнеса  
(предпринимательства),  
исходя из  
собственной  
рыночной  
ситуации

3

**Сформулировать**  
**бизнес-идею**

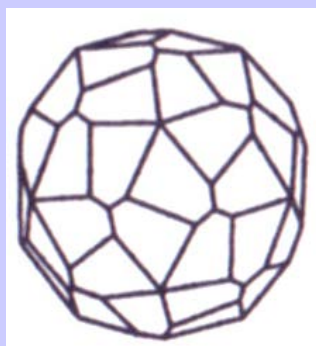
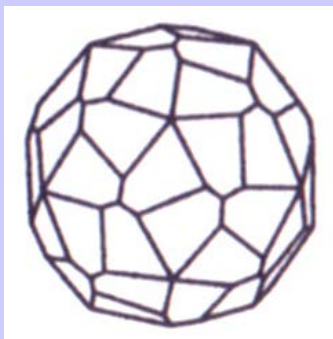


**ХА!**

# Энантиоморфные группы!

Вратарь, выучивший  
кристаллографию

знает направление вращения  
заранее!



Теперь понимаем, что тогда  
произошло в матче с  
испанцами



Для других видов спорта  
тоже что-нибудь придумаем





# Кристаллография помогает во всех видах спорта!

	ИТОГО	эстафета	патрули	Москален	Гребля	Фестиваль бега	сумма
1	Кристаллография	4	4	11	9	11	39,0
2	Инженерная геол	2	0,333	13	6	9	30,3
3	Горючие ископаемые	5	3	2	8	10,4	28,4
4	Гидрогеология	0,5	0,5	14		8,5	23,5
5	Полезные ископаемые	1	1	10	1	6	19,0
6	Геофизика			12	3	3	18,0
7	Седиментология			9	7	1,2	17,2
8	Разработка	2	0,667	6	4	1	13,7
9	Минералогия			5		7,2	12,2
10	Петрология			7		3	10,0
11	Региональная геология			3	5	0,8	8,8
12	Динамическая геология			8			8,0
13	Геохимия	0,5	0,5	4	2	0,2	7,2
14	Палеонтология			1		0,6	1,6
15	Геокриология						0,0



## ПАТРУЛЬНАЯ ГОНКА ОКОНЧАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

**МЕСТО ПРОВЕДЕНИЯ:** Парк 850-летия Москвы    **НАЧАЛО СОРЕВНОВАНИЙ:** 17ч 40 м  
**ДАТА ПРОВЕДЕНИЯ:** 9 февраля 2025 года    **ОКОНЧАНИЕ СОРЕВНОВАНИЙ:** 19ч 00м

МЕСТО	СТ.№	НАЗВАНИЕ КОМАНДЫ	ШТРАФ					ВРЕМЯ ЭТАПА	ВРЕМЯ КОМАНДЫ	ОТСТАВАНИЕ
			л	л	л	л	СУМ			
1	11	Кристаллография								
	5-1		1					04:52,0	18:04,0	+00:00,0
	5-2			0			04:50,0			
	5-3				0		04:08,0			
5-4					0	04:14,0				
2	15	Горючка								
	7-1		3					06:28,0	20:11,0	+02:07,0
	7-2			0			04:33,0			
	7-3				2		04:51,0			
7-4					4	04:19,0				
3	12	Полезка-Петра								
	6-1		0					04:25,0	24:00,0	+05:56,0
	6-2			4			06:36,0			
	6-3				4		07:32,0			
6-4					1	05:27,0				
4	17	Разработка								
	4-1		2					06:01,0	28:01,0	+09:57,0
	4-2			5			07:40,0			
	4-3				4		07:28,0			
4-4					3	06:52,0				



Ну а судя по меткости стрельбы, в джунглях выживут тоже только одни кристаллографы...



# На ЭТОЙ МАЖОРНОЙ НОТЕ ПОШЛИ В МИКРОМИР



# 1 м – единицы измерения

- Как известно, Пьер Симон Лаплас во время французской революции предложил ввести новую «революционную» единицу длины – метр – равную  $1/40,000,000$  части длины парижского меридиана.



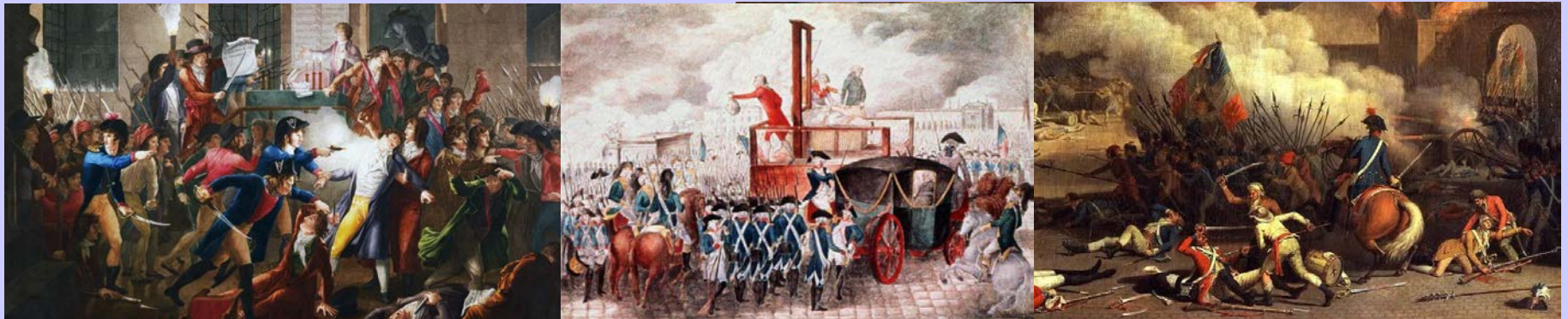
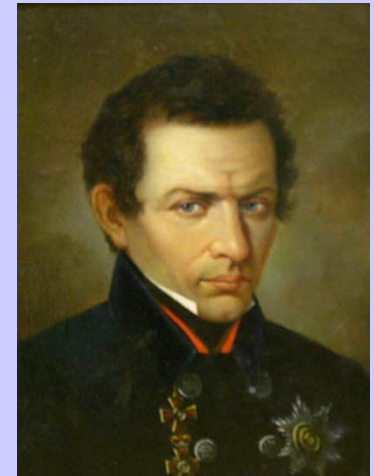
- Именно такая интерпретация метра дала Лапласу возможность изыскать необходимые средства для измерения на самом деле интересовавшей его величины – **длины парижского меридиана**. Результат измерения был принят за эталон единицы длины; он хранится в Палате мер и весов в Париже.

*На всех этапах бурной политической жизни тогдашней Франции Лаплас никогда не вступал в конфликты с властями, которые почти неизменно осыпали его почестями. Такое поведение Лапласа не только предохранило его от репрессий революции, но и позволило занимать высокие должности. Свои политические взгляды он никогда не афишировал.*

*(Иногда полезно!)*

# 1 м – единицы измерения

- Много позднее было предложено определение метра, связанное с консервативным природным процессом: 1.650.736.73 длин волн излучения в вакууме при переходе от уровня  $2p^{10}$  к уровню  $2d^5$  атома криптона-86.
- С самого начала введение новой единицы длины встретило сопротивление, начиная с разнузданной критики книги Н.И. Лобачевского «Геометрия» влиятельными учеными, обвинившего великого геометра в потворстве *«бешенству нации»* за использование метрических мер.

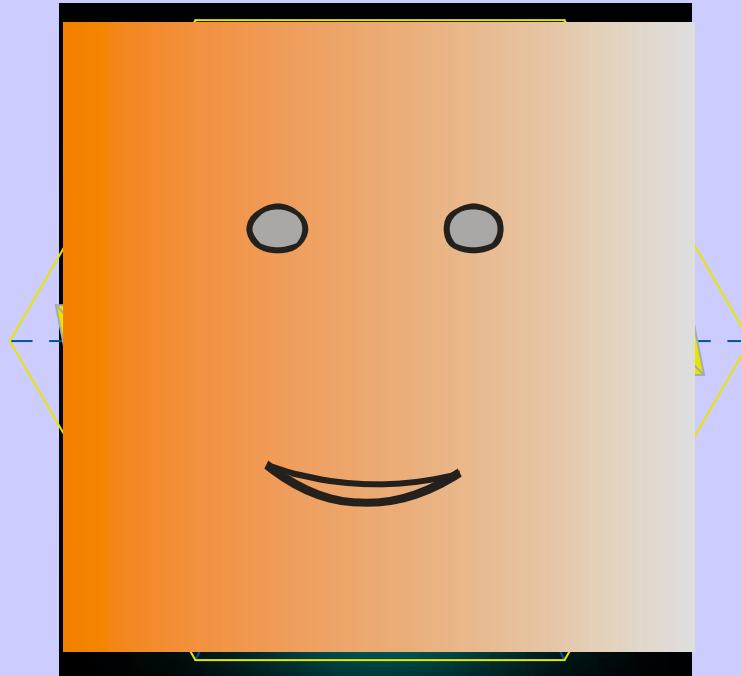


# 1 м – единицы измерения

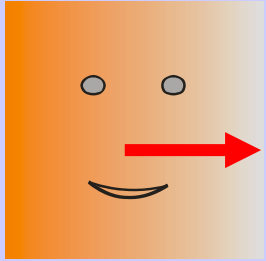
- Однако с введением системы СИ использование метра как единицы длины стало обязательным; в нашей стране оно вошло в ГОСТ. Естественно, возникли производные единицы длины: 1 км, 1 см, 1 мкм, 1 нанометр и т. д.
- В настоящее время метрическая система официально принята во всех государствах мира, кроме трех самых отсталых
- В оптике, атомной и молекулярной физике, а также при измерении процессов в кристаллических структурах используется единица длины 1  $\text{\AA}$ , равная  $10^{-10}$  м =  $10^{-8}$  см, – ангстрем, наилучшим образом соизмеримая с размерами атомов и длинами межатомных расстояний.

# 1 м – единицы измерения

1 Å



Привет! Я – атом – мельчайшая химически неделимая частица.



Некоторое время вы будете для простоты считать, что я такой

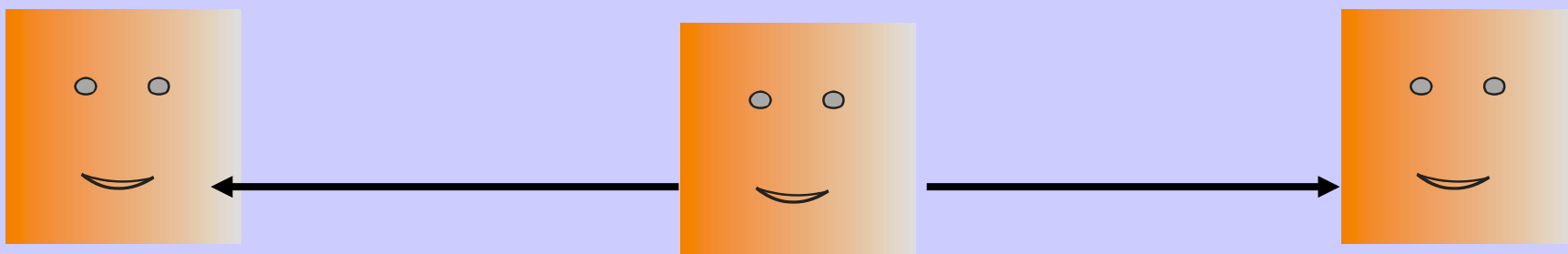
Кругленький (сферический)  
(хотя это не совсем так)

Иногда немного сжимаемый (как теннисный мячик)

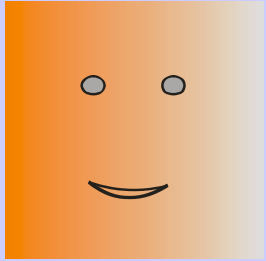
Мой размер в большинстве структур соединений определяется ионным радиусом, который можно посмотреть в таблице

[http://cryst.geol.msu.ru/appliances/pics/rad\\_a4.jpg](http://cryst.geol.msu.ru/appliances/pics/rad_a4.jpg)

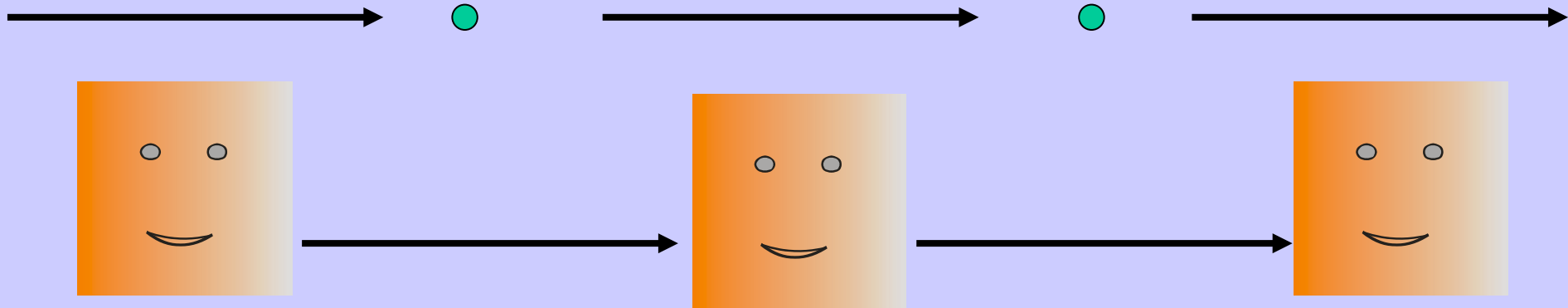
Иногда (когда я живу в кристалле) я с удивлением вижу, что на одинаковом расстоянии слева и справа от себя я вижу друзей



Возникает *атомный ряд*

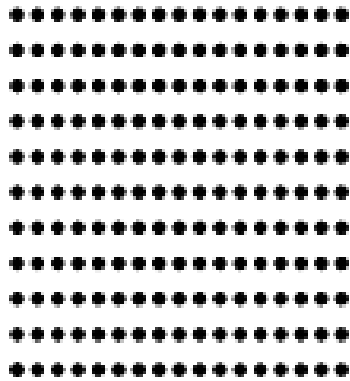


Главная особенность, отличающая кристалл от некристаллических (аморфных) тел, - это *трехмерная периодичность* в расположении слагающих его структуру эквивалентных материальных частиц: атомов, ионов, **ИТД.**

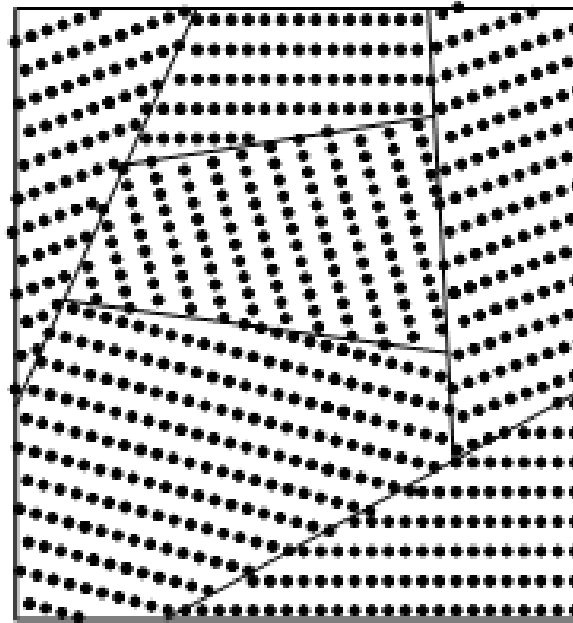
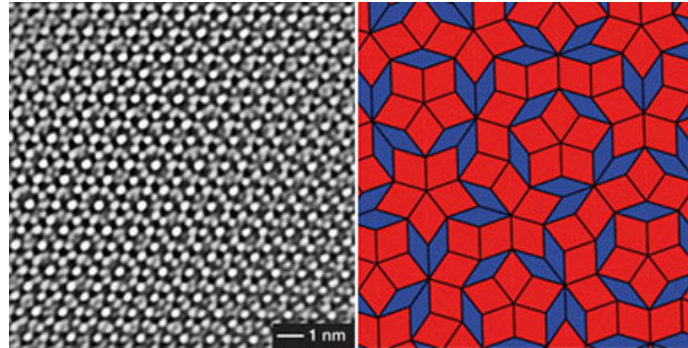


*Трехмерная периодичность* для эквивалентных точек в пространстве

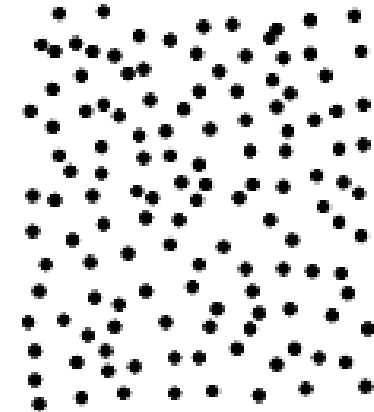
# Аморфные, поликристаллические и кристаллические твердые тела



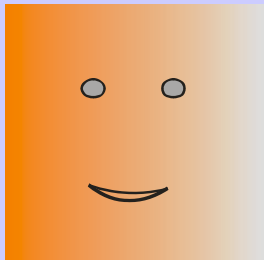
Кристалл  
(монокристалл)



Поликристалл



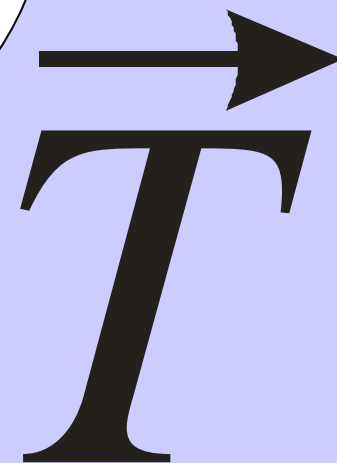
Аморфное  
состояние

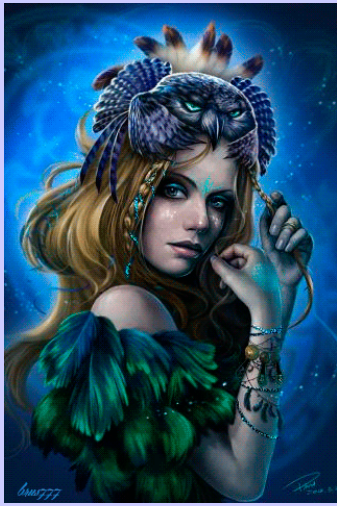


# *Новая операция симметрии микромира*



*Привет,  
меня зовут Трансляция.  
Я не материальное  
существо и живу только  
в бесконечном микромире  
Красивое имя, правда?  
Познакомимся?*





*Я задаю  
периодичность*

ДЛЯ

ЭКВИВАЛЕНТНЫХ

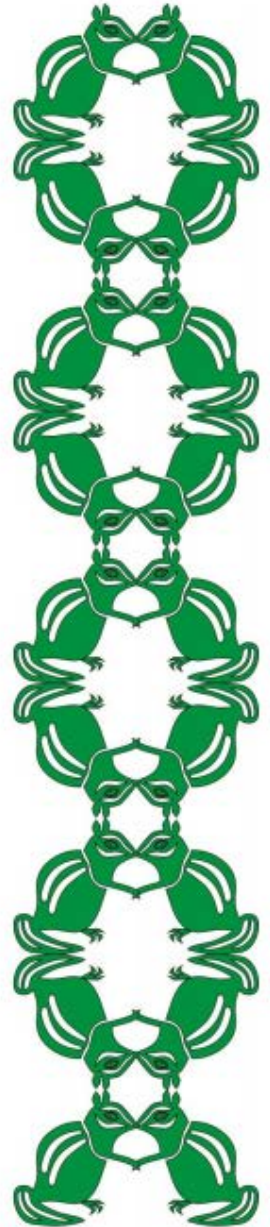
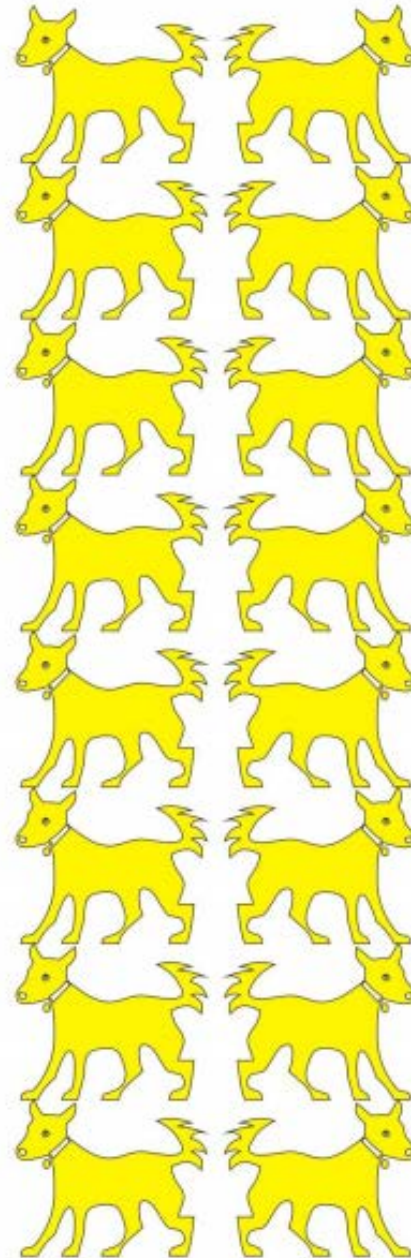
ТОЧЕК, а что в них

находится, хвост

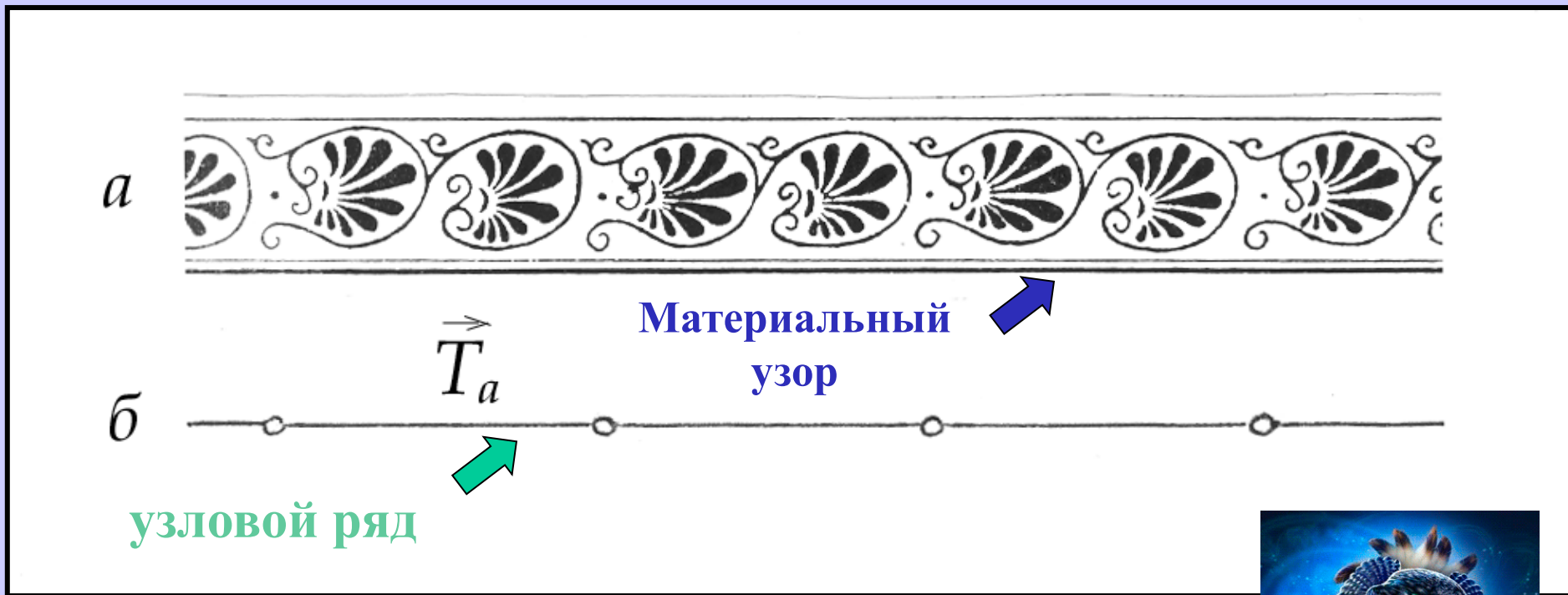
кота или улыбка

Джоконды – мне

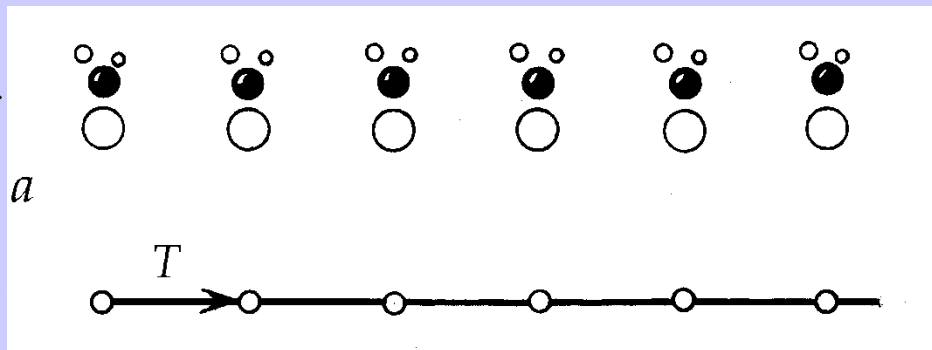
все равно...



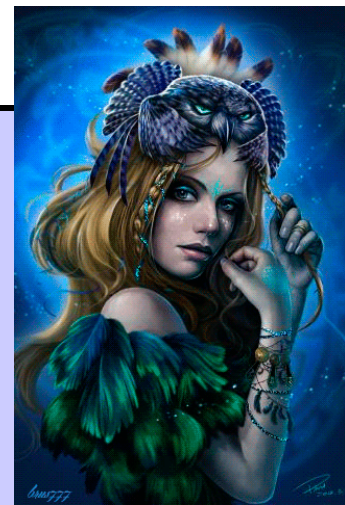
# Одномерная решетка – узловой ряд – ряд эквивалентных точек управляется одной трансляцией



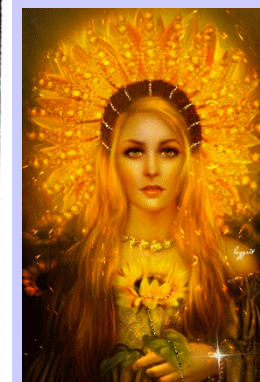
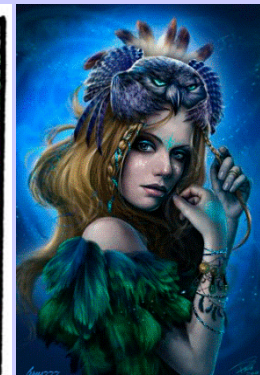
Материальный узор



узловой ряд

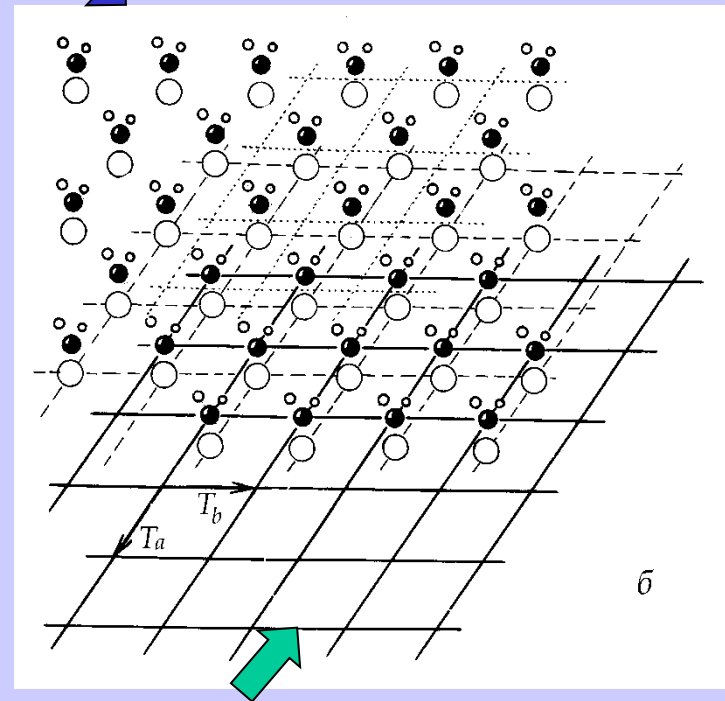
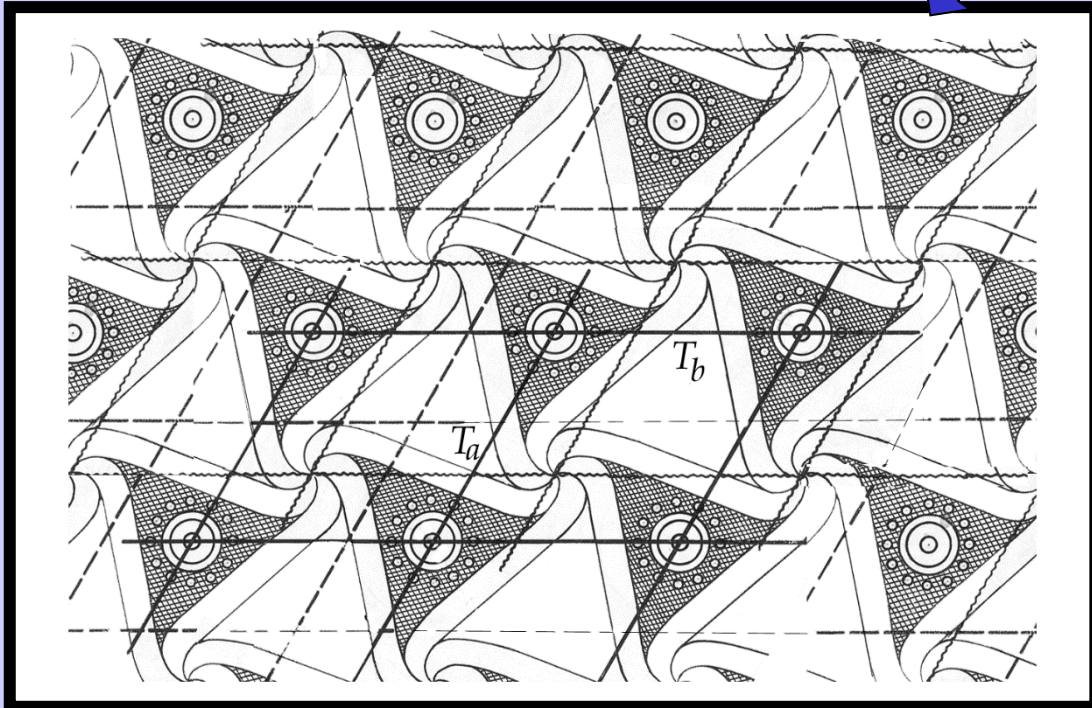


# Двумерная узловатая сетка – двумерная решетка управляется двумя разными трансляциями



# Двумерная узловатая сетка – двумерная решетка

Двумерные  
узоры



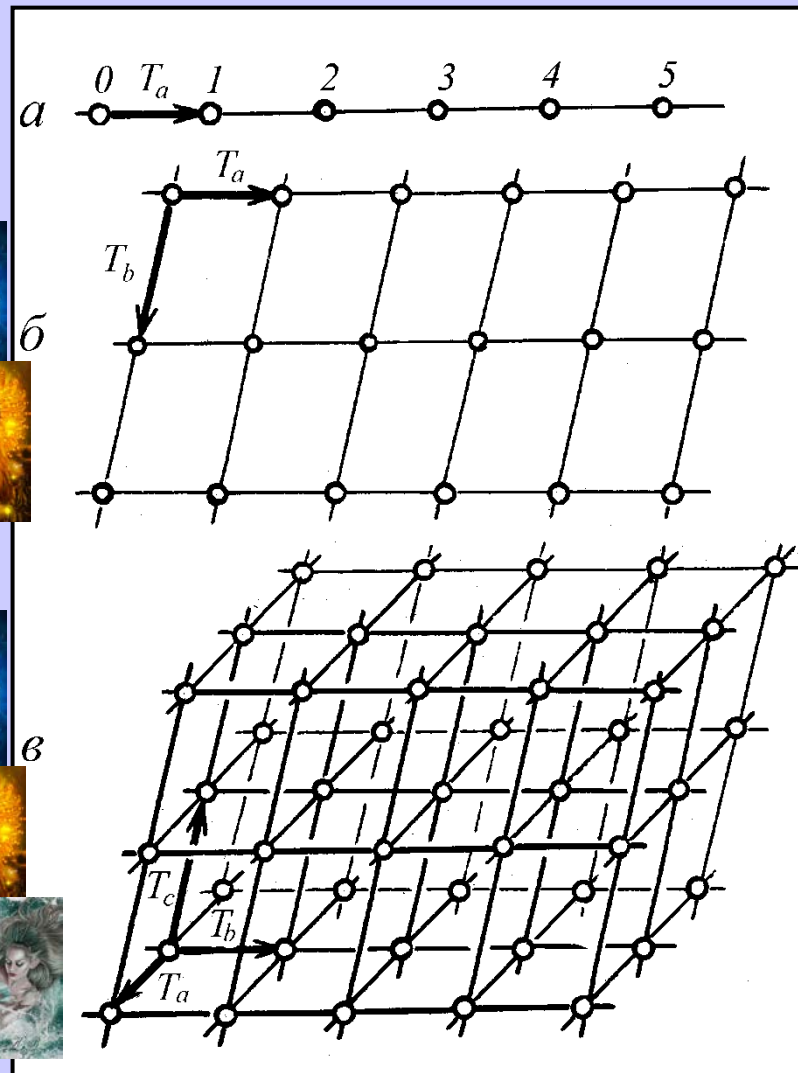
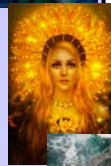
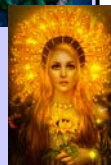
Двумерная  
решетка



Выразителем трехмерной периодичности является **пространственная решетка** – **НОВЫЙ** элемент симметрии, задающий и осуществляющий повторяемость эквивалентных точек кристаллического пространства (в физическом и в геометрическом смысле) в трех некомпланарных направлениях (управляется тремя разными трансляциями!). Решетка как бы **управляет расположением атомов в кристалле** и является тем главным элементом симметрии, без которого нельзя представить строение ни одного кристалла.

# СИММЕТРИЯ КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ СТРУКТУР

Пространственная решетка – *своеобразный элемент симметрии*, задающий и осуществляющий повторяемость эквивалентных точек кристаллического пространства в трех некомпланарных направлениях



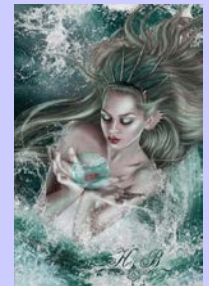
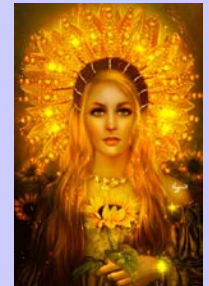
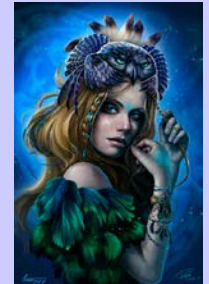
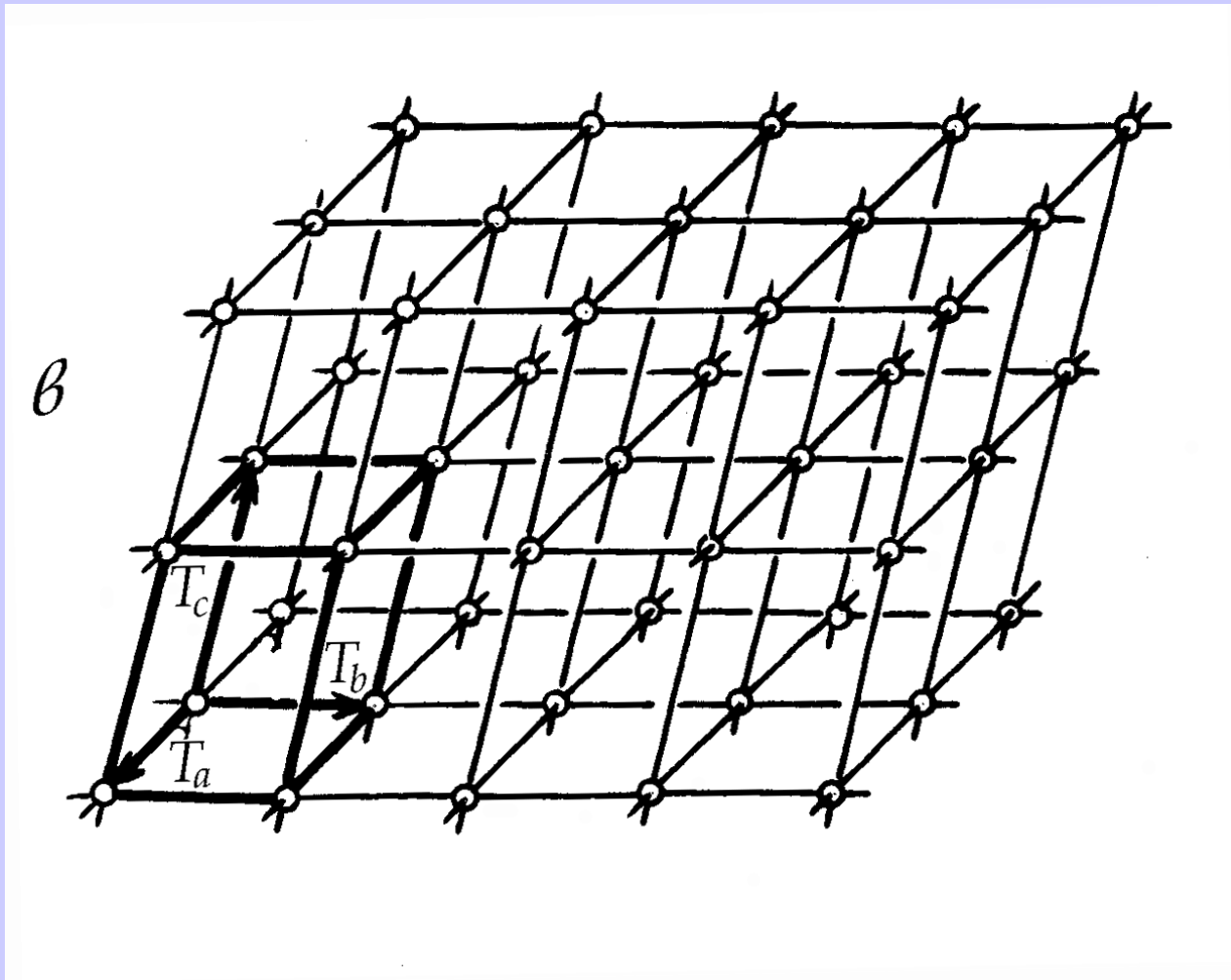
# Трехмерная решетка – выразитель кристаллического состояния вещества



Решетка не есть нечто материальное – не конкретная структура кристалла, т.е. не конкретная укладка атомов (или фигур) в неподвижных узлах решетчатого каркаса,

а математический образ – схема, с помощью которой мы описываем периодичность кристаллического вещества, не зависящая от того, какая точка трехмерного пространства (узора) принята за исходный узел (три нематериальные трансляции создают решетку).

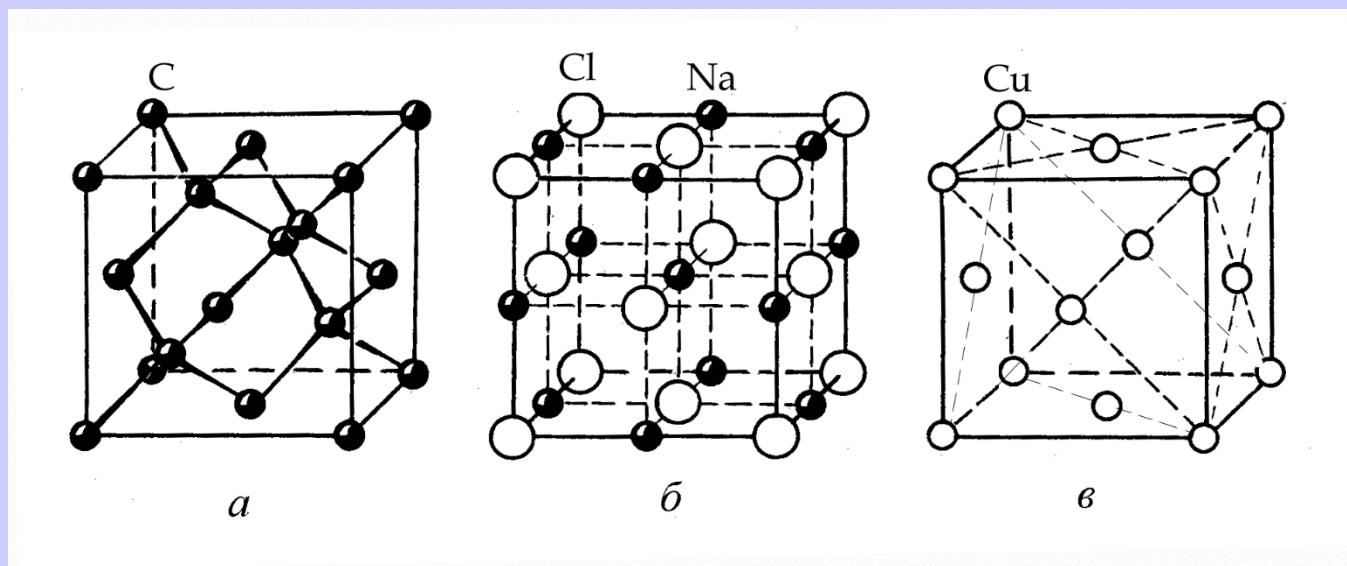
# Трехмерная узловая сетка – **трехмерная пространственная решетка** с выделенным параллелепипедом повторяемости



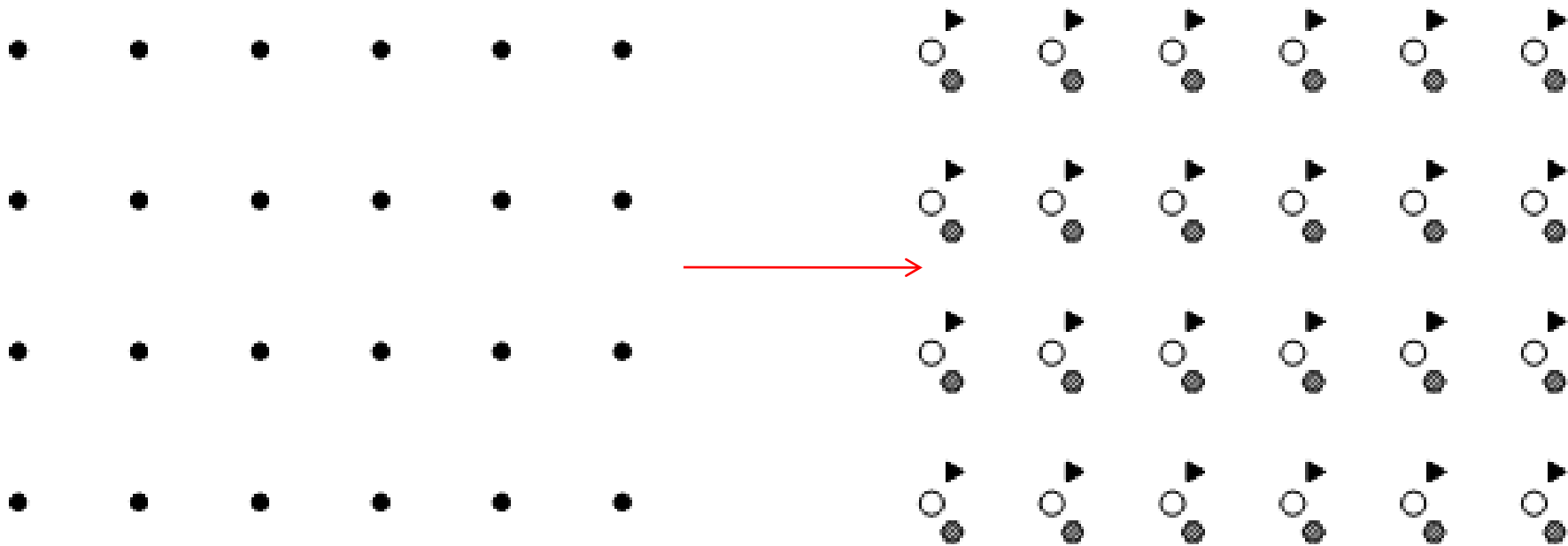


# Кстати!

ПРЕСТУПНО! смешивать термины  
 «кристаллическая решетка» и  
 «кристаллическая структура», ибо первый  
 обозначает один из элементов симметрии, с  
 помощью которых можно описать симметрию  
 кристаллической структуры, а второй –  
 конкретное химическое наполнение  
 пространства! Путаников будем жестоко  
 наказывать!



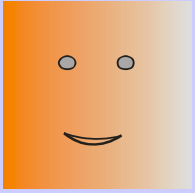
Кристаллические структуры алмаза C (а), галита NaCl (б)  
 и меди (Cu) описываются одной и той же решеткой



*Решетка* + Базис



= Кристаллическая  
структура



Поэтому *решеток* всего

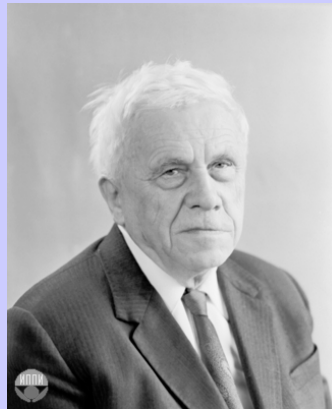
МММ.... ВЫЧИСЛИМ ЧУТЬ ПОЗЖЕ

а «*кристаллических структур*»

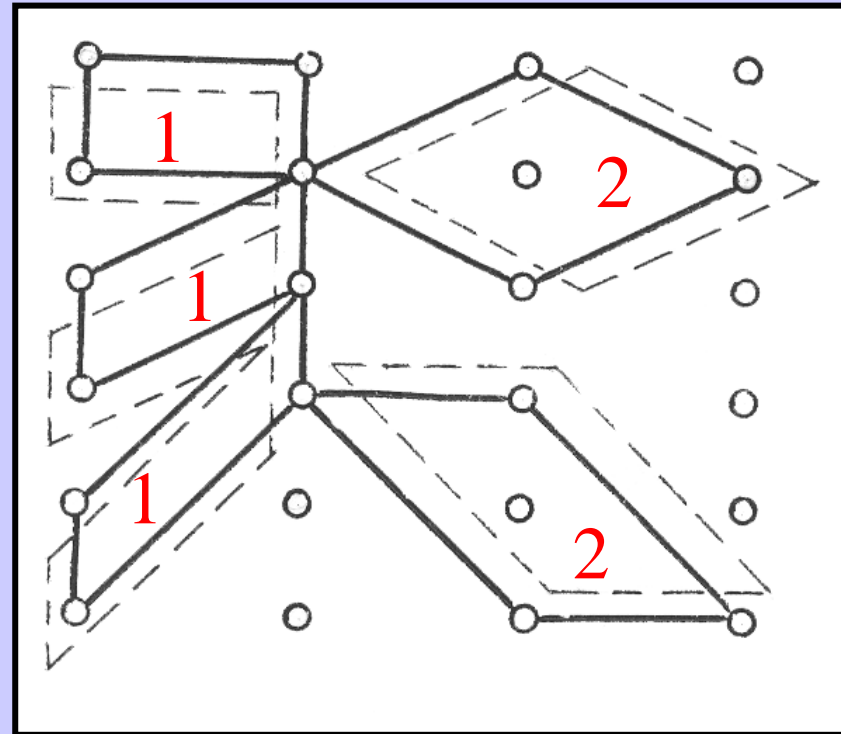
СОТНИ И СОТНИ ТЫСЯЧ

# Трехмерная решетка – выразитель кристаллического состояния вещества

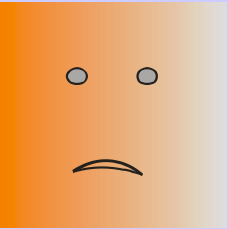
- «Кристалл находится в состоянии решетки»



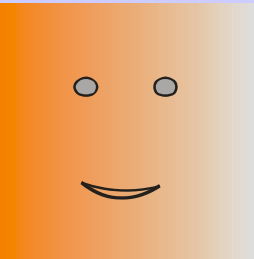
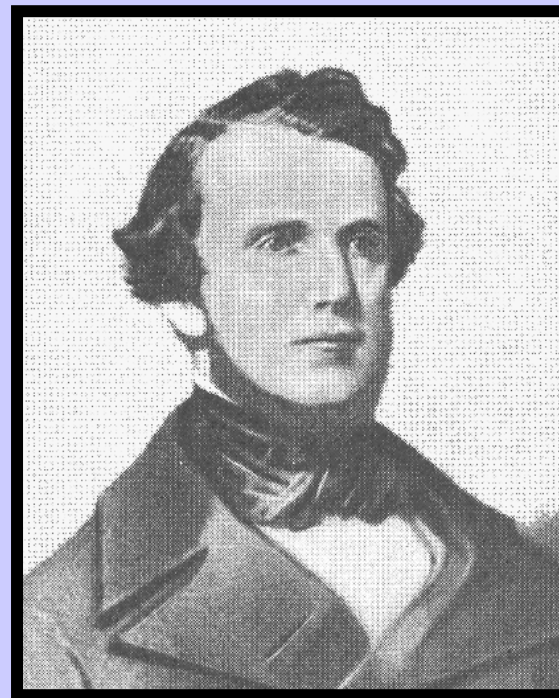
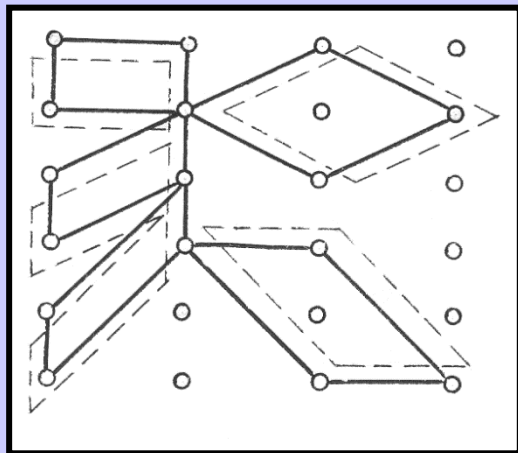
*академик Н.В.Белов*



- Все примитивные ячейки равновелики.
- На одну ячейку приходится один узел.
- Число узлов, приходящихся на одну ячейку, показывает во сколько раз она больше примитивной ячейки этой же решетки. *Спорим, что  $S(2)$  любой =  $2S(1)$  любой?*



Как же выбрать параллелепипед (ячейку)  
правильно?

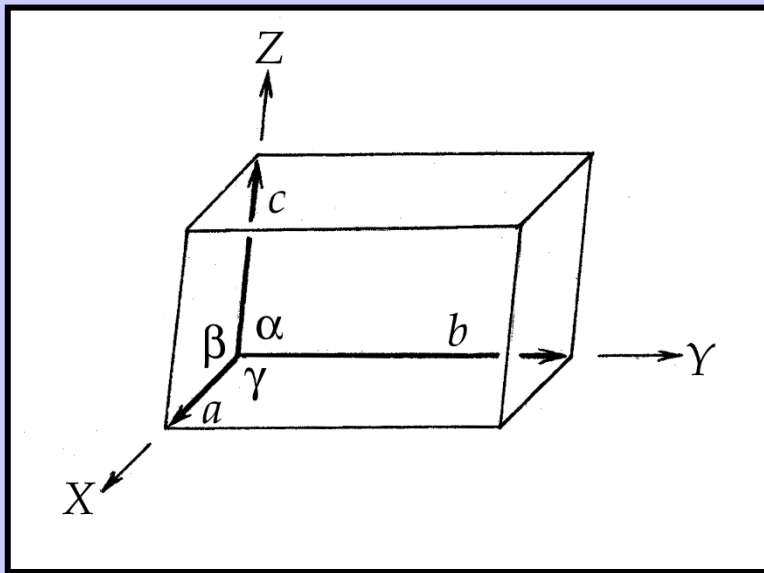


Правила выбора придумал  
Огюст Браве (1811-1863 гг.)

# Элементарная ячейка (ячейка Браве) –

это параллелепипед, построенный на трех трансляционных векторах, совпадающих с

направлениями максимальной симметрии кристалла.

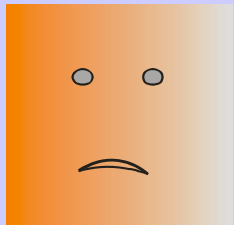


Каждая ячейка Браве характеризуется своими параметрами – константами решетки: тремя координатными векторами  $T_x, T_y, T_z$  (или  $a, b, c$ ) и углами  $\alpha, \beta, \gamma$

Основная ячейка построена на трех **минимальных** трансляциях решетки:  $a_{min} \leq b_{min} \leq c_{min}$

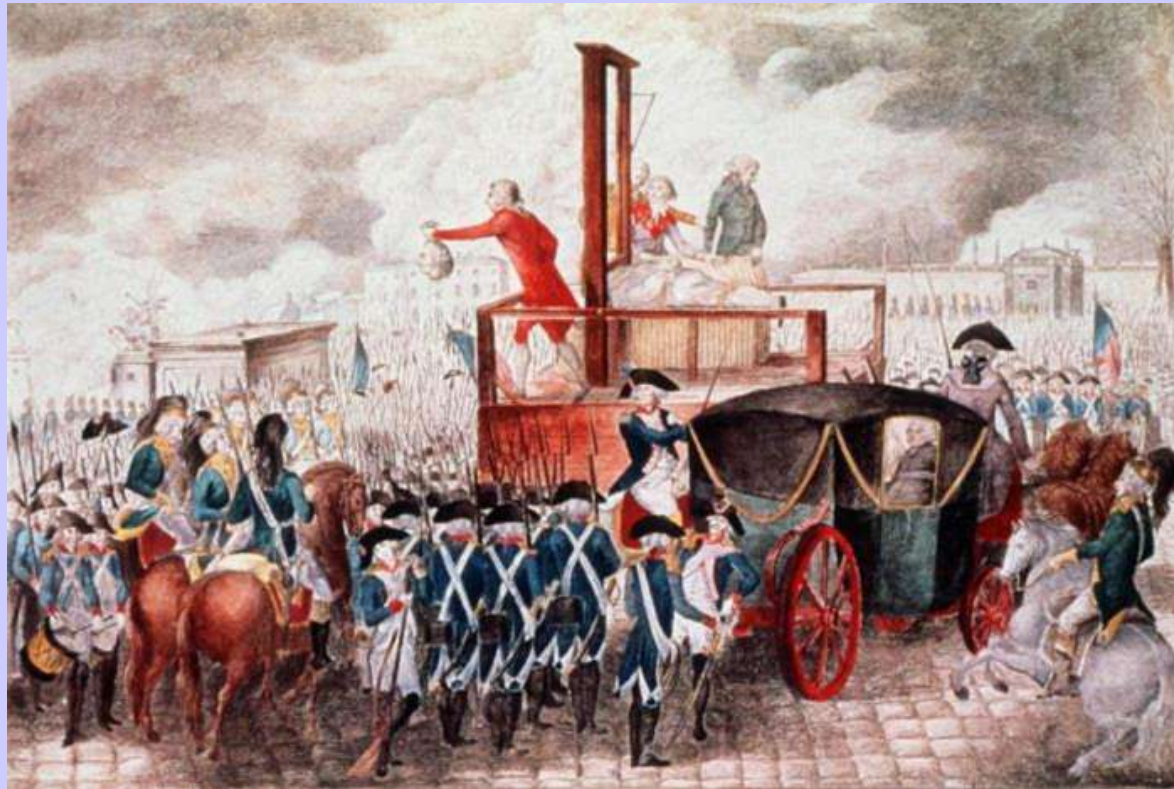
# Правила выбора ячейки Браве

- 1) Построена (по возможности) на трех *кратчайших* неколлинеарных трансляционных векторах,
- 2) Но вектора должны совпадать с особыми направлениями максимальной симметрии
- 3) При этом число прямых углов должно быть максимальным



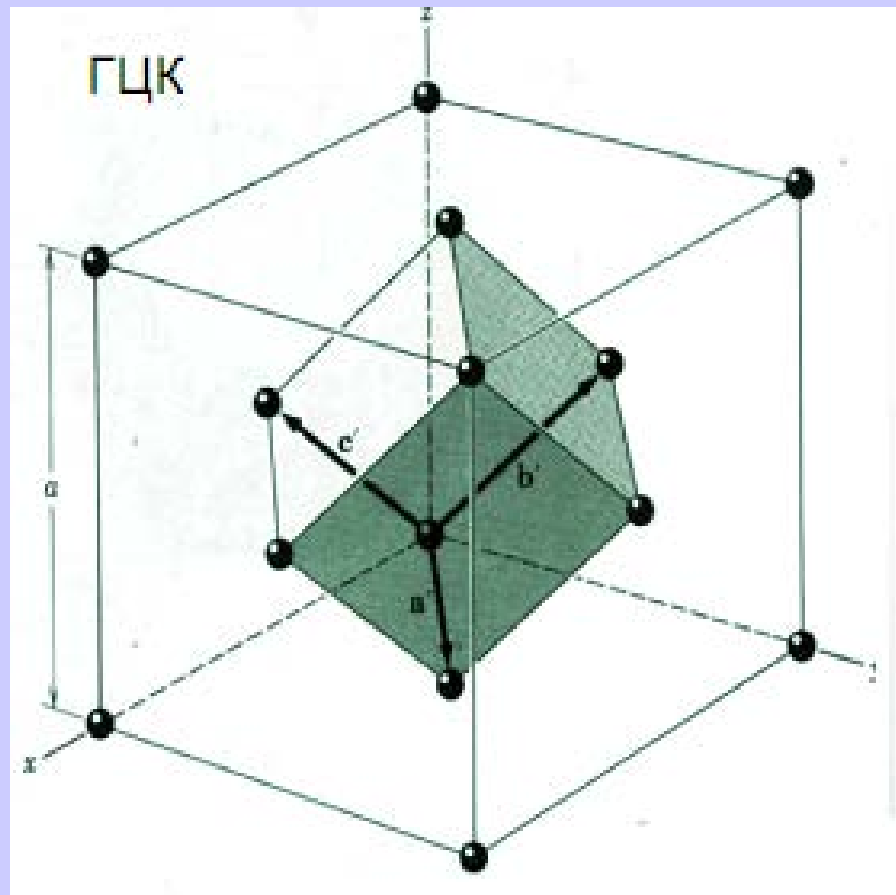
(вспомним принцип Кюри) – неправильно выбрав ячейку, можно потерять ряд элементов симметрии объекта, а это *преступление в микромире!*

# НАРУШИТЕЛЕЙ В МИКРОМИРЕ КАЗНЯТ СРАЗУ



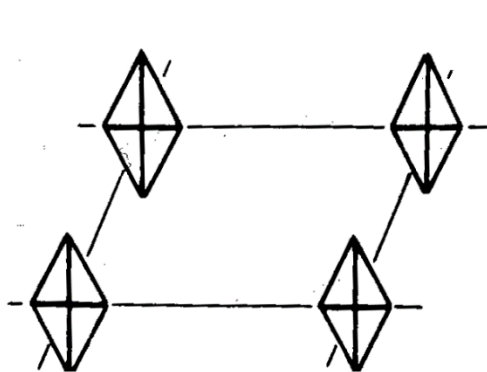
Картина в микро-мирной Третьяковке  
«Неправильно выбрал элементарную ячейку»

# Основная ячейка и ячейка Браве не всегда равны друг другу

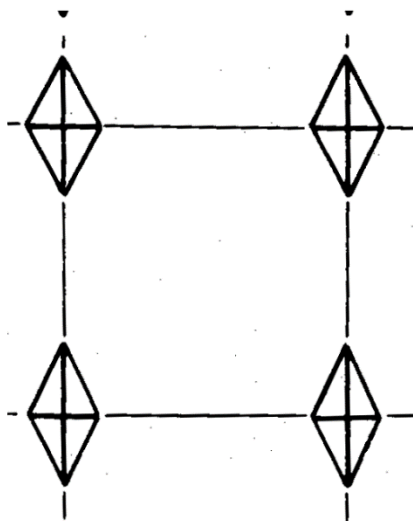


# Как пряхать двумерные ковры правильно

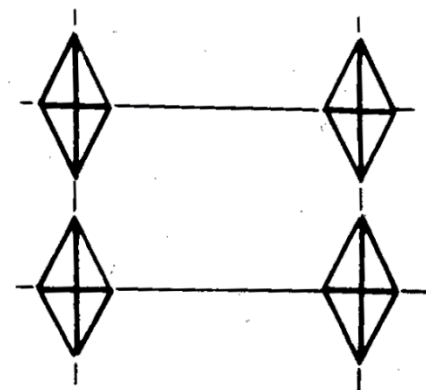




*a*

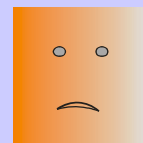


*б*

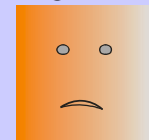


*в*

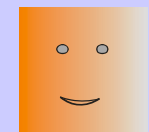
*a)* – группа симметрии решетки  $2$  не содержит всех элементов симметрии фигуры  $mm2$  – **узор** наследует лишь общий для решетки и фигуры элемент симметрии - ось  $2$



*б)* - симметрия фигуры  $mm2$ , и, хотя симметрия решетки выше –  $4mm$ , **узор** наследует лишь симметрию фигуры –  $mm2$

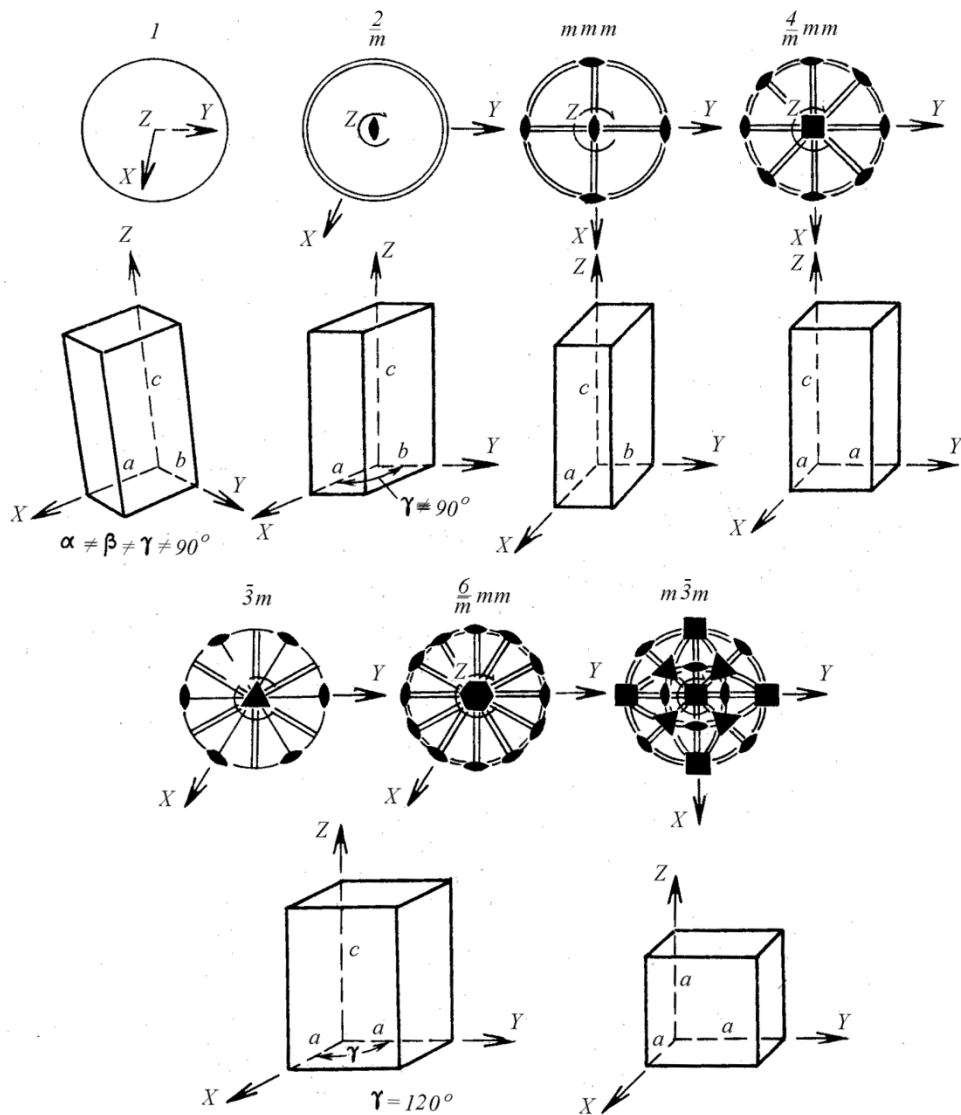


*в)* – симметрия фигуры  $mm2$  и решетки  $mm2$  совпадают – **узор приобретает ту же симметрию**

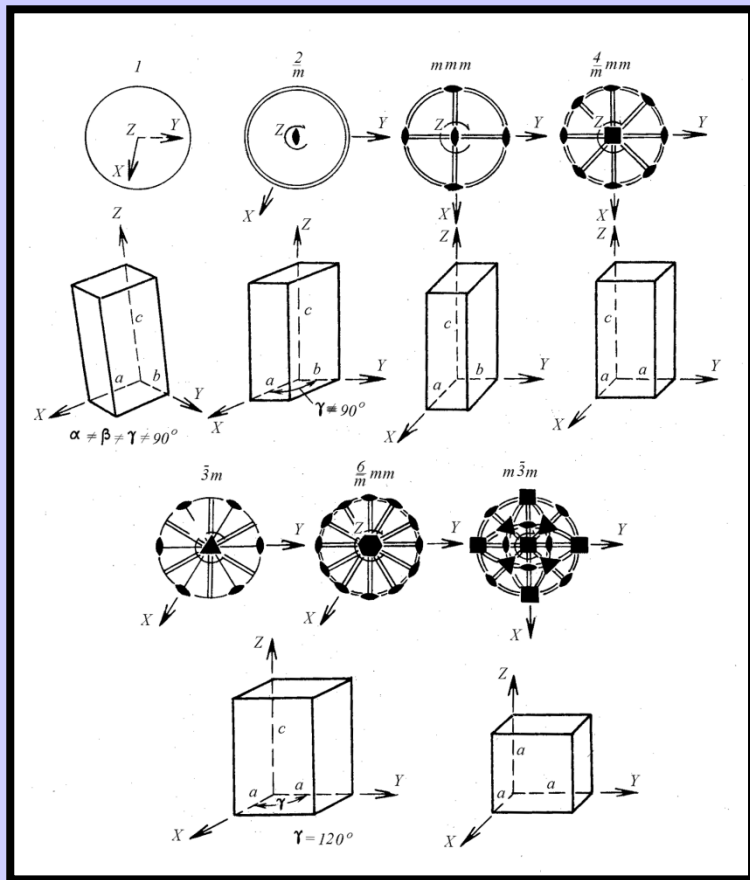


# Шесть различных по форме решеток Браве (элементарных ячеек) соответствуют шести сингониям

Должна быть  
«Голоэдрия»  
(самый  
симметричный  
класс)!



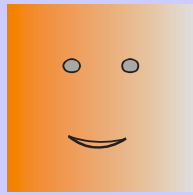
Триклинная -1  
Моноклинная  $2/m$   
Ромбическая  $mmm$   
Тетрагональная  $4/m\bar{2}2$   
Гексагональная\*  $6/m\bar{2}2$   
Кубическая  $m\bar{3}m$



Симметрия всех 12 групп гексагональной сингонии может быть передана бесконечному узору решеткой гексагональной **голоэдри**  $6/mmm$

Однако принцип минимума возможной симметрии позволяет для групп с осями 3-го порядка – групп **тригональной подсингонии** использовать решетку пониженной симметрии гексагональной **гемидри**:

- $3m$  ( тригональной «голоэдри») )

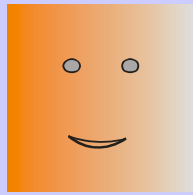


Кстати!

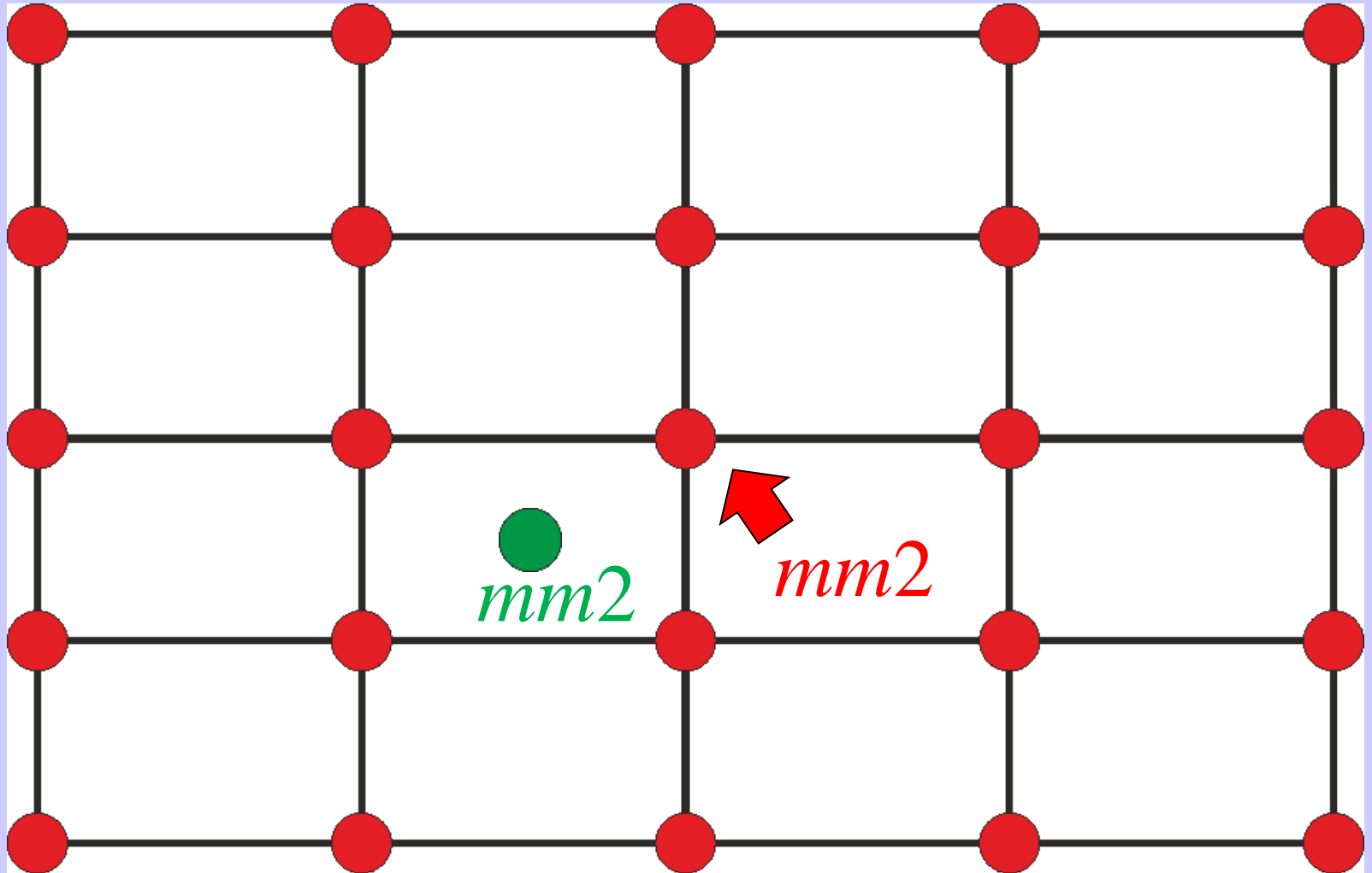
могут быть не только примитивные  
решетки Браве

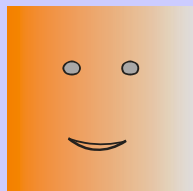
**Внутри** параллелепипеда Браве

могут оказаться узлы с  
эквивалентной симметрией

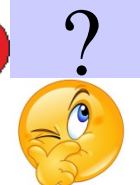
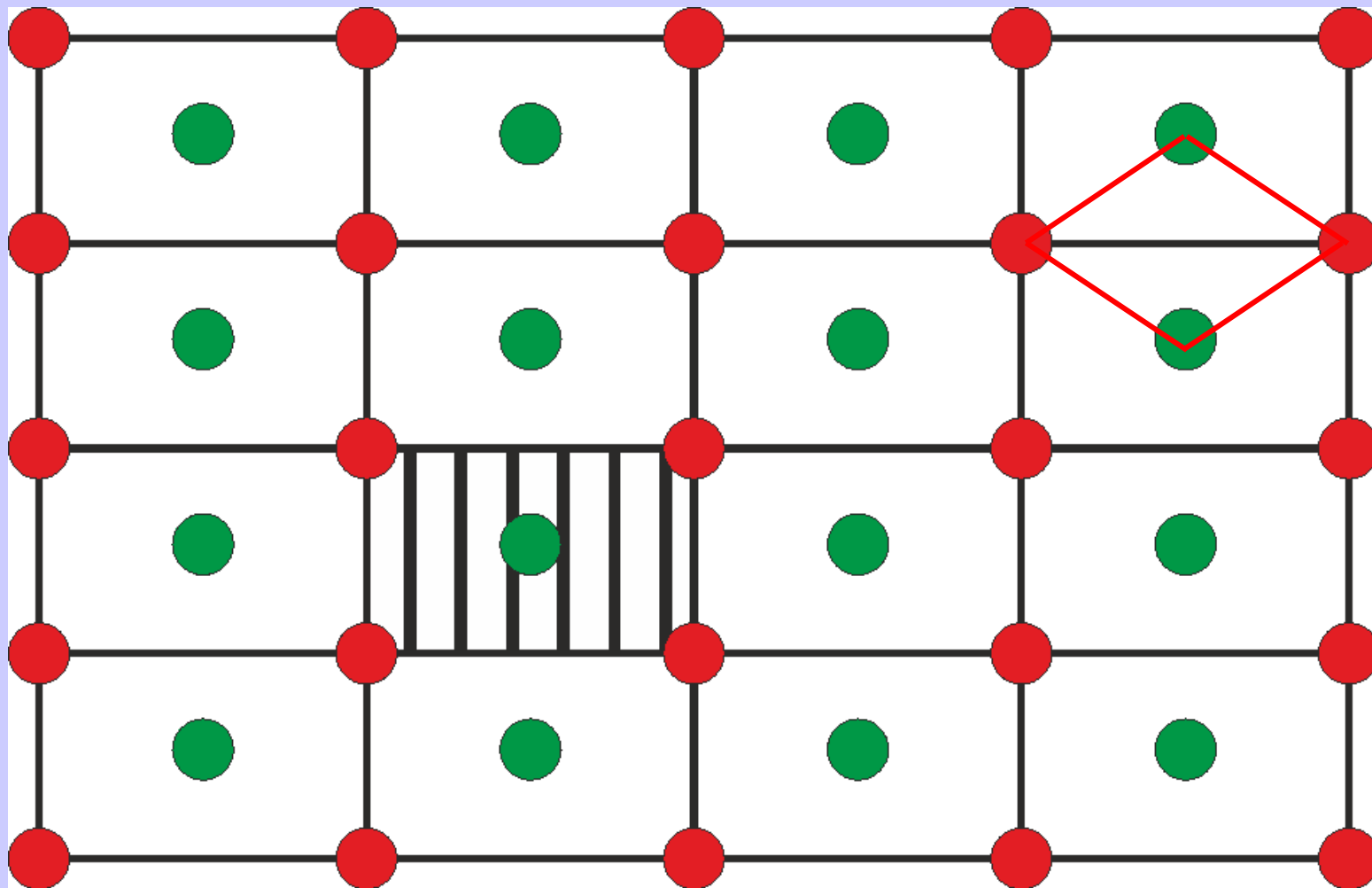


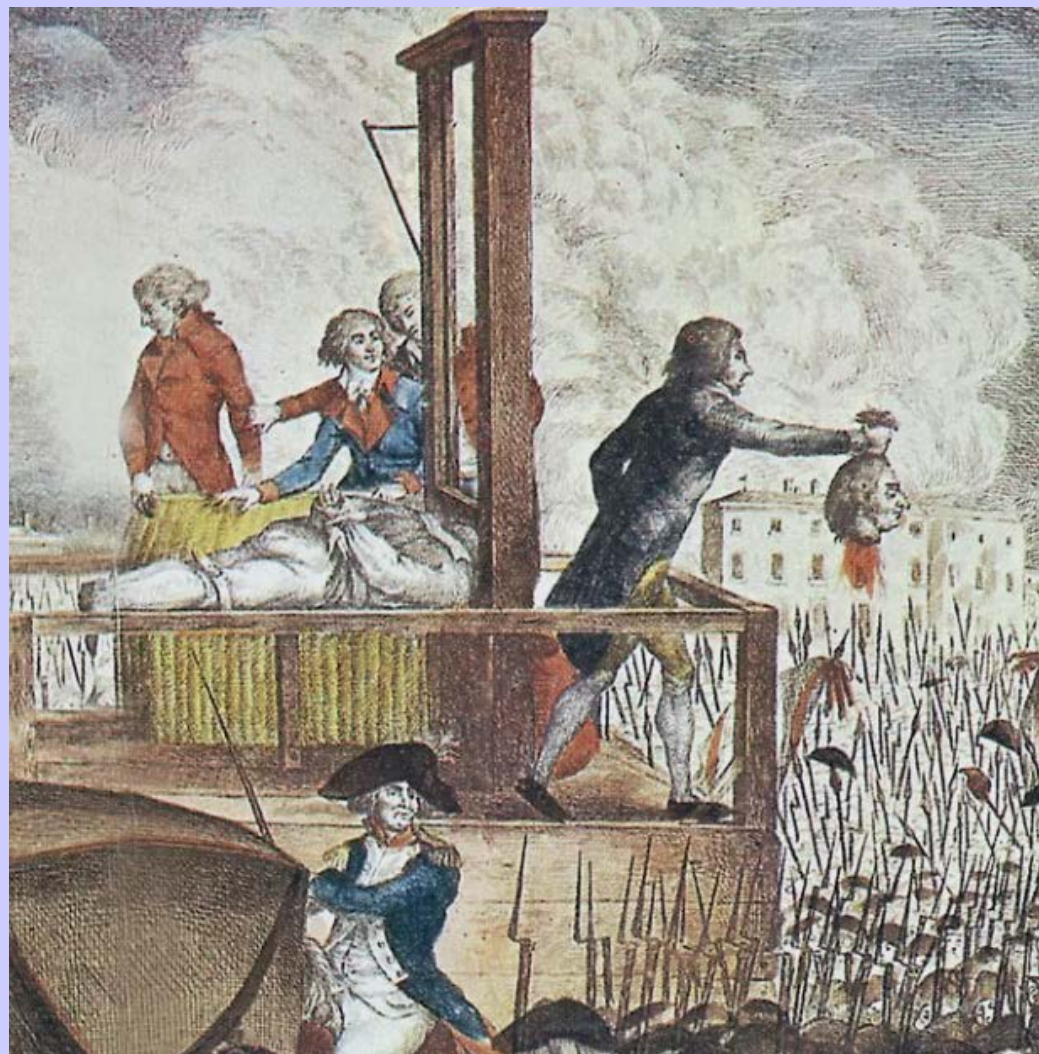
# Пример - иллюстрация



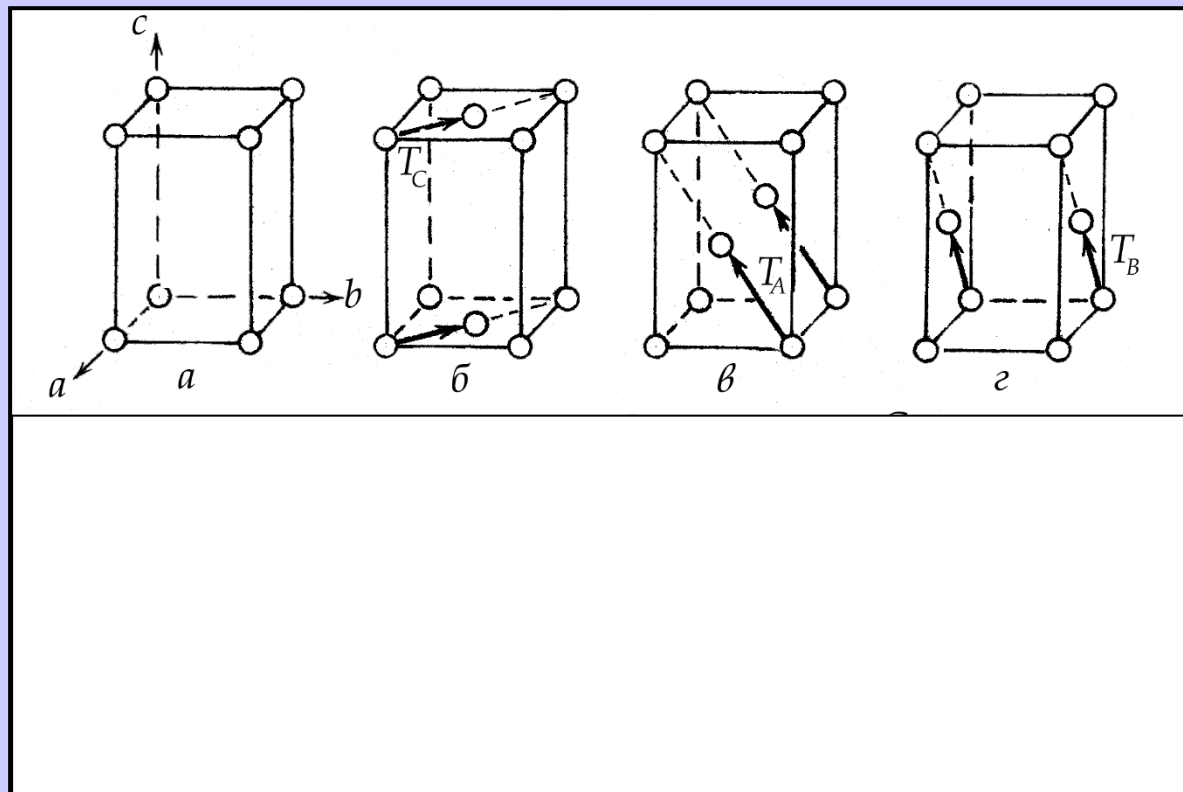


# Пример - иллюстрация

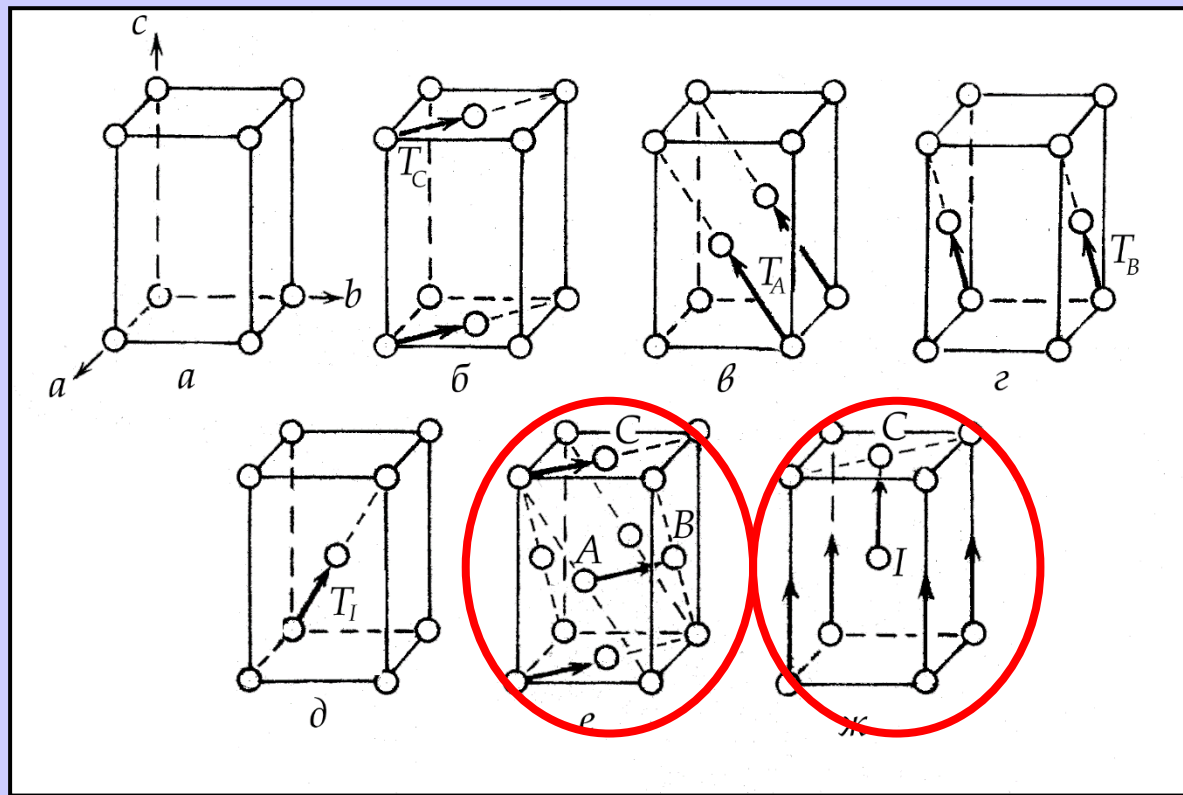




Картина в микро-мирной Третьяковке  
«Ушел от прямых углов без разрешения»



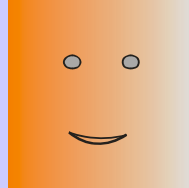
*a* – примитивная (**P**),  
*б* - базоцентрированная (**C**),  
*в, г* - бокоцентрированная (**A, B**),



*д* – **объемноцентрированная (I)**,

*е* – центрировка граней *A* и *B* приведет к центрировке и грани *C*, т.е. к **гранецентрированной ячейке (F)**,

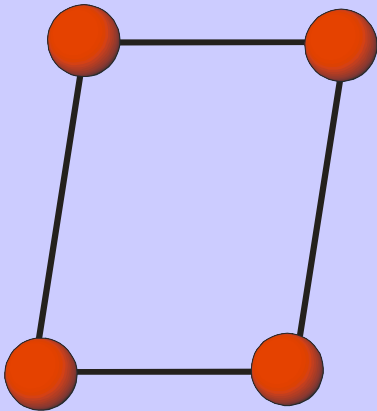
*ж* – центрировка грани *C* и объема (*I*) приведет к центрировке ребра с ячейки, т.е. к выбору ячейки меньшего размера.



Сколько же всего Браве  
насчитал решеток  
????

# Триклинная сингония

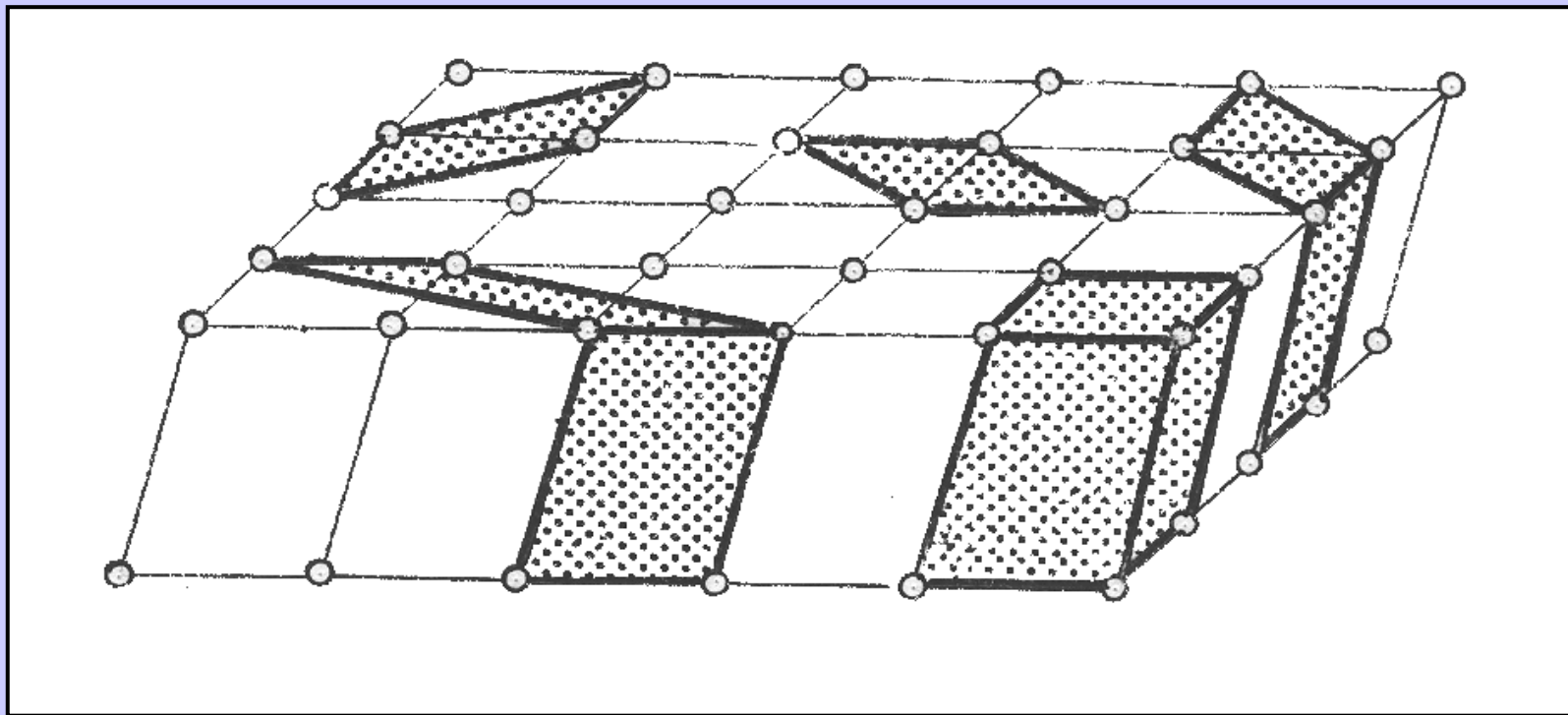
	Примитивная <i>P</i> - ячейка	Базо (боко- центрированная) <i>C</i> - ячейка ( <i>A</i> , <i>B</i> )	Объемно центрированная <i>I</i> - ячейка	Гране- центрированная <i>F</i> - ячейка
--	----------------------------------	---	--	---



Любая триклинная ячейка может быть представлена одним из косоугольных параллелепипедов минимального объема без дополнительных узлов

ИТОГО - 1

Решетка триклинной симметрии. Выделены различные примитивные параллелепипеды



Правила выбора ячейки Браве

Углы приближены к 90 и тупые

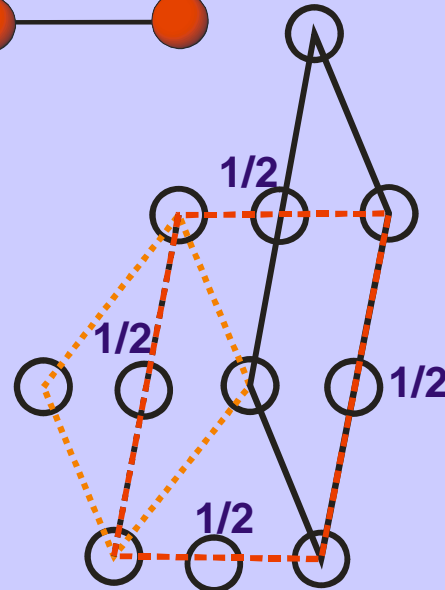
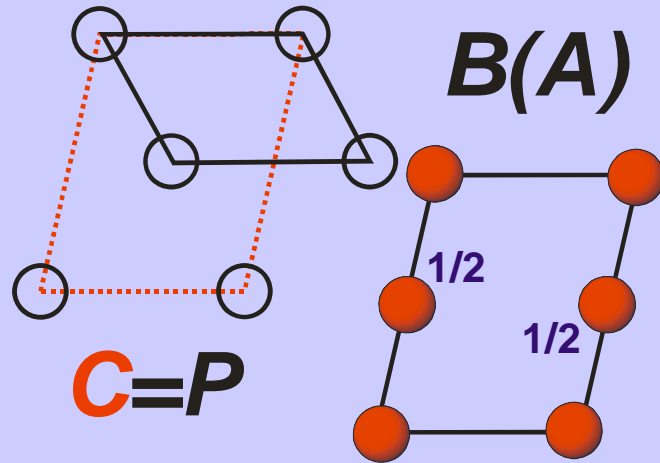
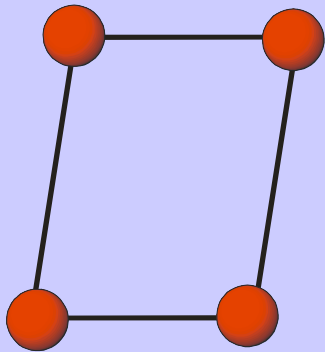
# Моноклинная сингония

Примитивная  
*P* - ячейка

Базо (боко-  
центрированная)  
*C* - ячейка (*A*, *B*)

Объемно  
центрированная  
*I* - ячейка

Гране-  
центрированная  
*F* - ячейка

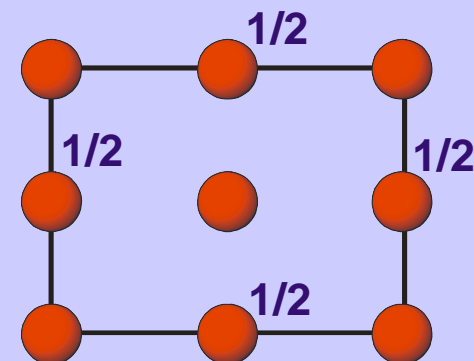
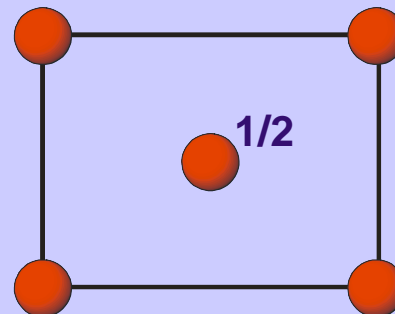
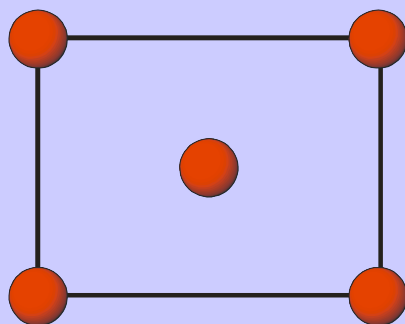
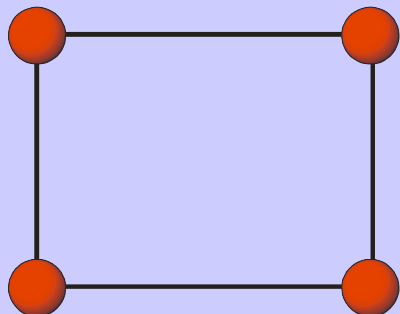


$$F=I=B$$

ИТОГО:  $2+1=3$

# Ромбическая сингония

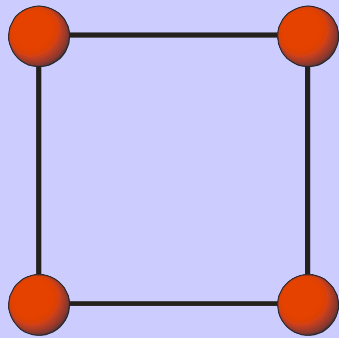
Примитивная <i>P</i> - ячейка	Базо (боко- центрированная) <i>C</i> - ячейка ( <i>A</i> , <i>B</i> )	Объемно центрированная <i>I</i> - ячейка	Гране- центрированная <i>F</i> - ячейка
----------------------------------	---	--	---



ИТОГО:  $4+3=7$

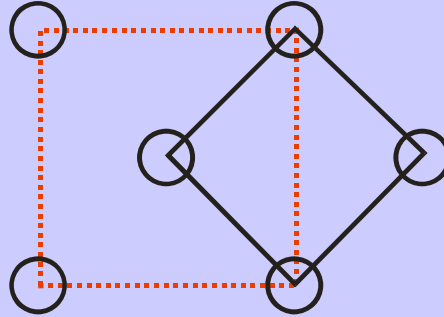
# Тетрагональная сингония

Примитивная  
*P* - ячейка

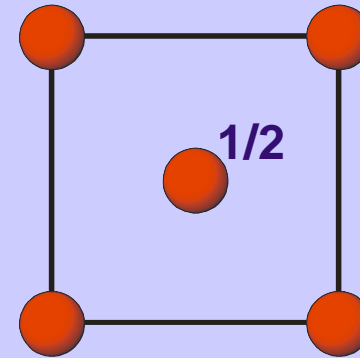


Базо (боко-  
центрированная)  
*C* - ячейка (*A*, *B*)

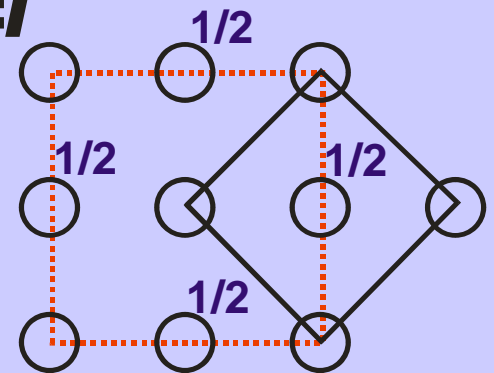
***C* = *P***



Объемно  
центрированная  
*I* - ячейка



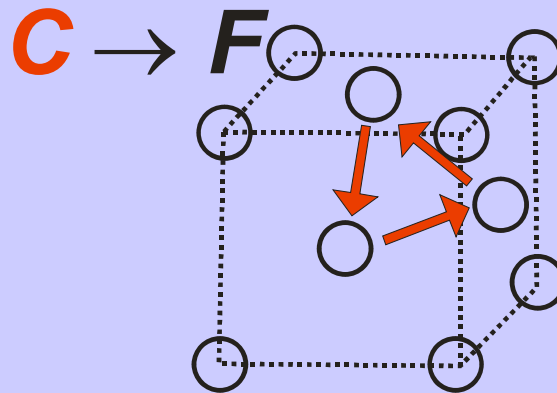
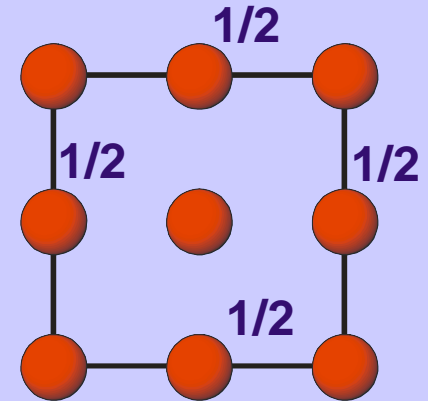
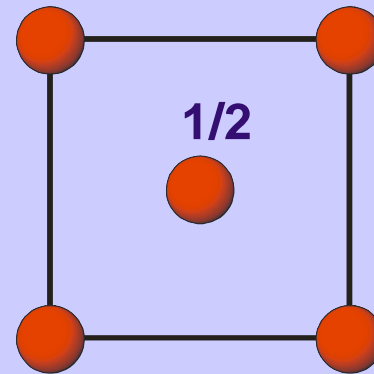
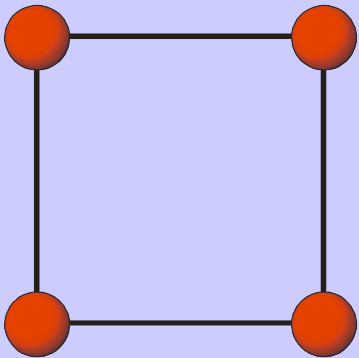
***F* = *I***



ИТОГО:  $2+7=9$

# Кубическая сингония

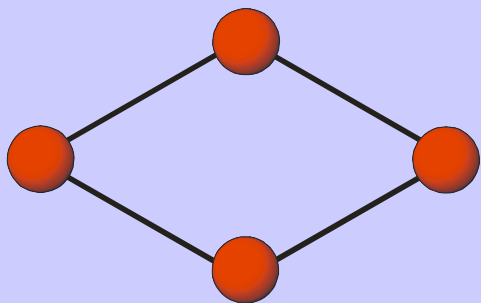
Примитивная <i>P</i> - ячейка	Базо (боко- центрированная) <i>C</i> - ячейка ( <i>A</i> , <i>B</i> )	Объемно центрированная <i>I</i> - ячейка	Гране- центрированная <i>F</i> - ячейка
----------------------------------	---	--	---



ИТОГО:  $3+9=12$

# Гексагональная сингония

	Примитивная <i>P</i> - ячейка	Базо (боко- центрированная) <i>C</i> - ячейка ( <i>A</i> , <i>B</i> )	Объемно центрированная <i>I</i> - ячейка	Гране- центрированная <i>F</i> - ячейка
--	----------------------------------	---	--	---



Симметрия  
позиции  
не  
соответствует  
симметрии  
вершинного  
узла

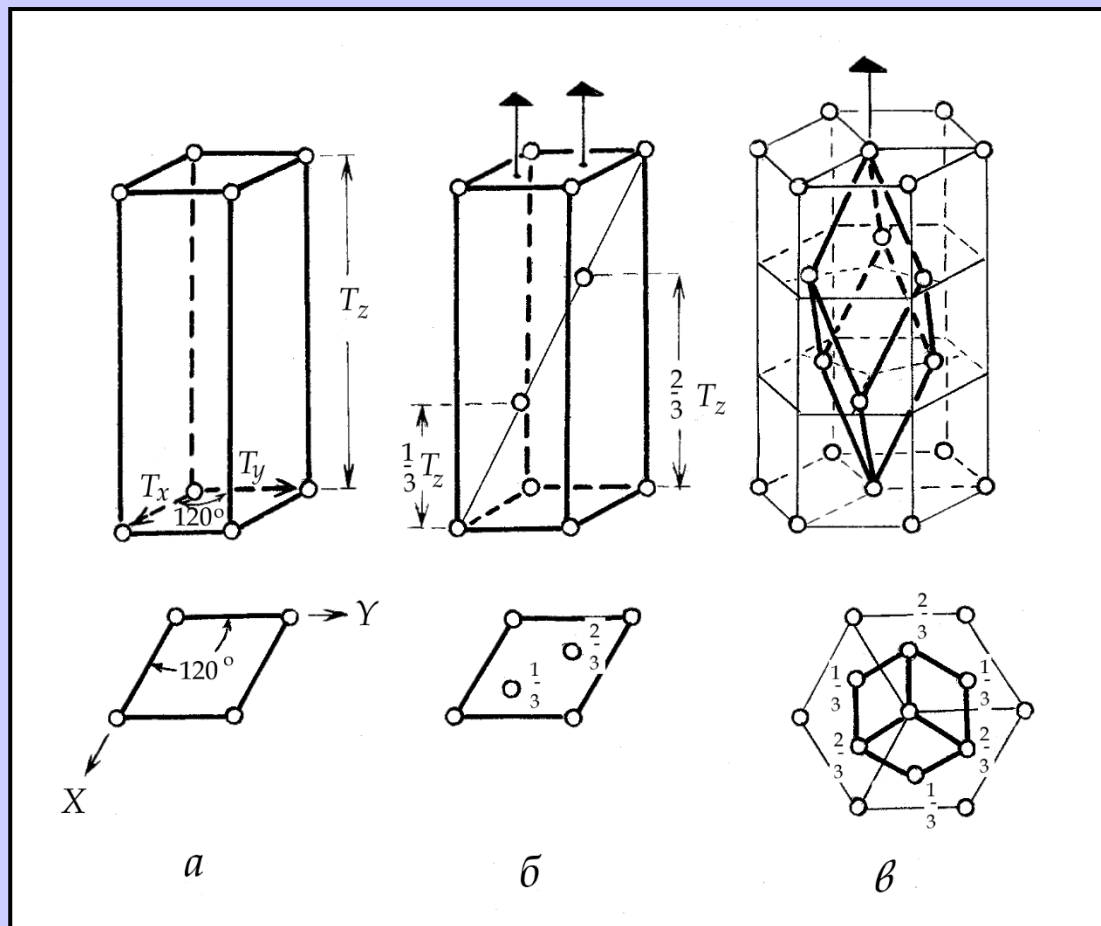


Симметрия  
позиции  
не  
соответствует  
симметрии  
вершинного  
узла

ИТОГО:  $1+12=13?$

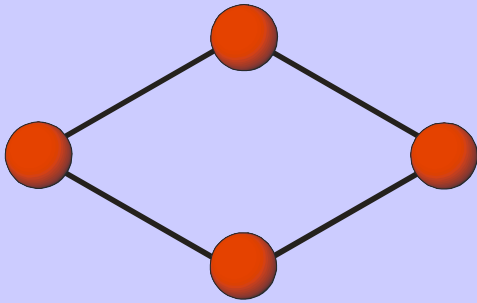
# Ячейки Браве гексагональной сингонии:

*a* – примитивная (*P*), *б* – дважды **объемноцентрированная** (ромбоэдрическая) *R* и ее примитивный параллелепипед – **ромбоэдр** (*в*)

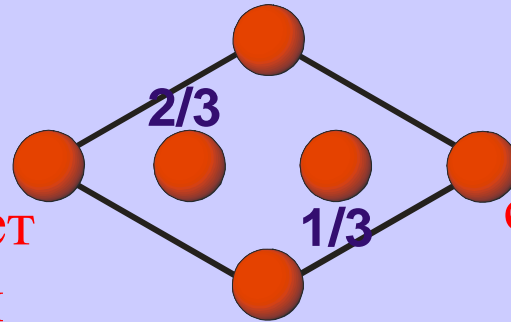


# Гексагональная сингония

Примитивная <i>P</i> - ячейка	Базо (боко- центрированная) <i>C</i> - ячейка ( <i>A</i> , <i>B</i> )	Объемно центрированная <i>I</i> - ячейка	Гране- центрированная <i>F</i> - ячейка
----------------------------------	---	--	---



Симметрия  
позиции  
не  
соответствует  
симметрии  
вершинного  
узла

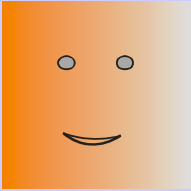


Симметрия  
позиции  
не  
соответствует  
симметрии  
вершинного  
узла

ИТОГО:  $2+12=14$

Сингония	Тип решетки				
	примитивная $P$	базоцентрированная $C(A, B)$	объемноцентрированная $I$	гранецентрированная $F$	дважды объемноцентрированная (ромбоэдрическая) $R$
Триклинная					
Моноклинные					
Ромбоэдрическая					
Тетрагональная					
Гексагональная					
Кубическая					

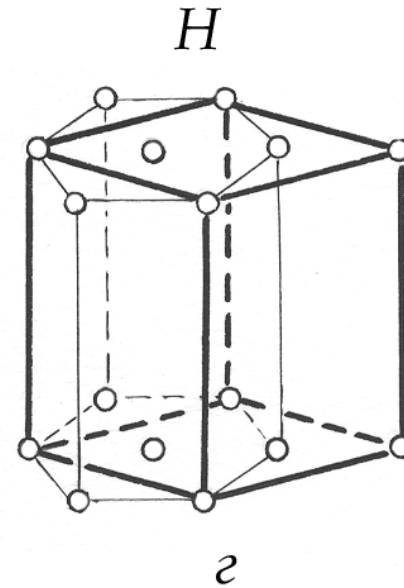
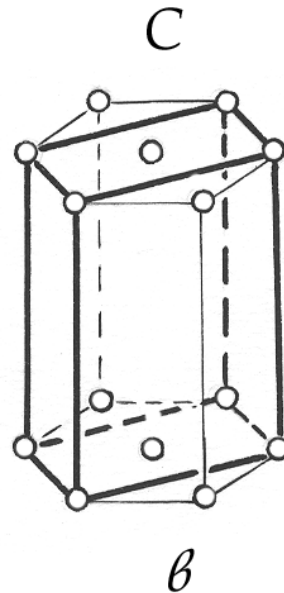
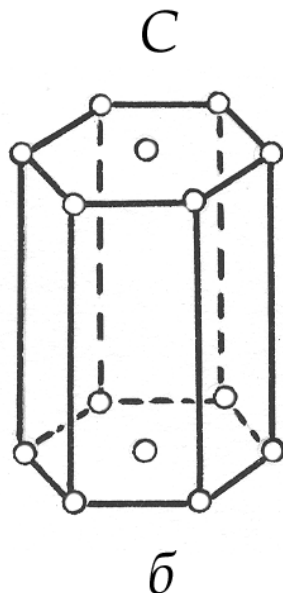
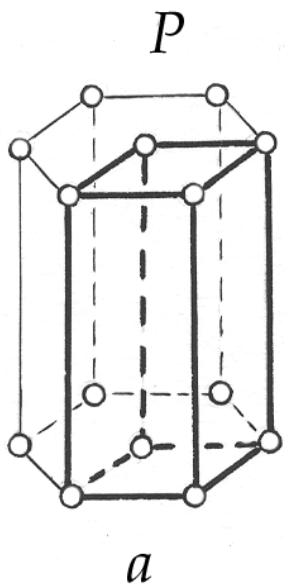
14 ячеек  
Браве,  
соответствующих  
14 решеткам  
Браве

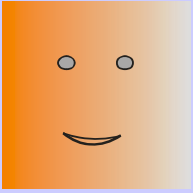


# Атавизмы

Различный выбор элементарных ячеек в решетке  
гексагональной симметрии:

$a$  – примитивная ячейка Браве ( $P$ ),  $б$  – гексагональная  
базоцентрированная призма ( $C$ ),  $в$  – базоцентрированная  
ортогональная ячейка ( $C$ ),  $г$  – дважды базоцентрированная  
ячейка ( $H$ )





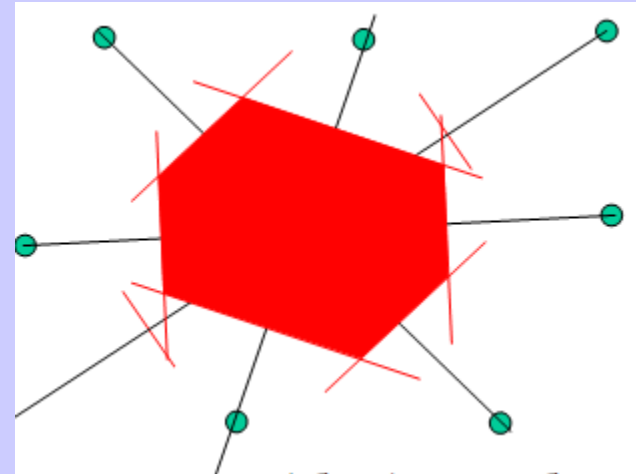
## *Надо знать (пригодится позже)*

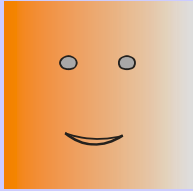
В физике твердого тела особое значение имеет примитивная ячейка Вигнера-Зейтца, которая конструируется следующим образом (*в кристаллохимии это называется по другому – полиэдры Вороного-Дирихле*)

- (а) Строятся линии, соединяющие ближайшие узлы решетки
- (б) проводим перпендикуляры к этим линиям в их середине
- (в) Многогранник наименьшего объема - ячейка Вигнера-Зейтца

Ячейка Вигнера-Зейтца имеет тот же объем, что и обычная примитивная ячейка и содержит 1 узел. Если подвергнуть эту ячейку трансляциям, определяемым всеми векторами решетки, то она заполнит все пространство без перекрытия и разрывов.

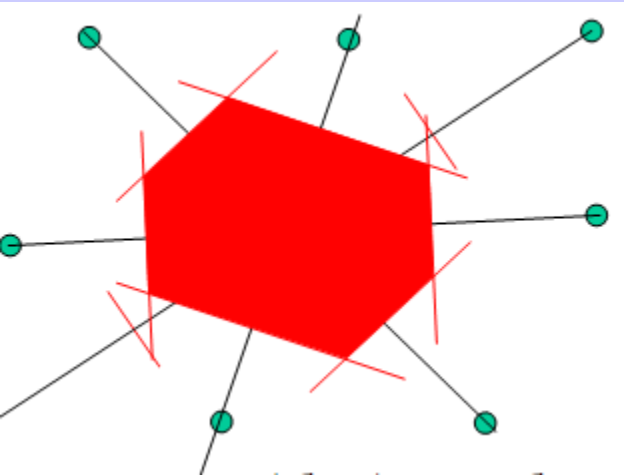
*Симметрия ячейки Вигнера-Зейтца такая же, как и у соответствующей ячейки Браве!*





# Надо знать (пригодится позже)

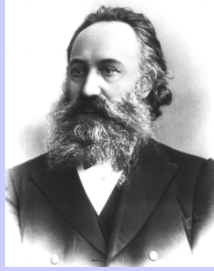
Другие названия такого разбиения - *области Дирихле* для плоскости (по имени немецкого математика Йохана Петера Густава Лёжена Дирихле (1806-1859)). Для пространства такие области были впервые построены русским математиком Георгием Феодосьевичем Вороным (1868-1908), и поэтому они обычно называются *областями Вороного – Дирихле*. Разбиение Вороного пространства на «области влияния» играет огромную роль в практических задачах.



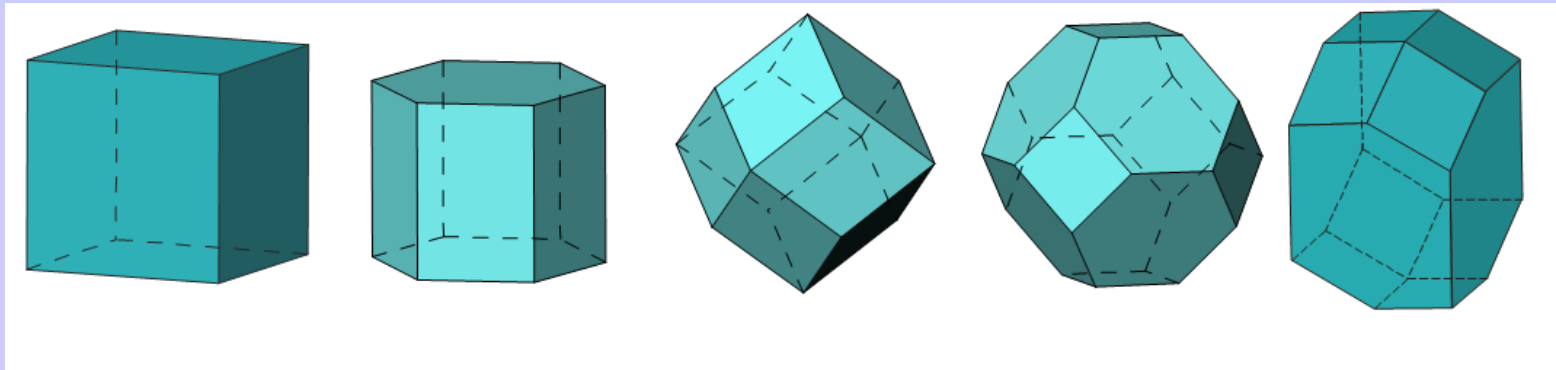
Например, если множество точек  $p$  будет соответствовать атомным позициям в кристаллической структуре, то вершины многогранников Вороного указывают расположение пустот, максимально комфортных для вхождения атомов другого сорта.



# Разбиения на основе параллелоэдров Федорова



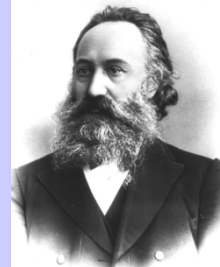
На рубеже 19-20 веков Е.С. Федоров создал теорию **параллелоэдров** - одинаковых выпуклых многогранников, заполняющих пространство в параллельном положении и имеющих попарно равные и параллельные грани. Последние могут быть как четырех-, так и шестиугольными. Федоров показал, что базовыми являются пять основных параллелоэдров с тремя (куб), четырьмя (гексагональная призма), шестью (ромбододекаэдр и многогранник с четырьмя шестиугольными и восемью ромбическими гранями) и семью (кубооктаэдр) парами параллельных граней



Пять основных параллелоэдров Е. С. Федорова: *a* – куб; *b* – гексагональная призма; *c* – ромбододекаэдр; *g* – кубооктаэдр. *d* – многогранник с четырьмя шестиугольными и восемью ромбическими гранями



# Разбиения на основе параллелоэдров Федорова (фонетическая пауза)



Шла Саша по шоссе и сосала  
сушку. Для тех, кто не может  
выговорить: Продвигалась  
Александра по автомагистрали  
и ела хлебобулочное изделие



**ДЕТЯМ ЗНАТЬ**  
**ПОЛОЖЕНО**  
**АЗБУКУ**  
**ДОРОЖНУЮ**

На **д**воре **т**рава, на **т**раве **д**рова.

**О**т **т**опота **к**опыт **п**ыль по полю **л**етит.

Рододендроны из дендрария.

**Т**кет **т**кач **т**кани на платки **Т**ане.





# Разбиения Делоне



Предложил классифицировать пространственные решетки в зависимости от строения многогранника Вороного-Дирихле узла решетки и расположения этой области относительно элементов симметрии.

Каждый многогранник Вороного-Дирихле можно охарактеризовать количеством вершин, ребер, граней и их взаимным расположением (топология многогранника).

Делоне подтвердил вывод Федорова, что в 3-х мерном пространстве существует только 5 топологически разных многогранников Вороного-Дирихле. Остальные можно вывести из них путем непрерывного изменения длин ребер и углов между ними.



# Разбиения Делоне



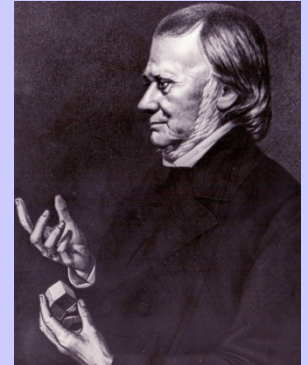
При учете возможной кристаллографической симметрии многогранников получится новая симметрично - топологическая классификация кристаллических решеток. Установленные таким образом **24** различных симметрично - топологических класса кристаллических решеток называются теперь

*сортами решеток Делоне.*

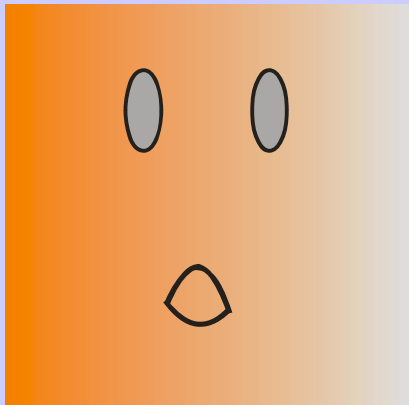
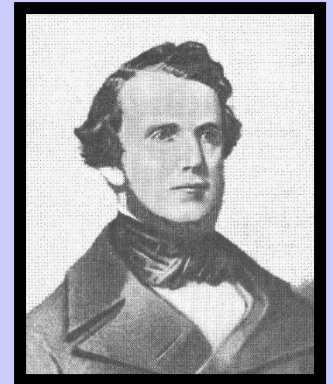


Рис. 2-12. 24 сорта решеток Делоне (согласно Галулину, 1984).

*И. Ф. Х. Гессель (1796-1872 гг.)  
в 1830 г. вывел 32 класса симметрии*



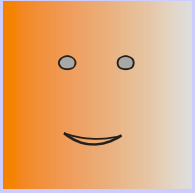
*В 1855 г. О. Браве вывел 14 типов  
пространственных решеток*



$$32 + 14 = ???$$

$$32 * 14 = ???$$

$$32 \leftrightarrow 14 = ???$$



# Волшебная арифметика

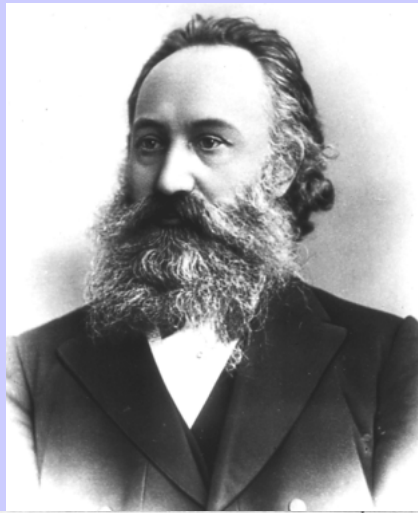
14 решеток



32 класса

=

230 пространственных групп!

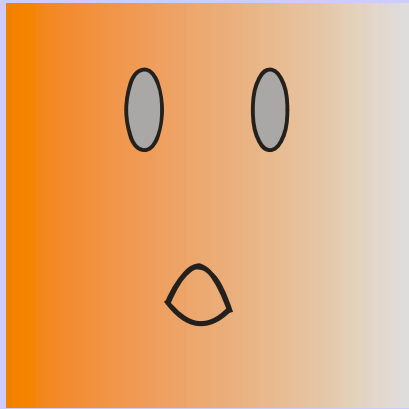


В 1890 г. русский кристаллограф **Евграф Степанович Федоров**



и независимо от него немецкий математик **Артур Шенфлис** вывели 230 геометрических законов, которым должно подчиняться расположение частиц в кристаллических структурах.

К чести Шенфлиса, он признал приоритет Федорова в этом открытии, которое по своему значению может быть поставлено в один ряд с открытием Периодического закона.



$$32 + 14 = 230!$$

*Был точечный набор (А)*

*Была трансляция (Б)*

*(А) И (Б) сидели на трубе...*

*И - что это?*

***И** - займемся с геохимиками  
после нового года!*

Взаимодействие 32 классов точечной симметрии с 14 трансляционными решетками Браве приводит к возникновению особых **волшебных** (трансляционных) элементов симметрии и в конечном счете к 230 пространственным группам *симметрии микромира*



( 2 семестр у геохимиков)

# ОСНОВЫ КРИСТАЛЛОГРАФИЧЕСКОЙ МАГИИ





**В следующий раз**  
**Кристаллический мир**  
**в полиэдрах**



**Теория плотнейших упаковок,**  
**ее использование для описания**  
**кристаллических структур**

