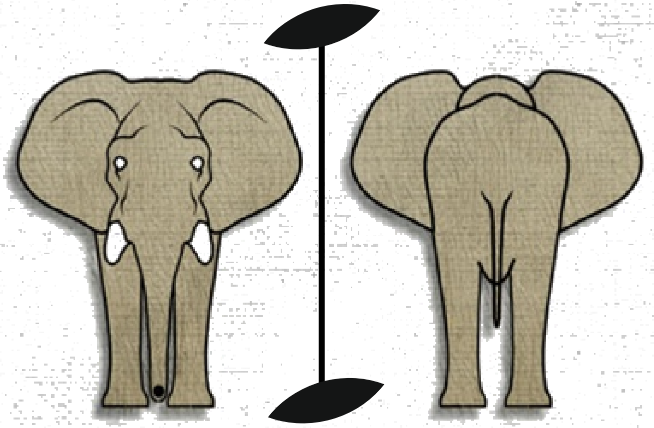
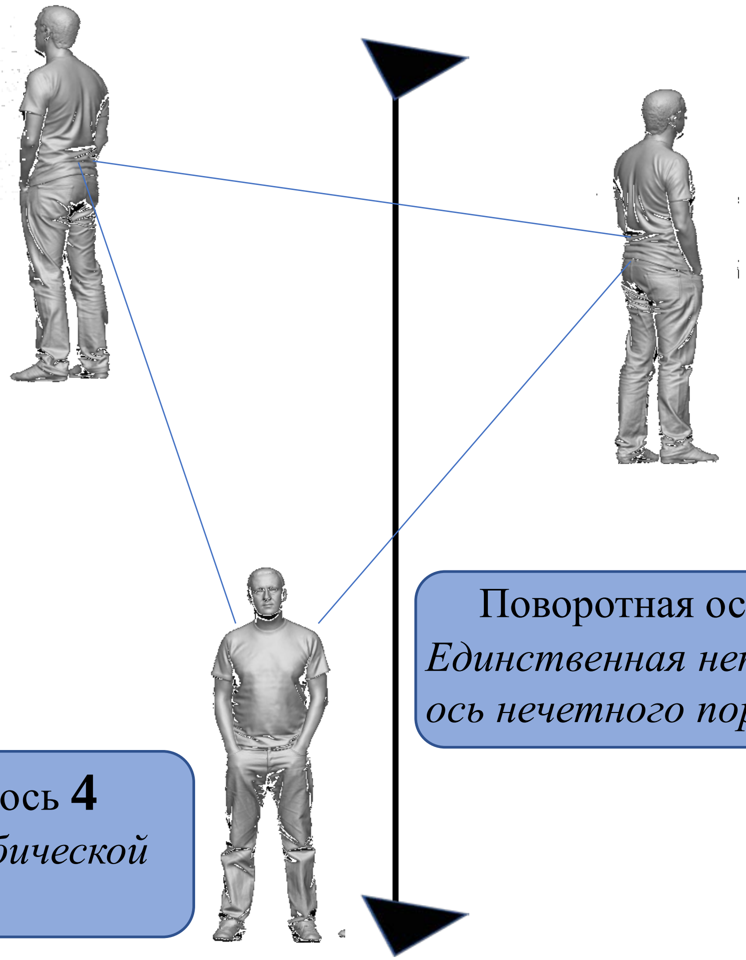
Взаимодействие элементов симметрии.

ЗАКРЫТЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ СИММЕТРИИ. ПРОСТЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ. ОСОБЕННОСТИ

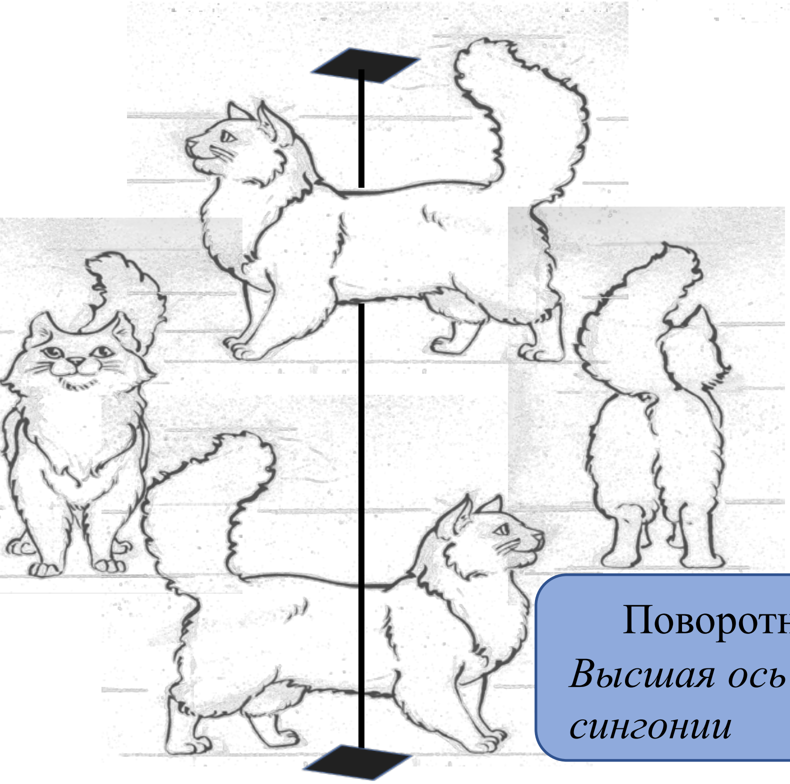
Поворотная ось **1**
Тривиальная ось



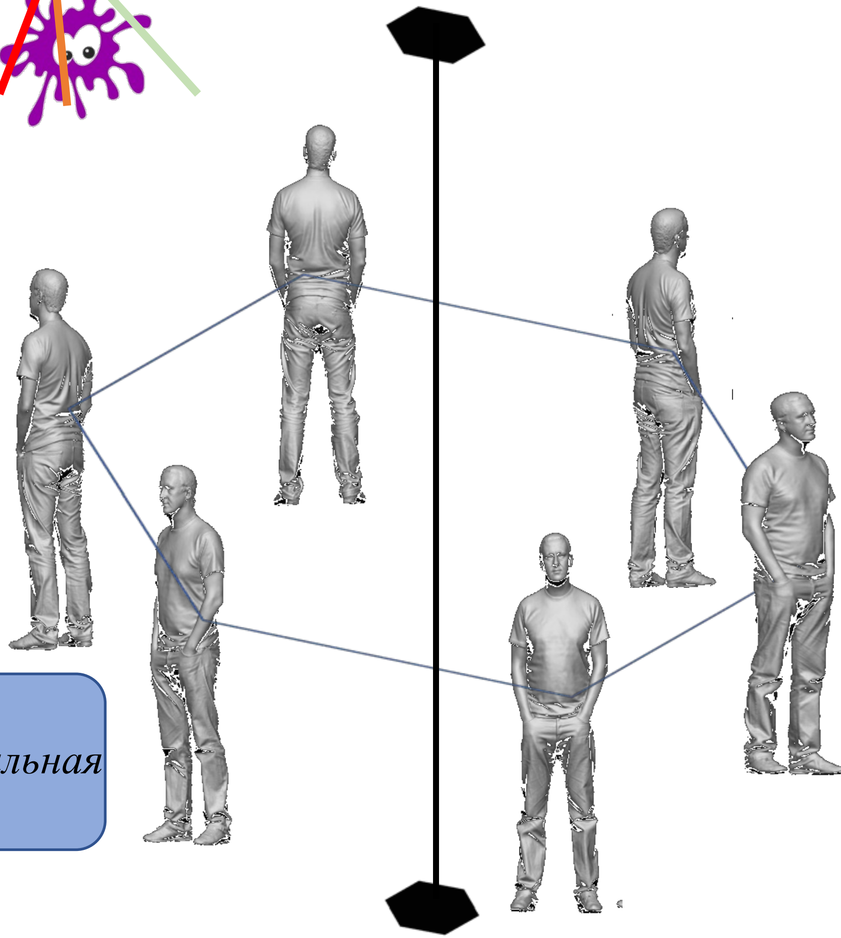
Поворотная ось **3**
Единственная нетривиальная низшая ось



Поворотная ось **3**
Единственная нетривиальная ось нечетного порядка!



Поворотная ось **4**
Высшая ось кубической сингонии

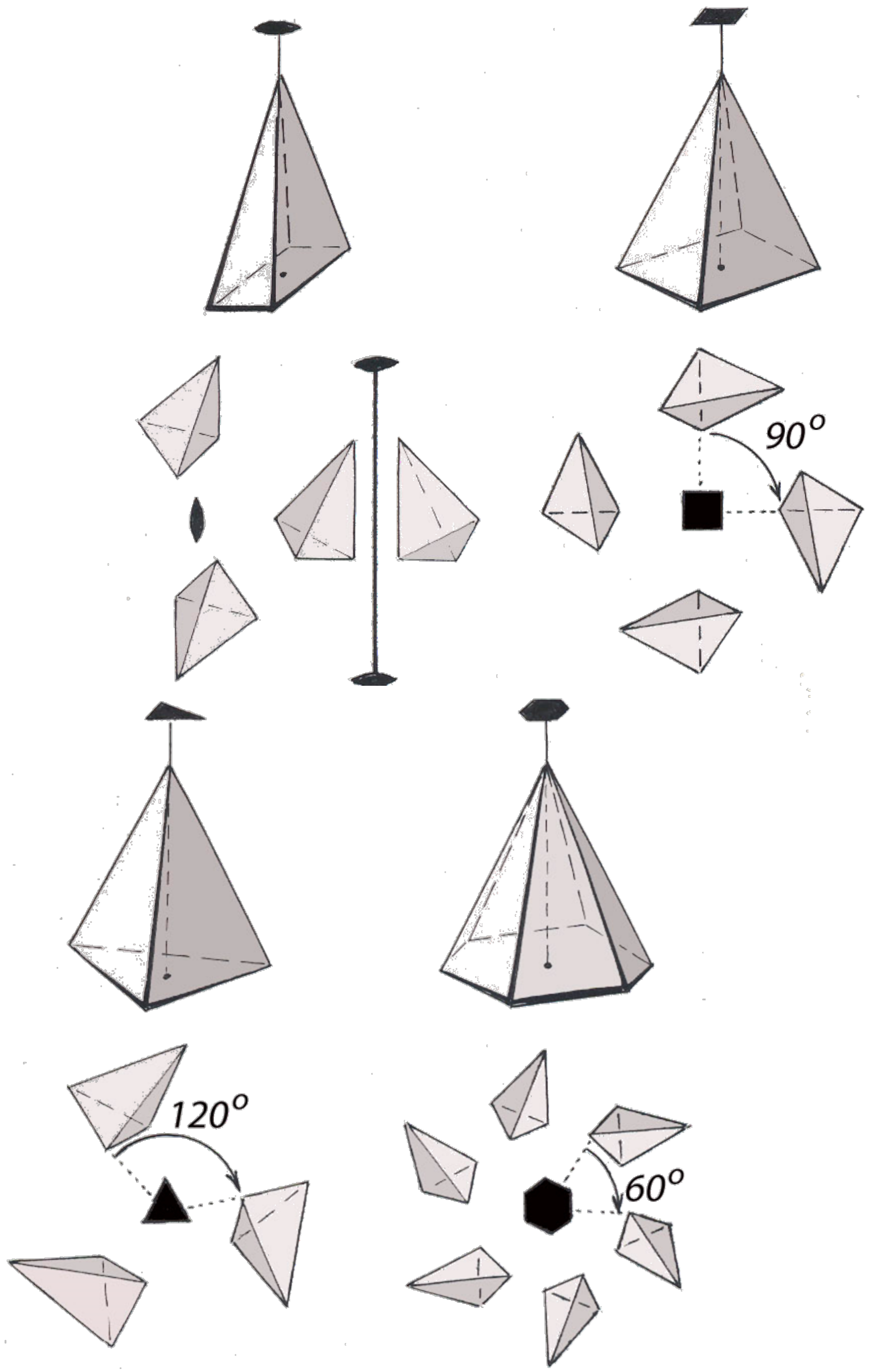


Поворотная ось **6**
Не совместима с осями высших порядков!

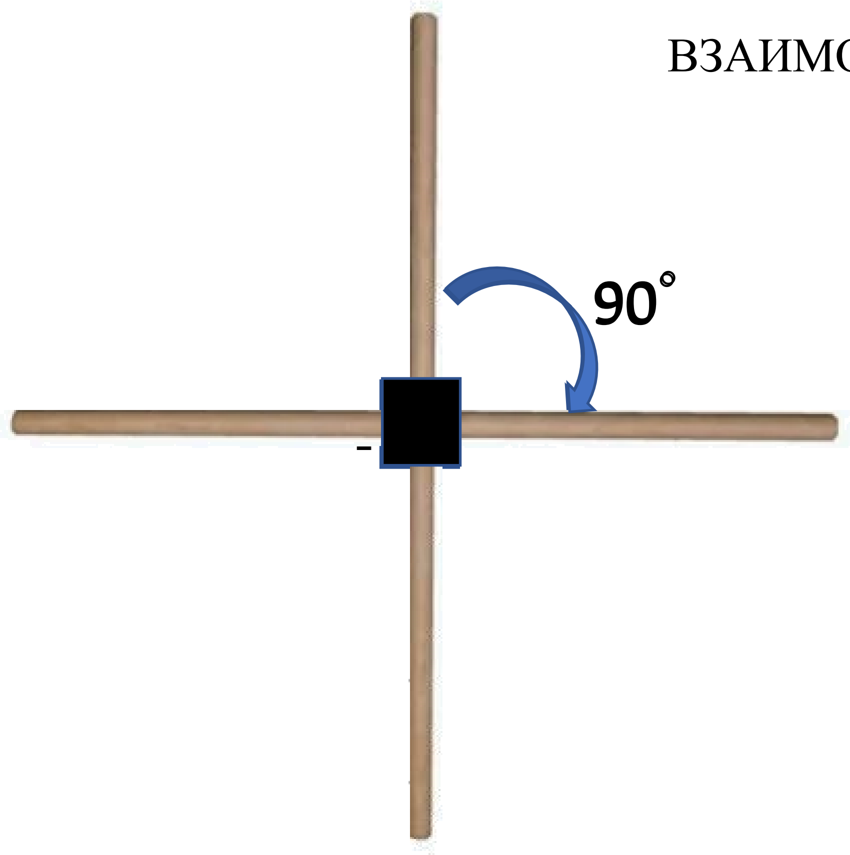
К простыми закрытым элементам симметрии относятся *только поворотные оси*

ПРОСТЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ СИММЕТРИИ

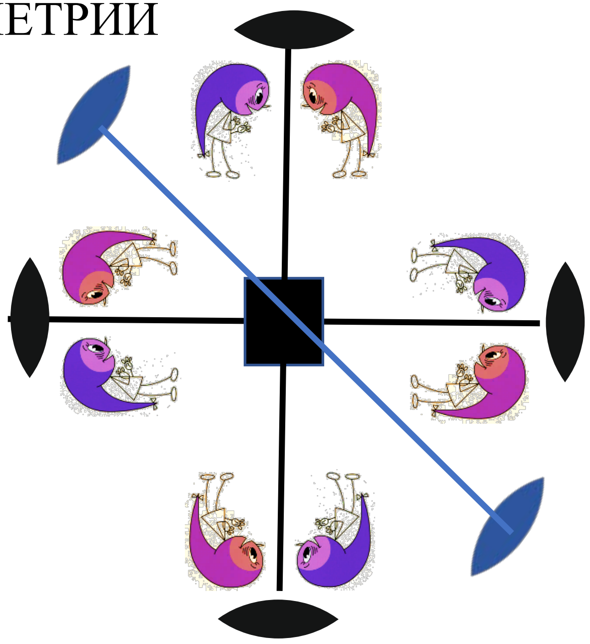
№	Эл. симм	Гр. знак	n	α	I/II род	Низш/ высш	Величина симм.
1	1	-	1	360°	I	Низш.	1
2	2	⬮	2	180°	I	Низш.	2
3	3	▲	3	120°	I	Высш.	3
4	4	■	4	90°	I	Высш.	4
5	6	⬢	6	60°	I	Высш.	6



ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЗАКРЫТЫХ ЭЛЕМЕНТОВ СИММЕТРИИ



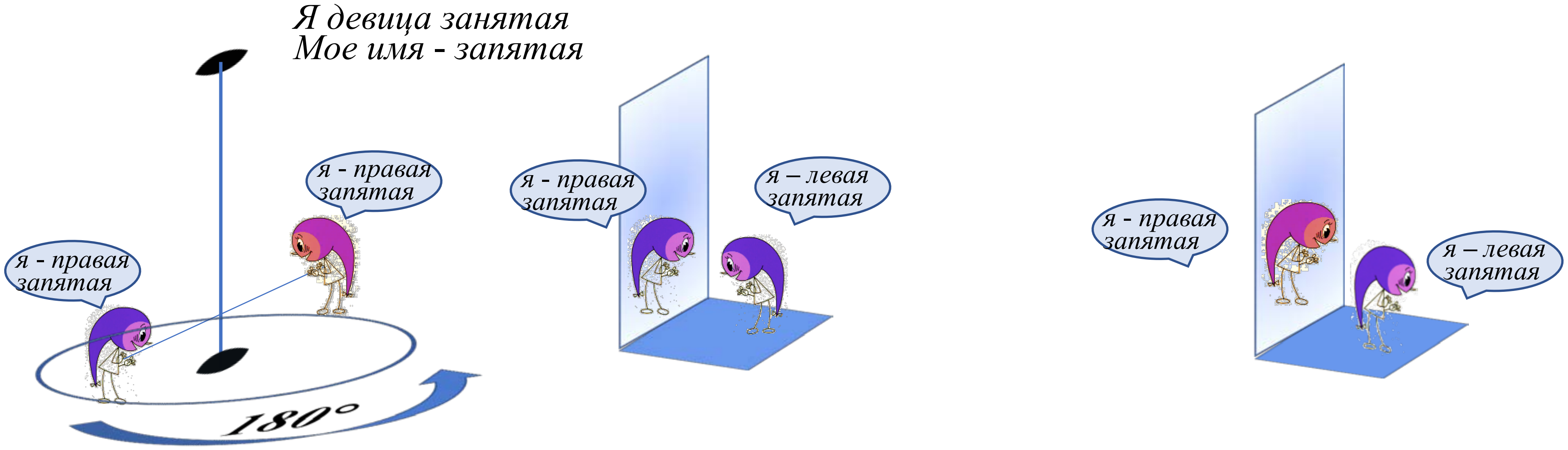
Модельный способ наглядно показывает, что пересечение оси L_4 и L_2 вызывает появление дополнительной оси 2-ого порядка L_2



Взаимодействие осей 2-ого порядка, поворотных или инверсионных приводит к появлению новой оси с элементарным углом поворота вдвое большим, чем угол пересечения порождающих элементов симметрии. Если исходные элементы однородны, то возникающая ось – поворотная, разнородны зеркально-поворотная или инверсионная.


Приключения запятой и точки
в микромире
Жил-был лентяй Борис.
Однажды сидел он за столом, пил молоко и разглядывал диктант.
Не откладывай на завтра то, что можно сделать сегодня.
А а Б б
В в Г г
На другой день Борис пришел в класс и сказал учительнице, что она не заметила его знаков препинания, и стал просить исправить в диктанте двойку...
Переверни эту

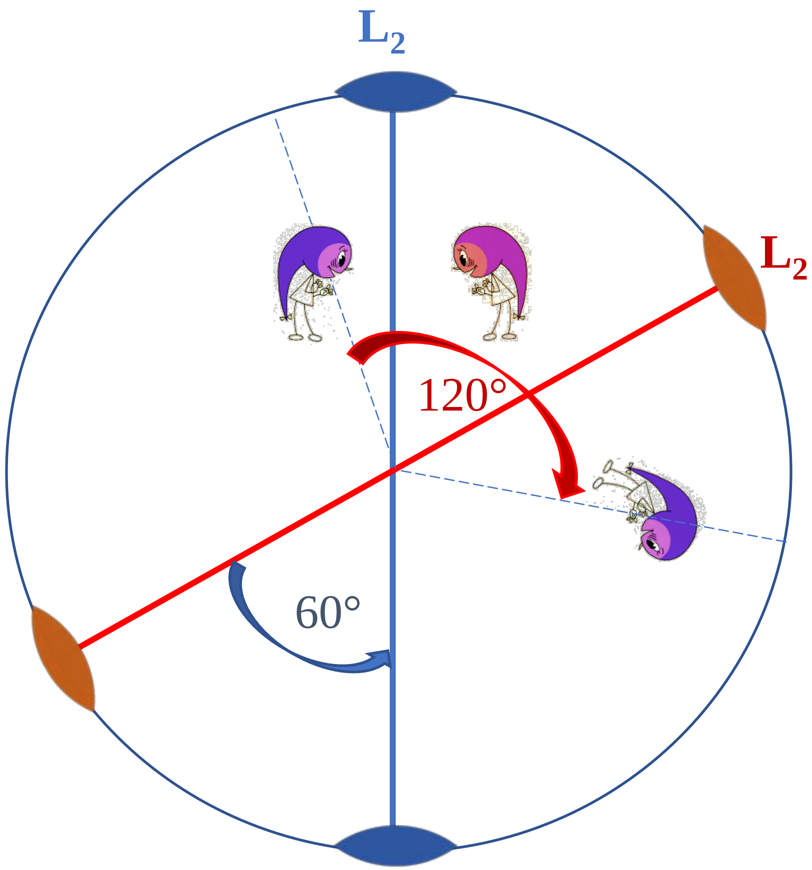
В качестве модельной фигурки для демонстрации операций симметрии будем использовать вот такую запятую из мультфильма

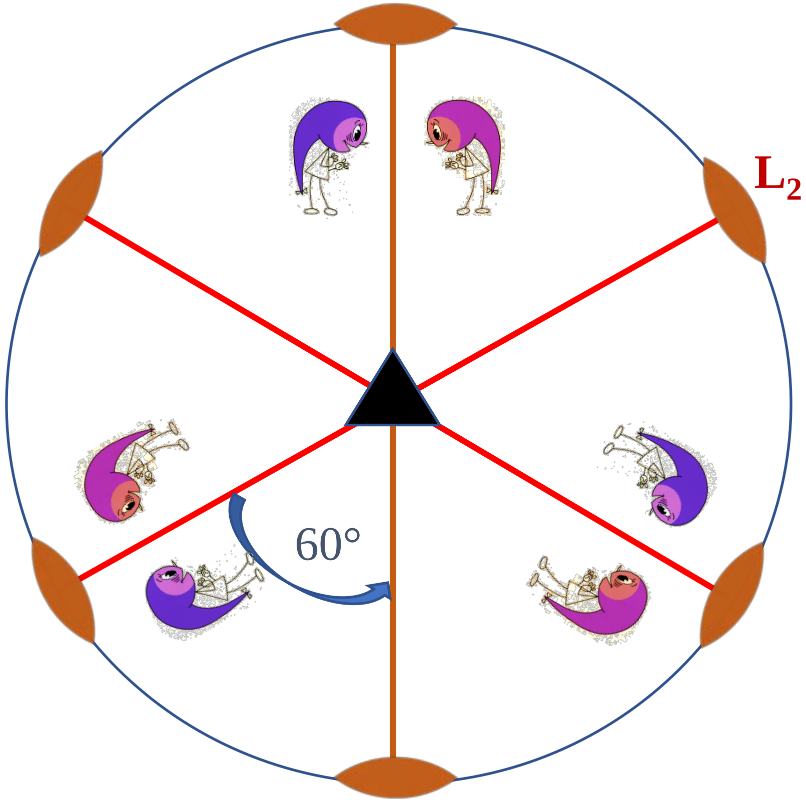


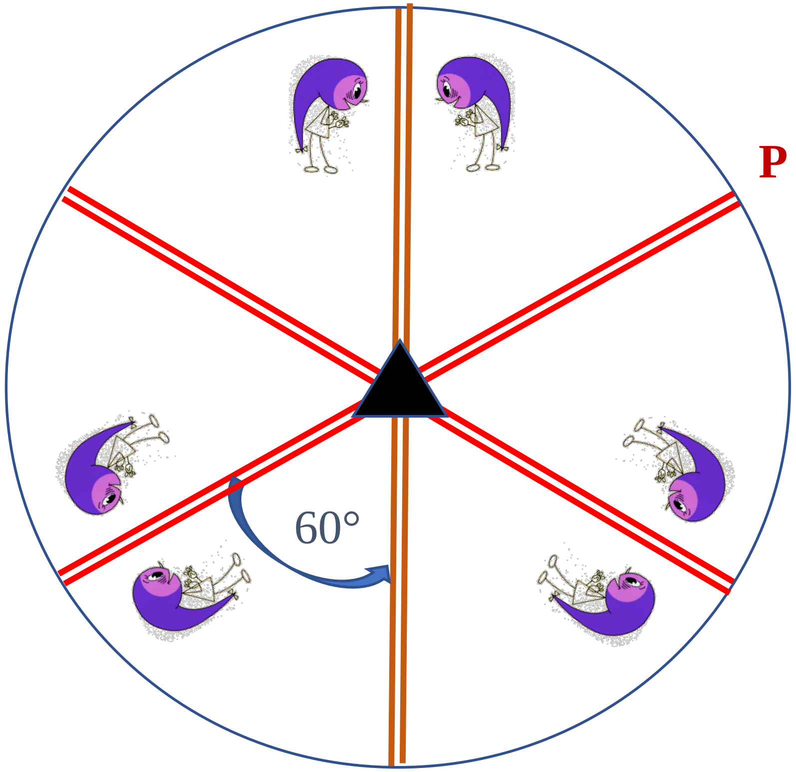
Что бы такая запятая не обладала никакими нетривиальными элементами симметрии, две ее стороны выкрашены в разные цвета

Плоскости P или оси второго порядка L_2 пересекаются под углом 60°

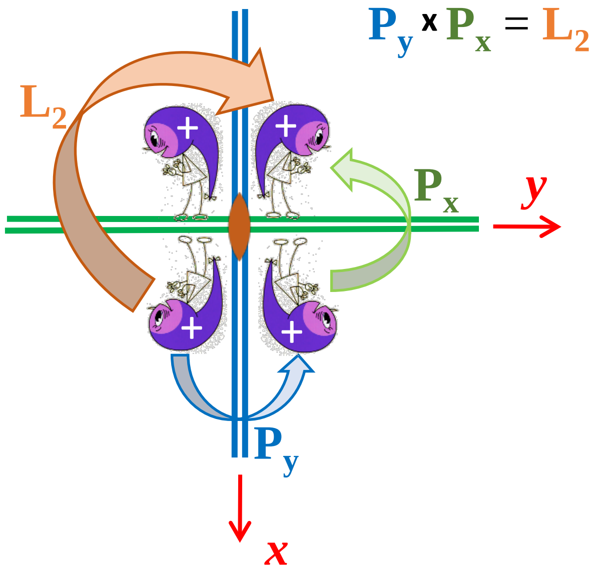
$L_2 \times L_2 = L_3$

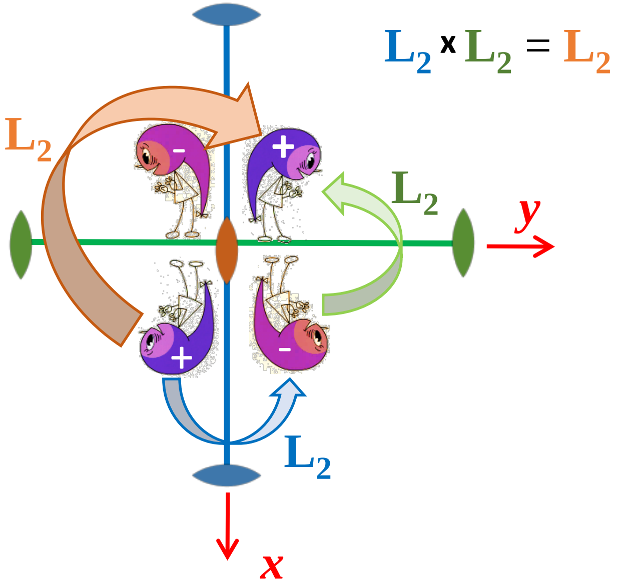






Плоскости P или оси второго порядка L_2 пересекаются под углом 90°

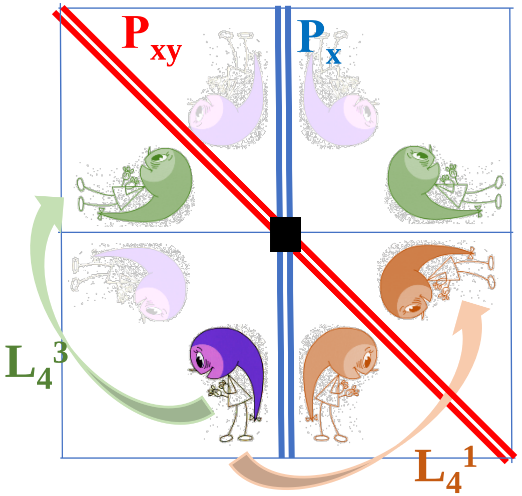




Пересечение плоскостей или осей 2-ого порядка под углом 90° вызывает появление оси 2-ого порядка, проходящей либо по линии пересечения плоскостей, либо через точку пересечения осей перпендикулярно плоскости, в которой лежат порождающие оси

Верно и обратное: плоскость и лежащая в ней ось 2-ого порядка порождают еще одну (неэквивалентную) плоскость под углом 90° к исходной: $P_y \times L_2 = P_x$

Плоскости P или оси второго порядка L_2 пересесекаются под углом 45°

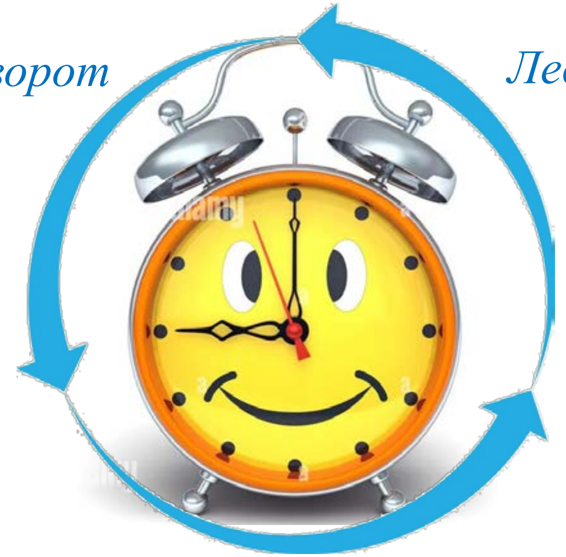


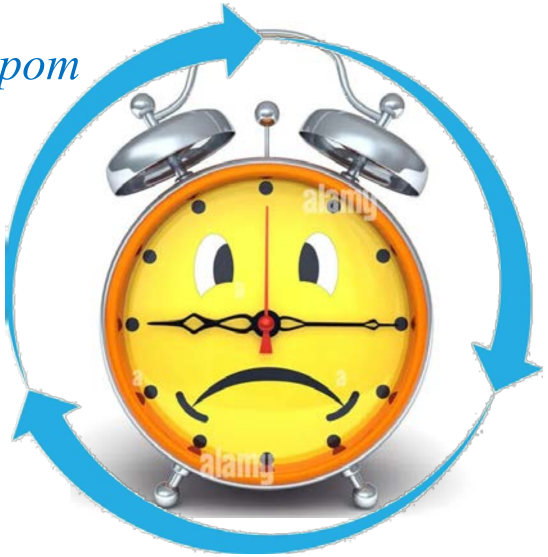
Пересечение плоскостей под углом 45° вызывает появление оси 4-ого порядка. Причем конкретная симметрическая операция зависит от последовательности, в которой проведены отражения:

$P_y \times P_{xy} = L_4^1$ (поворот на 90° *против часовой стрелки*)
$P_{xy} \times P_y = L_4^3$ (поворот на 90 ° *по часовой стрелки* или
3 поворота на 90° *против часовой стрелки*)

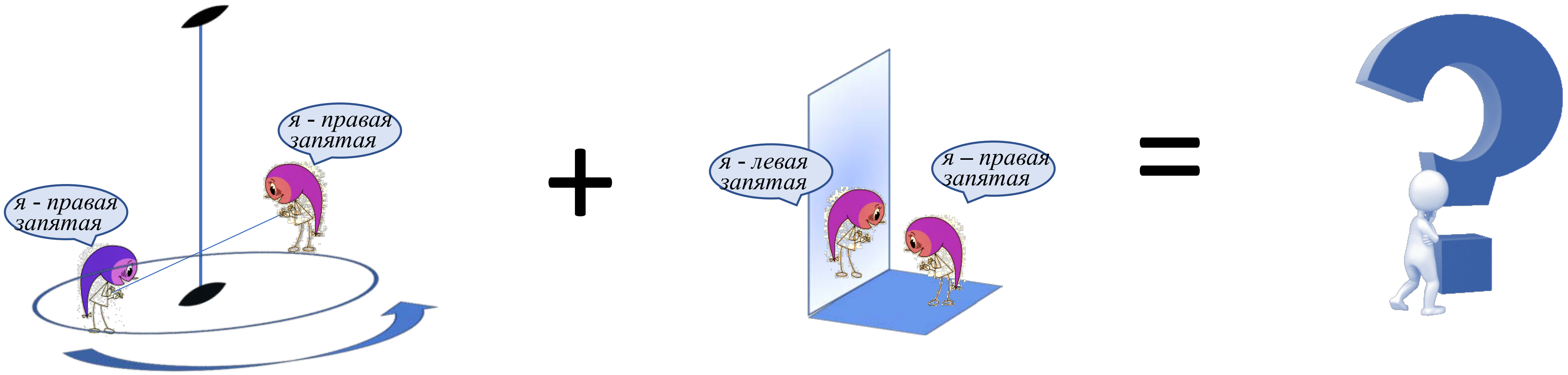
Правый поворот

Левый поворот



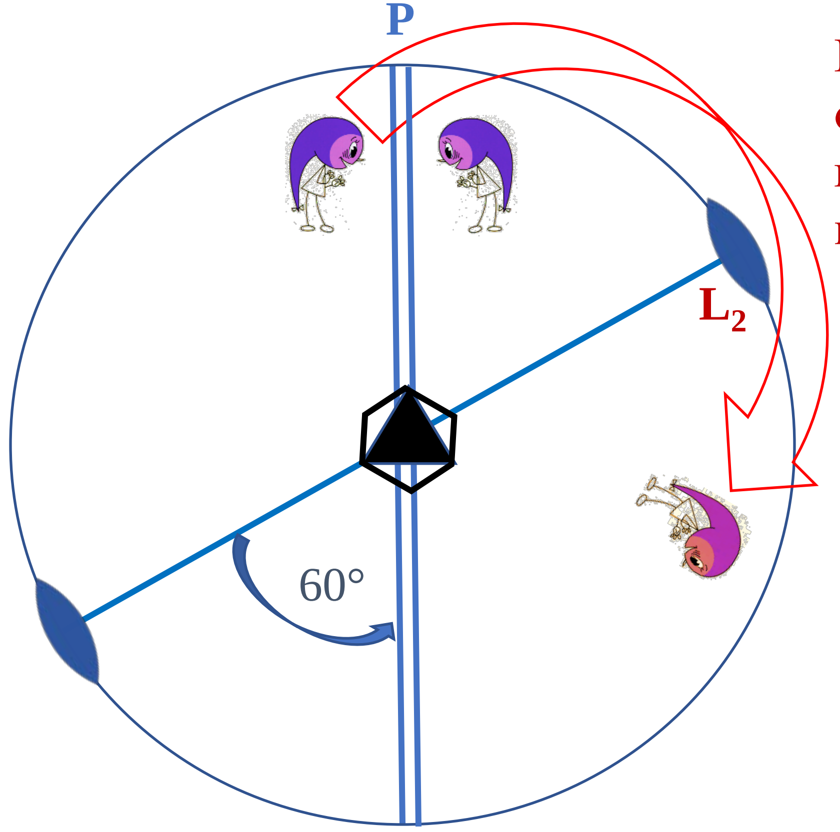


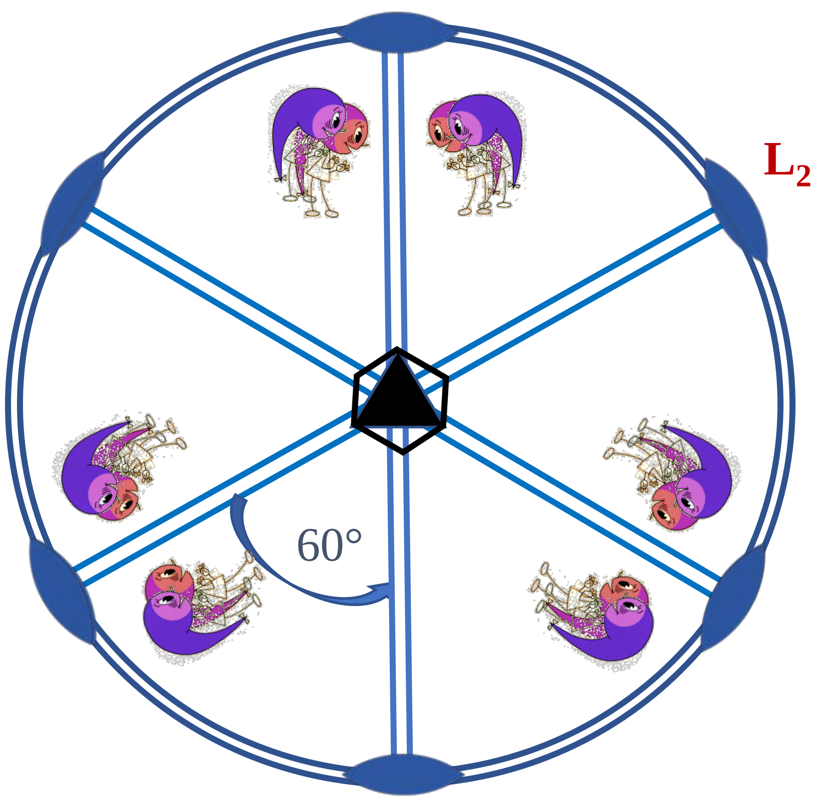
А что будет, если пересекутся ось 2-ого порядка и плоскость?



Правая фигурка при повороте на 180° останется правой (*операция симметрии I рода*). При последующем отражении в плоскости правая фигурка станет левой (*операция симметрии II рода*). Таким образом результирующая операция симметрии – *II рода.*

Плоскостть Р и ось второго порядка L_2 пересесекаются под углом 60°

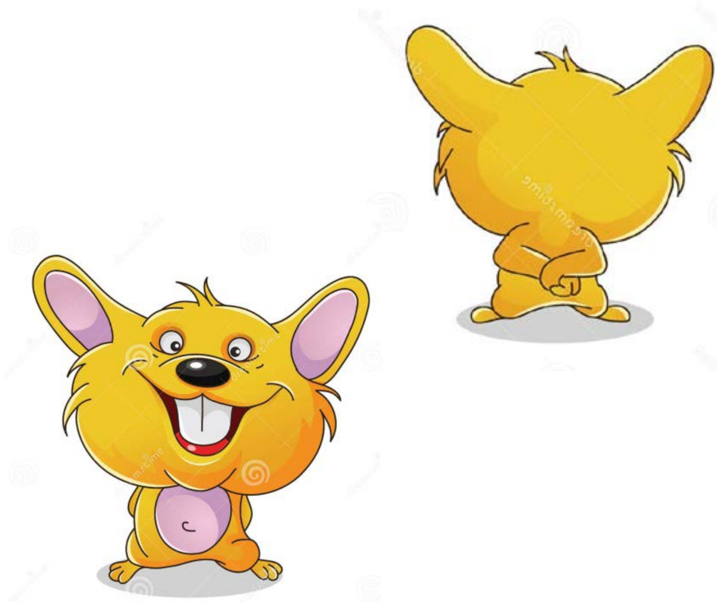




Пересечение оси 2-ого порядка и плоскости под углом 60° вызывает появление зеркальной оси 3-его порядка

К элементам симметрии II-го рода относятся :

зеркальные плоскости

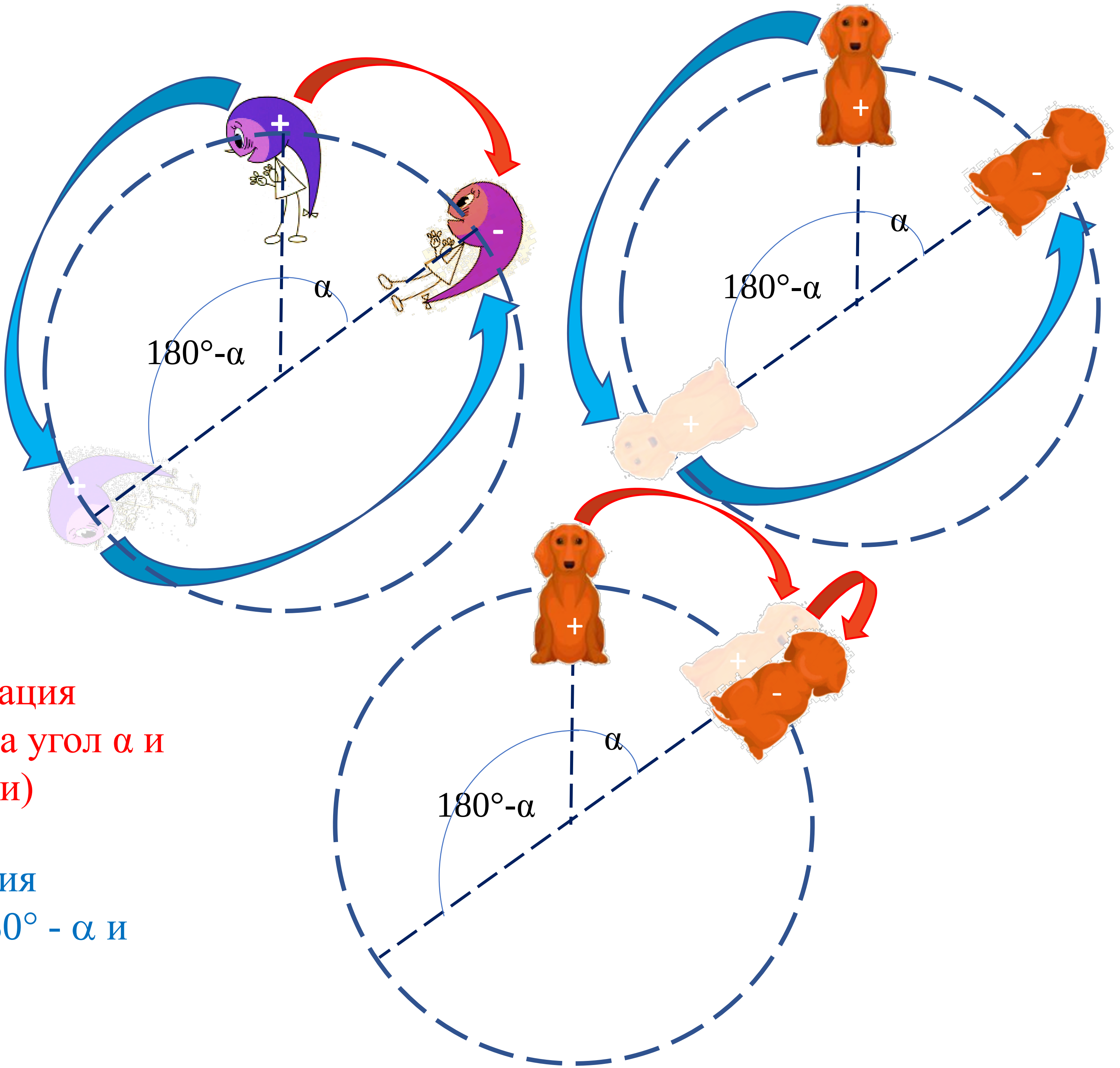


центр инверсии

зеркально-поворотные оси

инверсионные оси

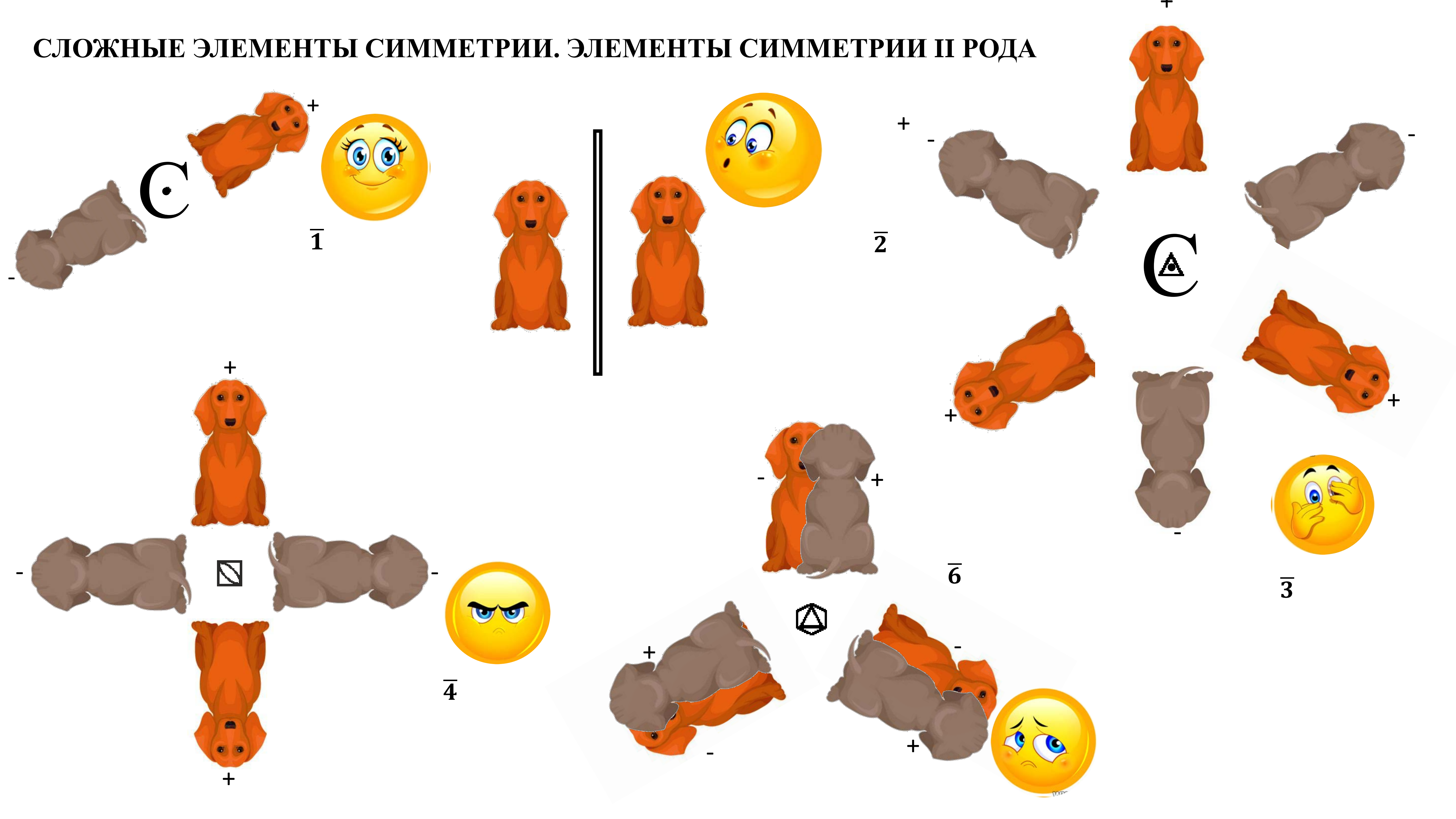
Инверсионные и зеркально-поворотные оси взаимозаменяемы: каждой зеркально-поворотной оси соответствует инверсионная и наоборот.
Операция каждой зеркальной оси с элементарным углом поворота α может быть заменена операцией инверсионной оси с элементарным углом поворота 180° - α



Красными стрелочками показана операция зеркально-поворотной оси (поворот на угол α и отражение в горизонтальной плоскости)

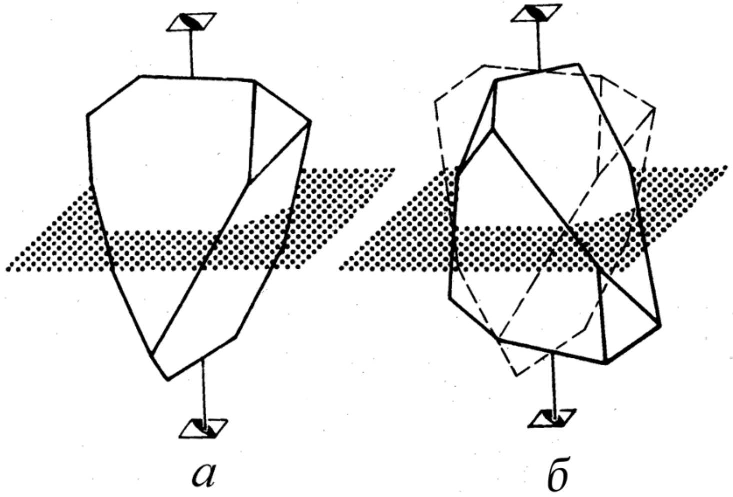
Синими стрелочками показана операция инверсионной оси (поворот на угол 180° - α и отражение в центре инверсии)

СЛОЖНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ СИММЕТРИИ. ЭЛЕМЕНТЫ СИММЕТРИИ II РОДА



ЗАКРЫТЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ СИММЕТРИИ. СЛОЖНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

№	Эл. симм	Гр. знак	n	α/ пов.*	I/II род	Низш/ высш	Вел. симм.**
6	C	○	1	360	II	Низш.	2
7	P	‖	2	180/ 360	II	Низш.	2
8	$\bar{3}$	◬	3	120	II	Высш.	6
9	$\bar{4}$	⧄	4	90/ 180	II	Высш.	4
10	$\bar{6}$	⬡	6	60/ 120	II	Высш.	6



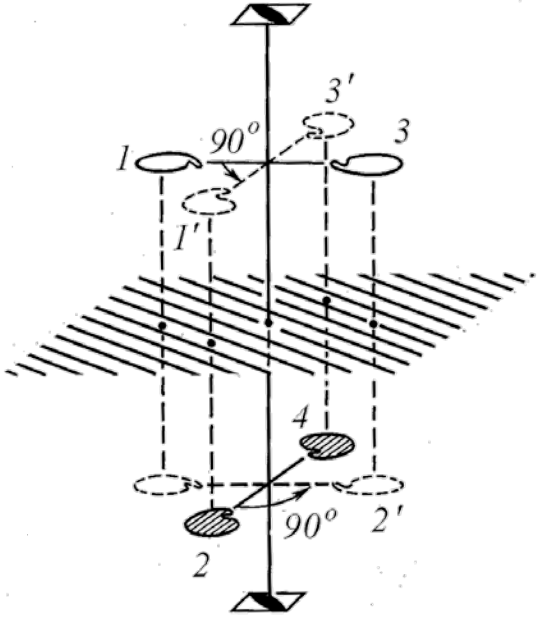
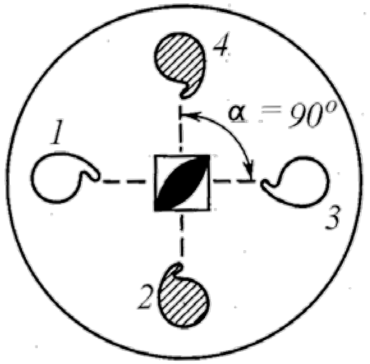


Иллюстрация действия зеркально-поворотной (инверсионной) оси 4-го порядка

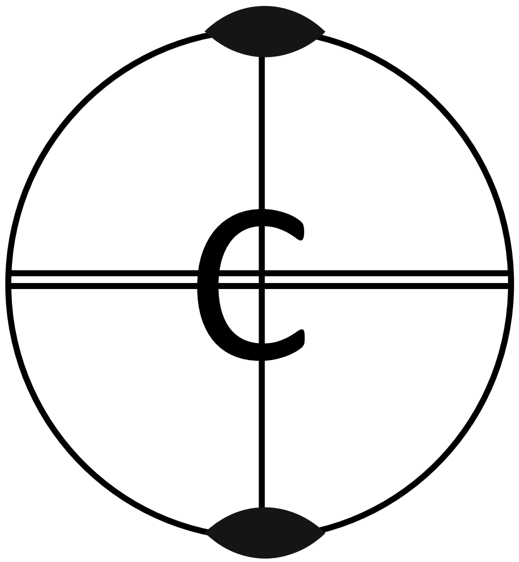
$\bar{L}_4$



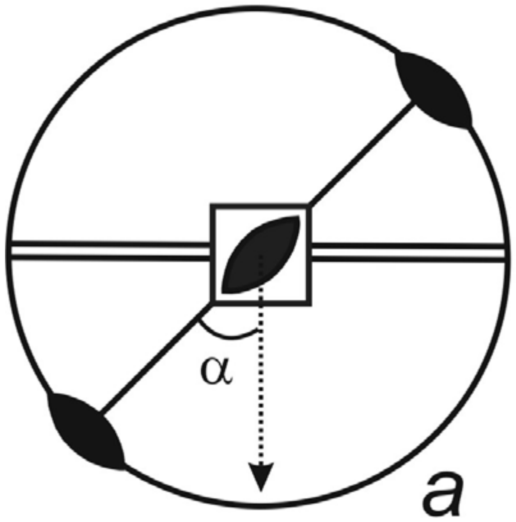
*Для осей нечетного порядка элементарный угол поворота равен минимальной поворотной составляющей, а для осей четного – вдвое больший.

**А величина симметрии наоборот: для осей четного порядка соответствует порядку, а для нечетных – вдвое большая.

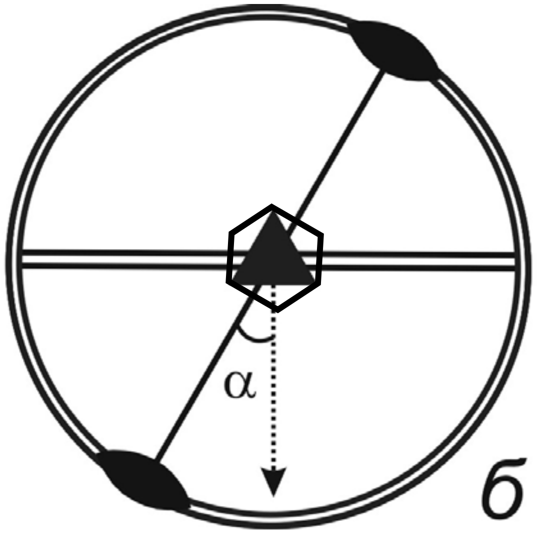
Наиболее важные случаи взаимодействия разнородных элементов симметрии



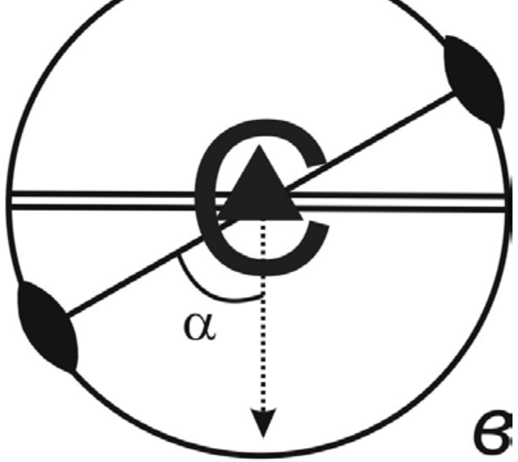
Пересечение оси 2-ого порядка и плоскости под углом 90° всегда порождает центр инверсии



Пересечение оси 2-ого порядка и плоскости под углом 45° всегда порождает инверсионную ось 4-ого порядка



Пересечение оси 2-ого порядка и плоскости под углом 60° всегда порождает инверсионную ось 6-ого порядка



Пересечение оси 2-ого порядка и плоскости под углом 30° всегда порождает инверсионную ось 3-ого порядка

ОБЩЕЕ ПРАВИЛО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ОСЕЙ НИЗШЕГО ПОРЯДКА

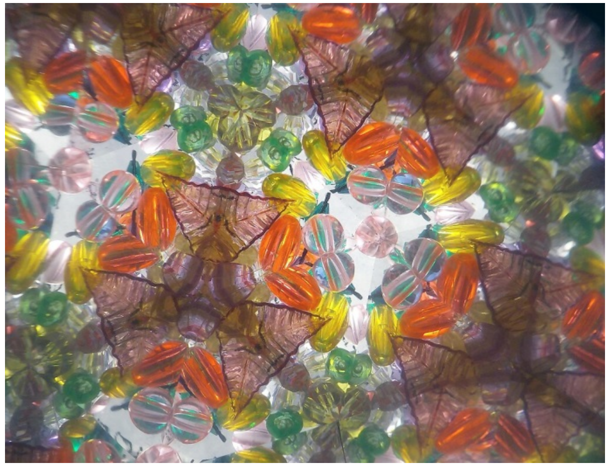
Взаимодействие осей 2-ого порядка, поворотных или инверсионных приводит к появлению новой оси с элементарным углом поворота вдвое большим, чем угол пересечения порождающих элементов симметрии. Если исходные элементы однородны, то возникающая ось – поворотная, разнородны зеркально-поворотная или инверсионная.

$$L_2 \times L_2 = L_{n=360°/2\alpha} \qquad L_2 \times P = \text{Ł}_{n=360°/2(180-\alpha)}$$

$$P \times P = L_{n=360°/2\alpha} \qquad P \times L_2 = \mathring{L}_{n=360°/2\alpha}$$

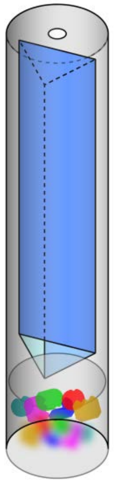
где α- угол пересечения между исходными элементами симметрии,
определяющий порядок результирующей оси

Любую операцию симметрии можно представить последовательным отражением в плоскостях



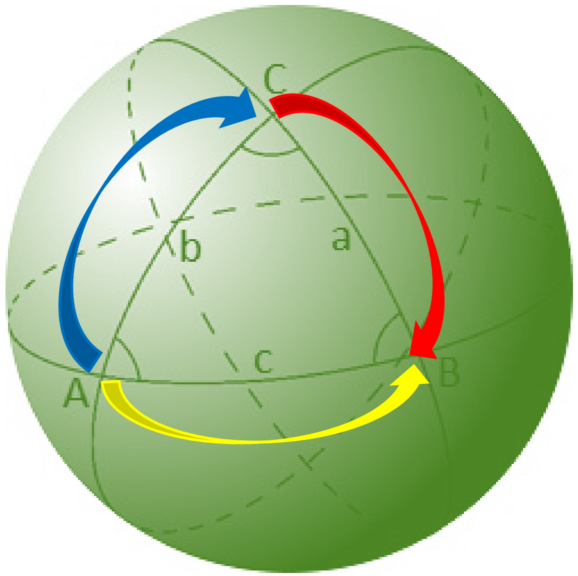
Поворот на сколько?

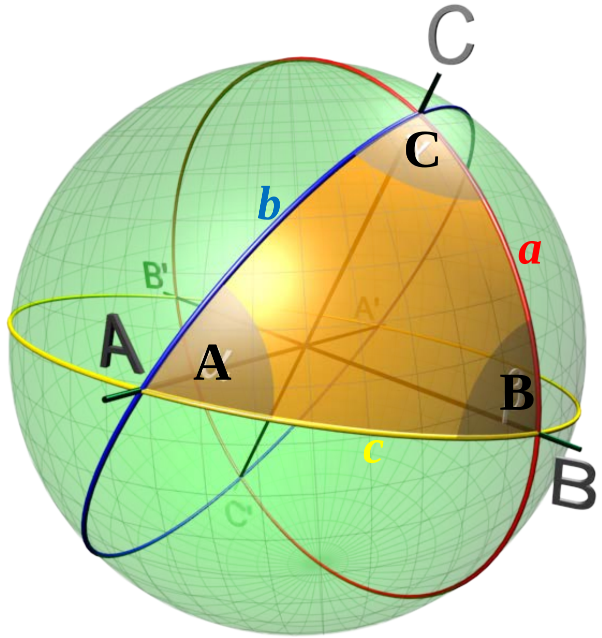
Поворот на сколько?



Поворот на 120 можно заменить последовательным отражением в двух пересекающихся под углом 60 плоскостях

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЗАКРЫТЫХ ЭЛЕМЕНТОВ СИММЕТРИИ В АСПЕКТЕ СФЕРИЧЕСКОЙ ТРИГОНОМЕТРИИ

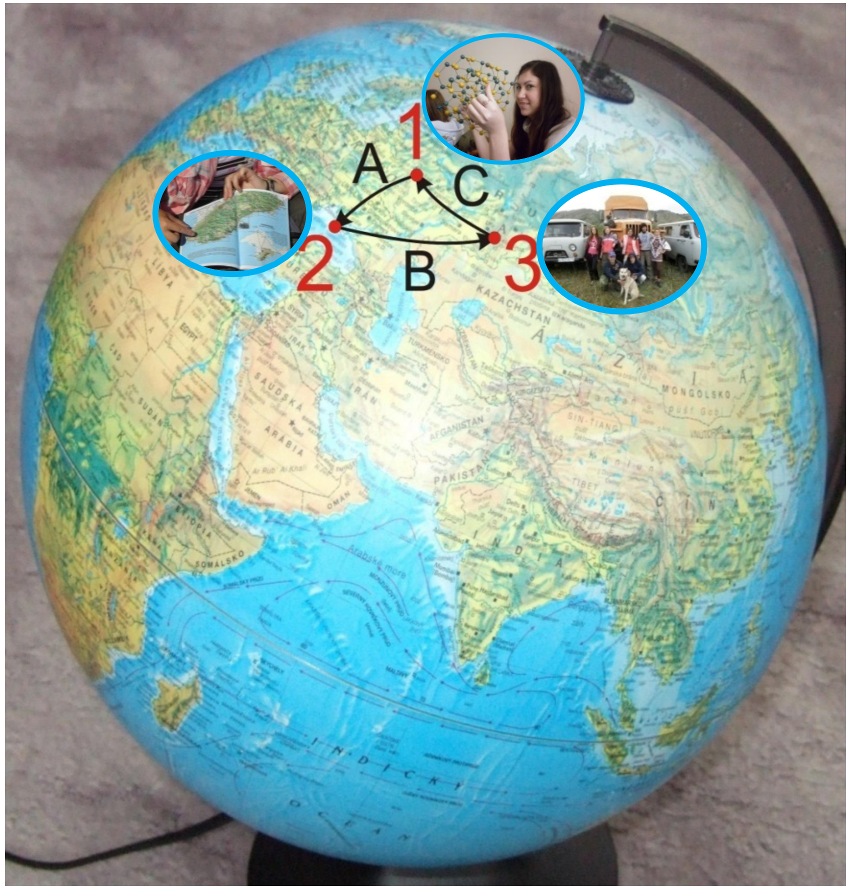




Любое перемещение по сферической поверхности можно представить отрезком окружности максимального диаметра, которая в стереографической проекции превращается в отрезок меридиана Сферическая тригонометрия рассматривает треугольники, стороны которого такие отрезки. Т. е. стороны сферического треугольника – отрезки сферических проекций плоскостей, проходящих через центр сферы. В симметрийном аспекте стороны сферического треугольника отражают поворот вокруг оси, перпендикулярной плоскости данной окружности, а его вершины – выходы поворотных осей n-ого порядка, проходящих по линии пересечения этих плоскостей. Причем угол пересечения вдвое меньше элементарного угла поворота такой оси.

Итак, мы живем в мире волшебных и обычных осей, осуществляющих операцию поворота. При этом объект наблюдения, допустим, точка выхода на сферу линии нормали к грани совершает некоторое путешествие по сфере проекций из точки 1 в точку 2 вокруг некоторой воображаемой оси, проходящей через начало координат.

Для наглядности сядем в машину времени, перенесемся в лето и ощутим себя студентами геохимиками второго курса геологического факультета МГУ. Мы сдали 3-юю весеннюю сессию и отправляемся первого июня на геологическую практику из Москвы в Симферополь.



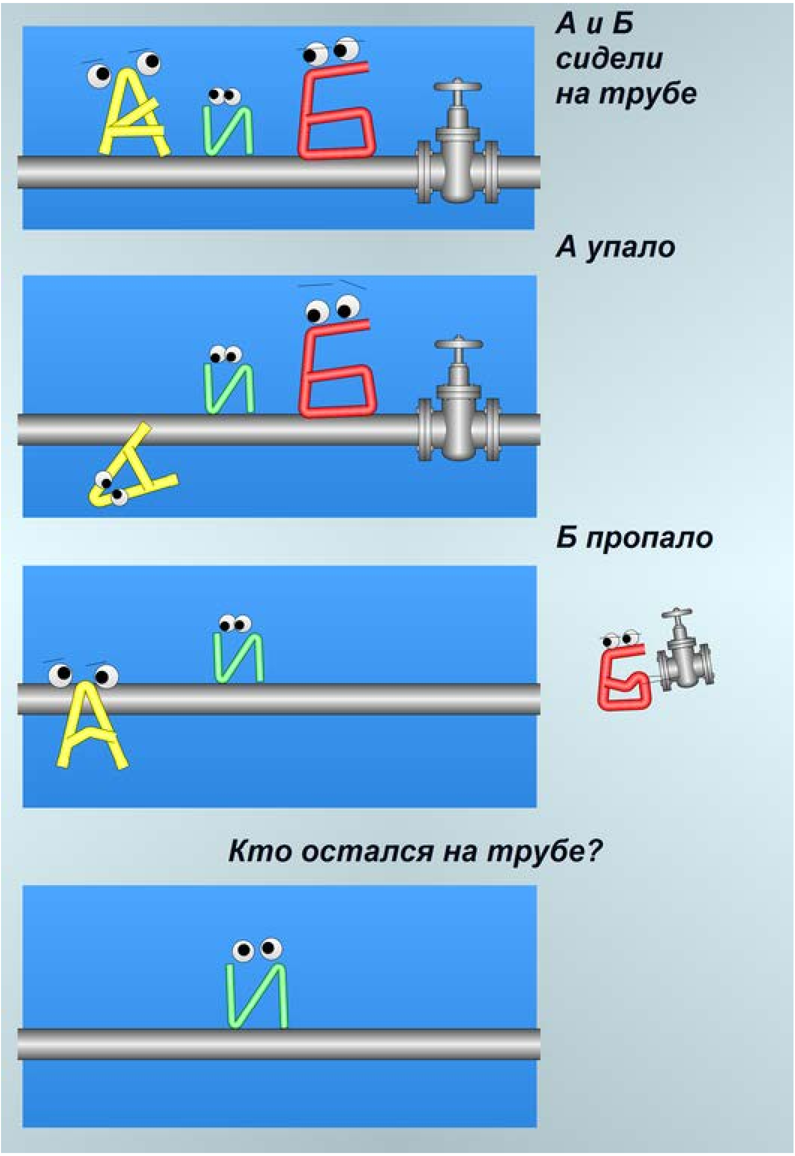
Стрелками показано перемещение студентов при последовательном вращении вокруг пересекающихся в центре Земли поворотных осей симметрии. A, B и C – путь по поверхности Земли:

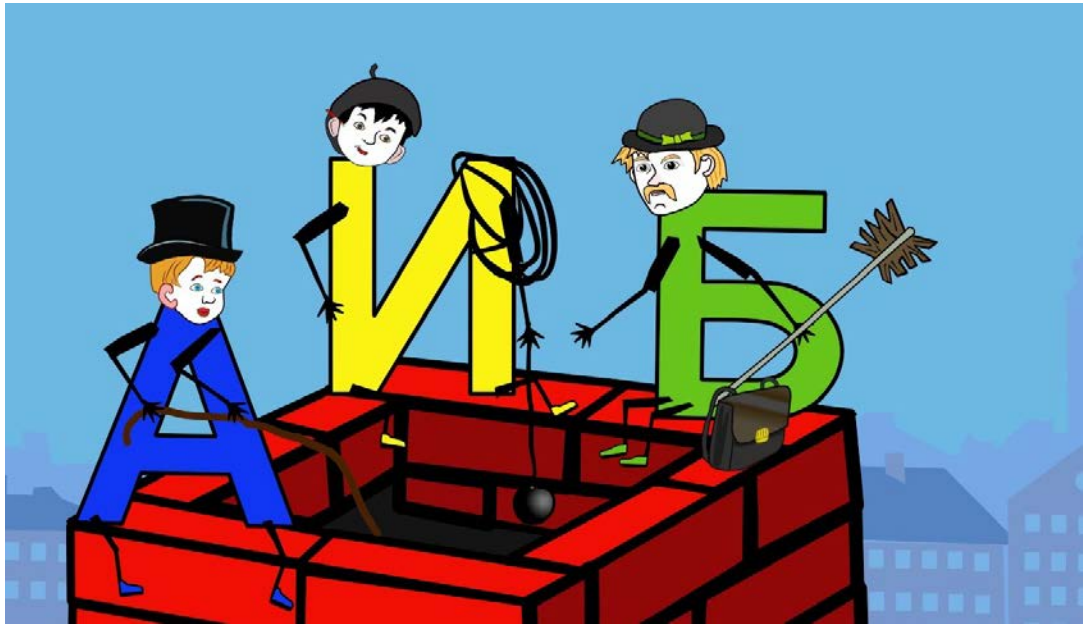
A – Москва - Симферополь,

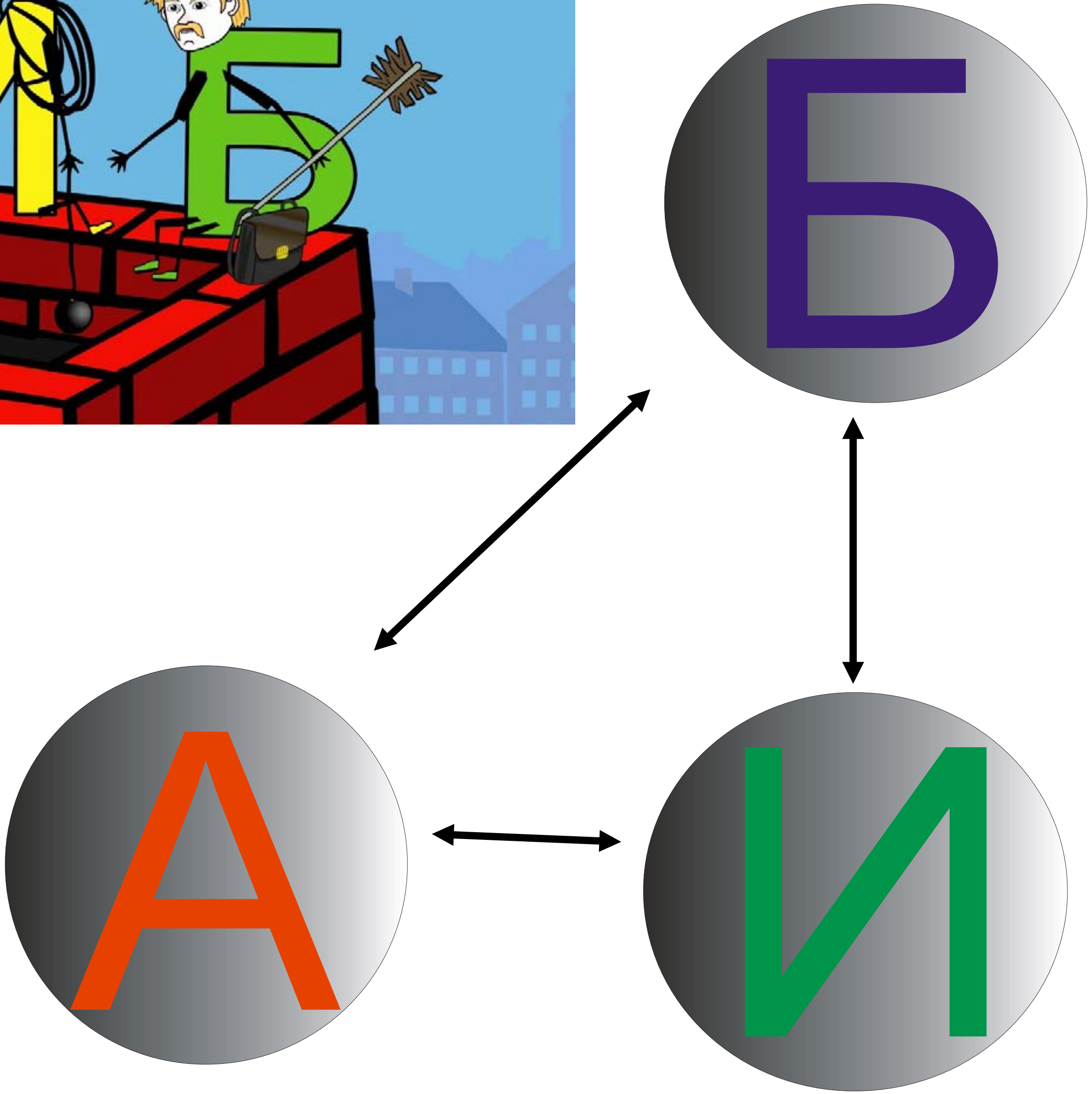
B – Симферополь - Миасс,

C – Миасс – Москва.

Сформулируем это в виде правила: *две операции симметрии* (A и B), *встретившись вместе,* ***всегда*** *порождают третью* (C). *При этом они равноправны:* A *и* C *порождают* B, B *и* C → A. Более того, A+B+C=1 (возникает операция идентичности: студенты изначально были в Москве, в ней в итоге и оказались, правда, уже в августе).


А и Б
сидели
на трубе
А упало
Б пропало
Кто остался на трубе?


А
И
Б


Б
А
И

А И Б сидели на трубе,
А упала Б пропала. Кто
остался на трубе?

Эти правила теории групп приводят к знаменитой теореме взаимодействия элементов симметрии – осевой теореме Эйлера (Правило А И Б).

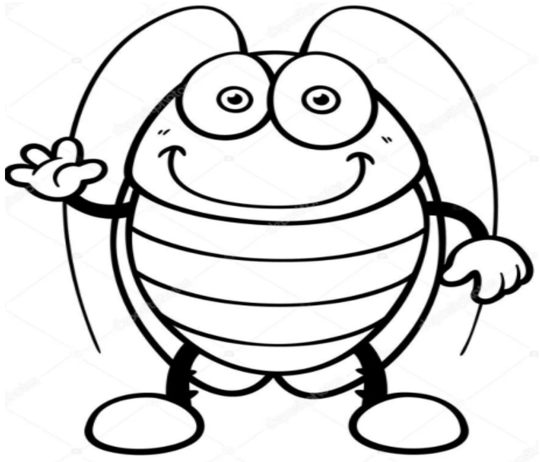
Взаимодействие двух осей симметрии n-го порядка, поворотных или инверсионных, приводит к возникновению проходящей через точку их пересечения третьей оси симметрии. При этом результирующая ось окажется поворотной, если исходными будут две одинаковые оси (обе поворотные или обе инверсионные), и инверсионной, если исходные оси будут разного типа.

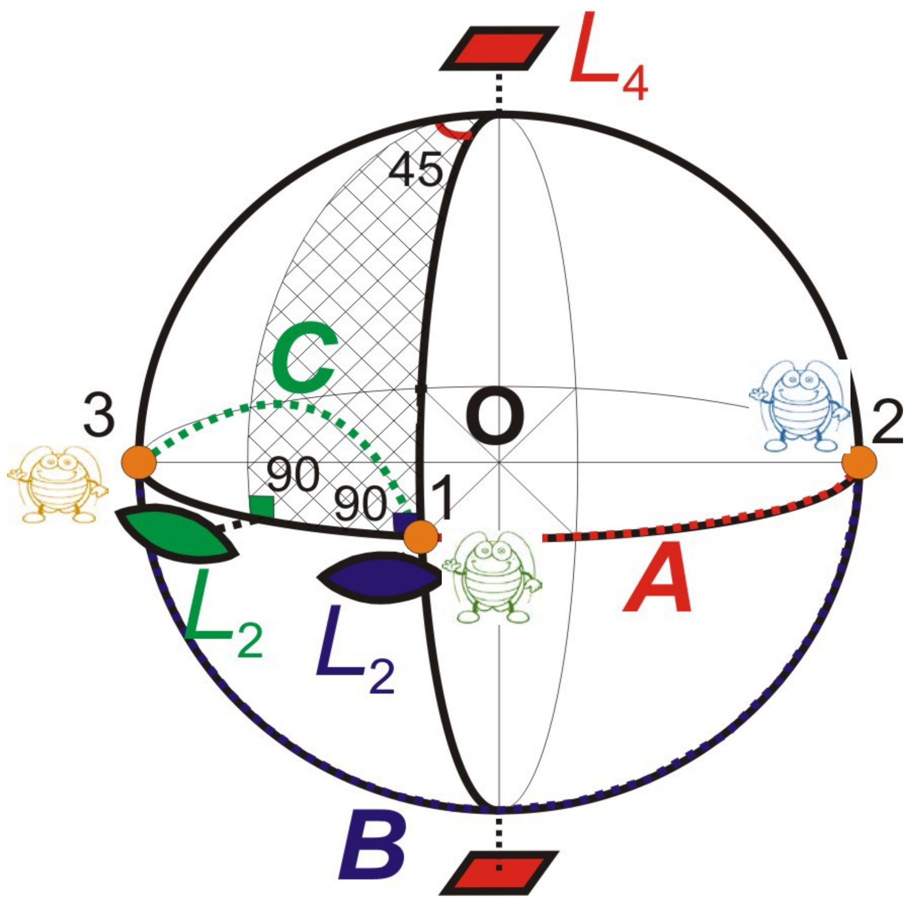
В этом примере мы не задумывались об угловых величинах дуг перемещения *A*, *B* и *C* по поверхности Земли.

Однако, для наличия осей вращения (поворотных или инверсионных)
с целым кристаллографическим *n*

на сферический треугольник 1-2-3, символизирующий перемещение между тремя точками на поверхности Земли накладываются ***определенные дополнительные условия существования***.

Проведем эксперимент

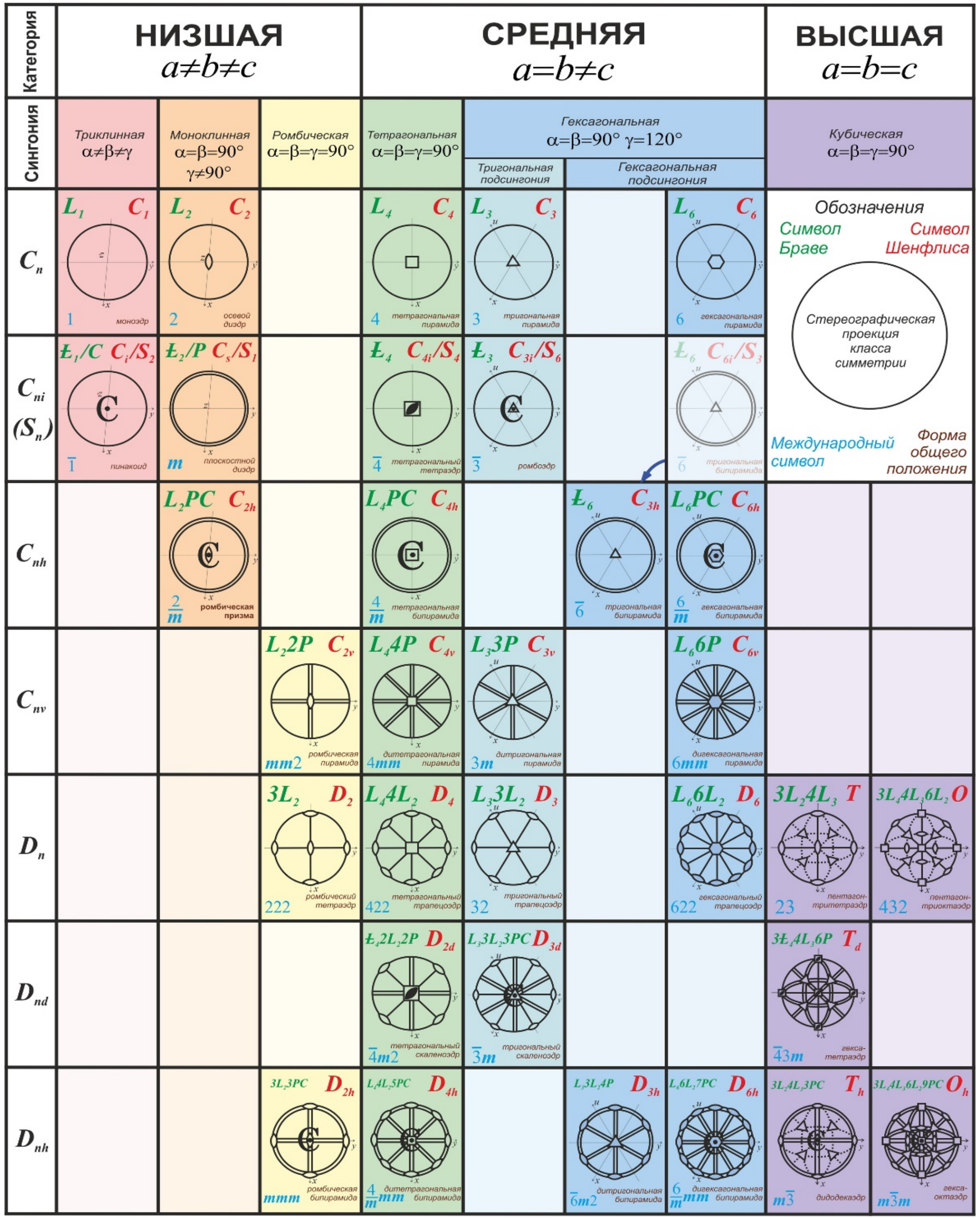




К взаимосвязи углов поворота осей и перемещения точки по поверхности сферы. ***A***, ***B*** и ***C*** – путь, пройденный тараканом в результате последовательного поворота вокруг осей L_4, L_2 и L_2, соответственно.

Сферический треугольник с углами 45˚, 90˚ и 90˚ (сумма внутренних углов 225˚) выделен штриховкой.

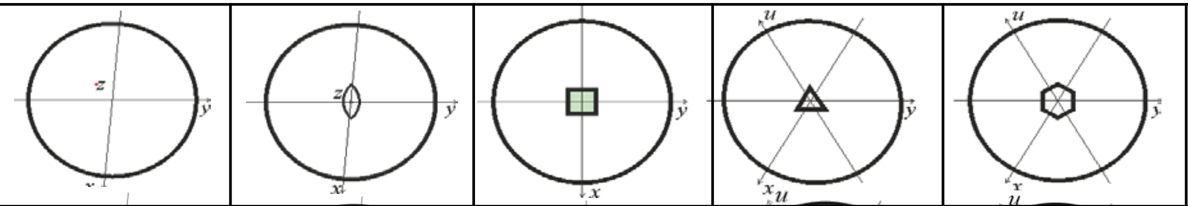
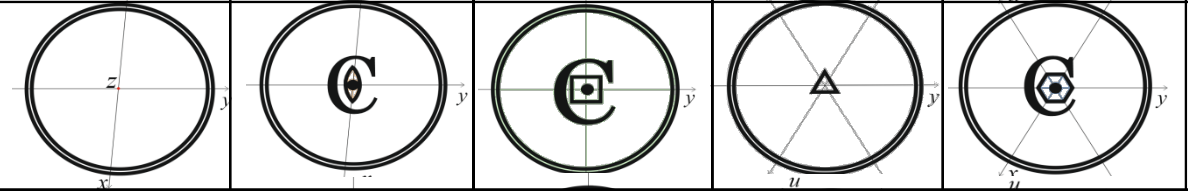
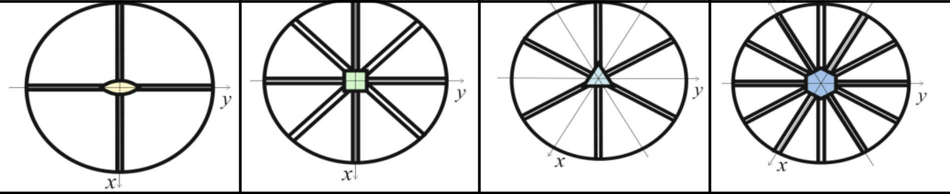
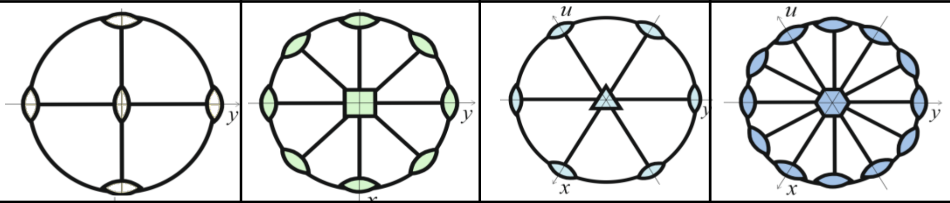
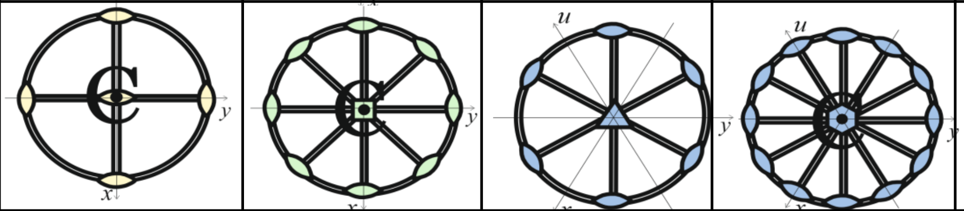
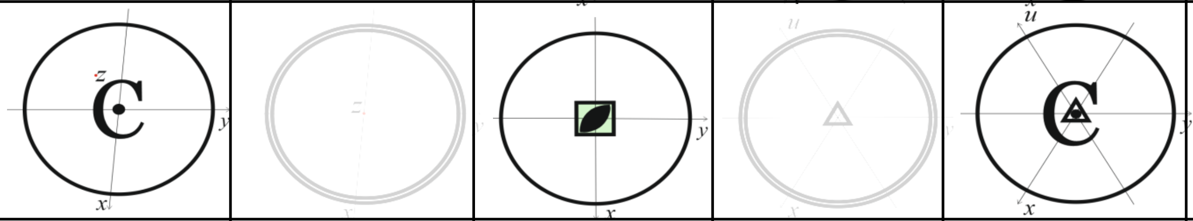
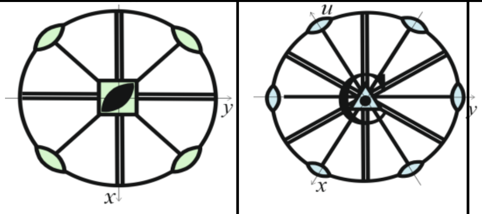
32 КЛАССА СИММЕТРИИ КРИСТАЛЛОВ



Знание законов взаимодействия позволяет вывести все возможные классы симметрии кристаллов

Скачать оригинал этой таблицы в формате А4 можно по гиперссылке http://cryst.geol.msu.ru/appliances/pics/32.jpg.

ВЫВОД 27 НЕКУБИЧЕСКИХ КЛАССОВ

Классы с единственной поворотной осью		5 КЛАССОВ
Добавим перпендикулярную плоскость. При этом в случае четной оси появится центр инверсии		5 КЛАССОВ
Добавим параллельные плоскости. При этом плоскостей, проходящих через ось ровно столько, каков порядок этой оси		4 КЛАССА
Добавим оси 2-ого порядка, перпендикулярные основному направлению. При этом таких осей ровно столько, каков порядок основной оси		4 КЛАССА
Добавим одновременно любые 2 генератора		4 КЛАССА
Классы с единственной инверсионной осью		3 КЛАССА
Добавим вертикальные плоскости		2 КЛАССА

Немецкий кристаллограф
М. Л. Франкенгейм в 1826 г.
вывел 32 класса симметрии .

Мориц Людвиг Франкенгейм

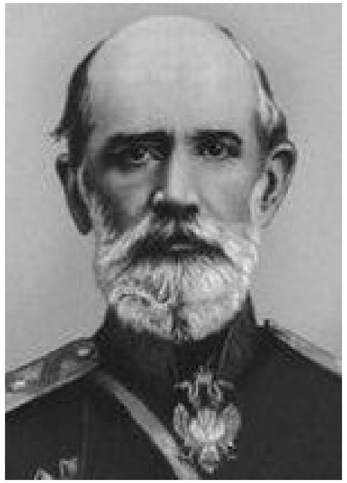
И. Ф. Х. Гессель** вывел 32 класса симметрии **в 1830 г.

Иоганн Фридрих Христиан Гессель (1796-1872)

Однако их работы были недопоняты и забыты.

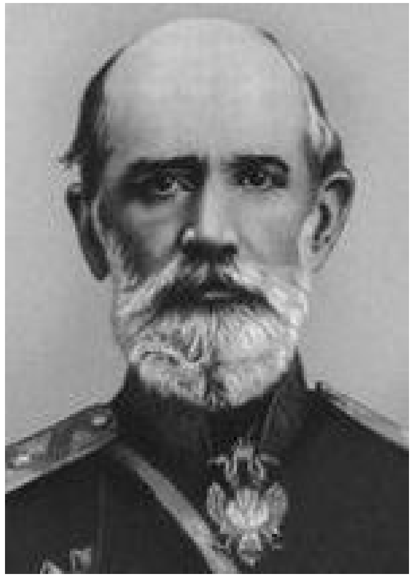
И лишь в 1867 г. Аксель Вильгельмович Гадолин привел **строгий математический вывод** 32 групп симметрии. (Петербургская АН в 1868 присудила ему за это Ломоносовскую премию).

Русский учёный в области артиллерийского вооружения, механической обработки металлов, минералогии и **кристаллографии**, с 1875 года действительный член Петербургской АН, с 1873 г. член-корреспондент, генерал от артиллерии (1890).



Аксель Вильгельмович Гадолин (1828-1892 гг.)

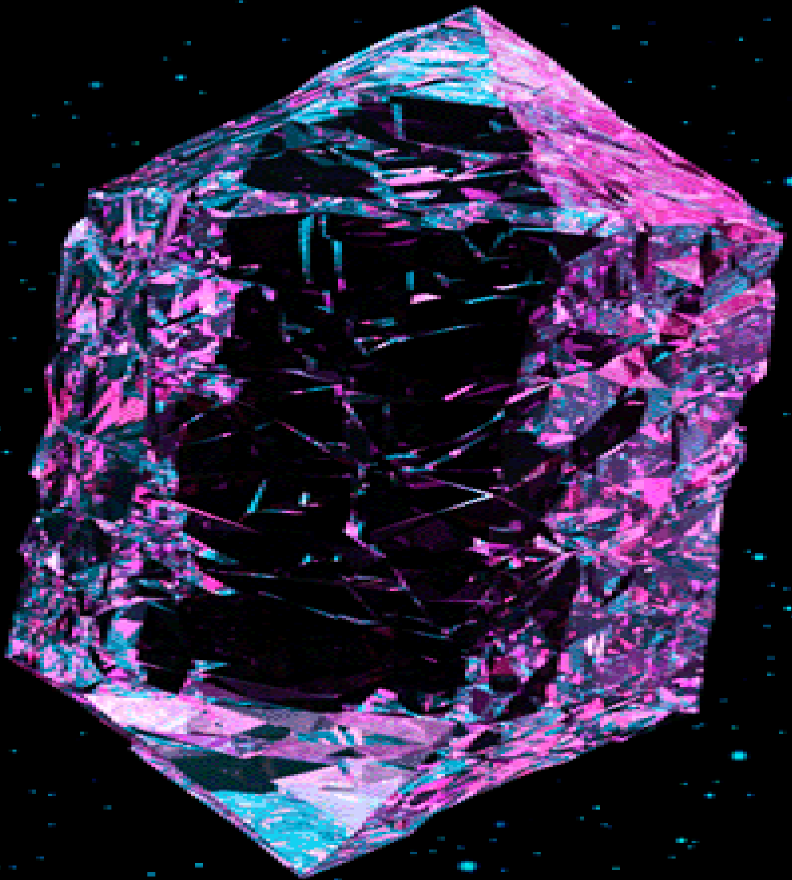
И лишь в 1867 г.   Аксель Вильгельмович Гадолин **<u>дал строгий математический вывод</u>** *32 групп симметрии*. (Петербургская АН в 1868 присудила ему за это Ломоносовскую премию).



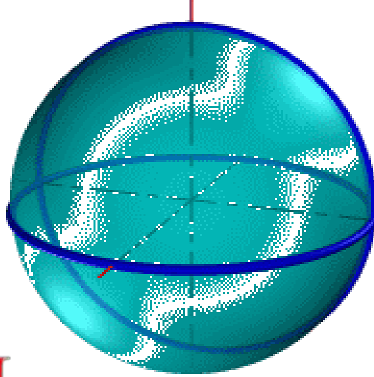
(1828-1892 гг.)

Его награды: (Российской империи):
Орден Святого Георгия 4-й степени (1871)   Орден Святой Анны 3-й степени (1859)
Орден Святого Владимира 4-й степени (1862) Орден Святой Анны 2-й степени(1864)
Орден Святого Владимира 3-й степени (1868) Орден Святого Станислава (Российская империя) 1-й степени (1870)
Орден Святой Анны 1-й степени (1872)
Орден Святого Владимира 2-й степени (1875) Орден Белого орла (Российская империя) (1879) Орден Святого Александра Невского (1884)
+
Французский Орден Почетного Легиона командорский крест (1867)
Шведский Орден Меча Большой крест (1885)

Проецирование кристаллов

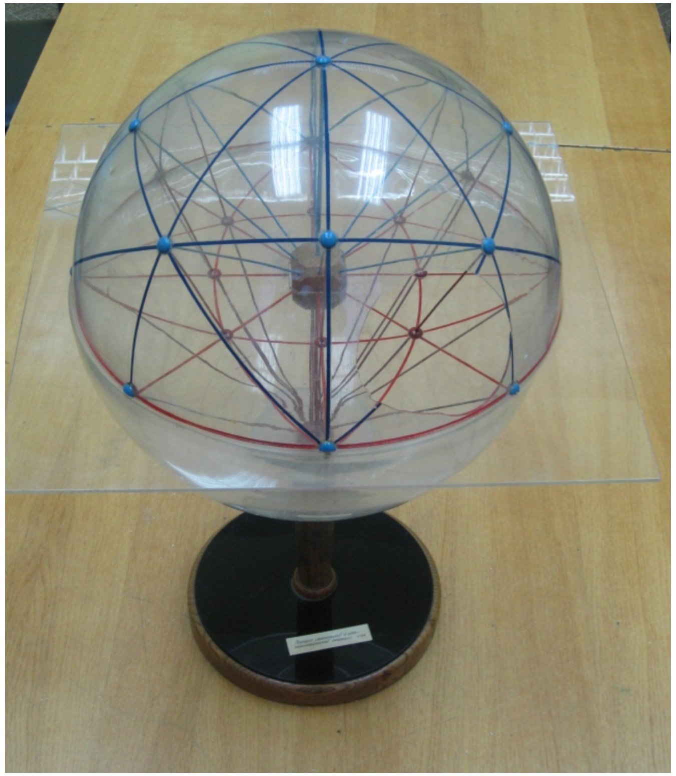


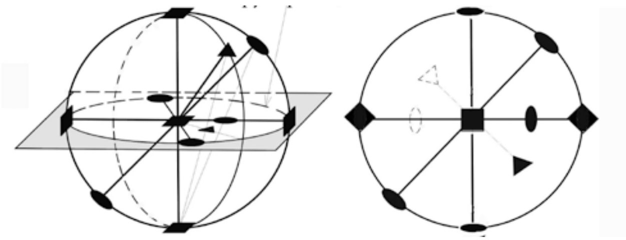
Для того, что бы спроецировать кристалл помещаем его мысленно в центр сферы бесконечно большого радиуса. Это означает, что все его грани и ребра проходят через центр сферы . Проецирование происходит в 2 этапа:

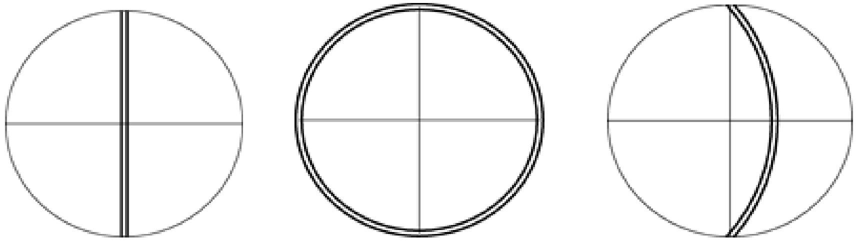


1. ПРОЕЦИРОВАНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ СИММЕТРИИ.

Все элементы симметрии проецируются *стереографически*. Это означает, что плоскости на проекции будут выглядеть как диаметры (вертикальные плоскости), меридианы (наклонные плоскости) или сама окружность (горизонтальная плоскость)







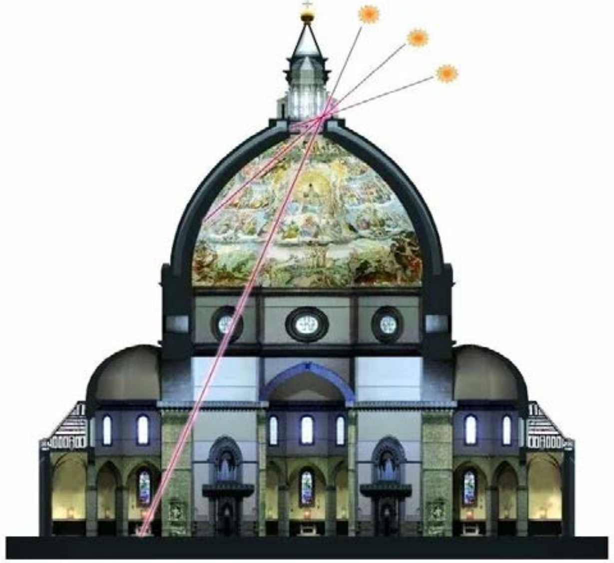
вертикальная горизонтальная наклонная

2. ПРОЕЦИРОВАНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ СИММЕТРИИ.

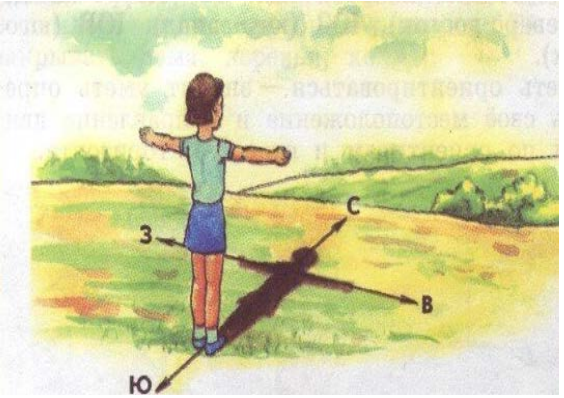
Все грани проецируются *гномостереографически*,
то есть проецируются не сами грани, а их перпендикуляры

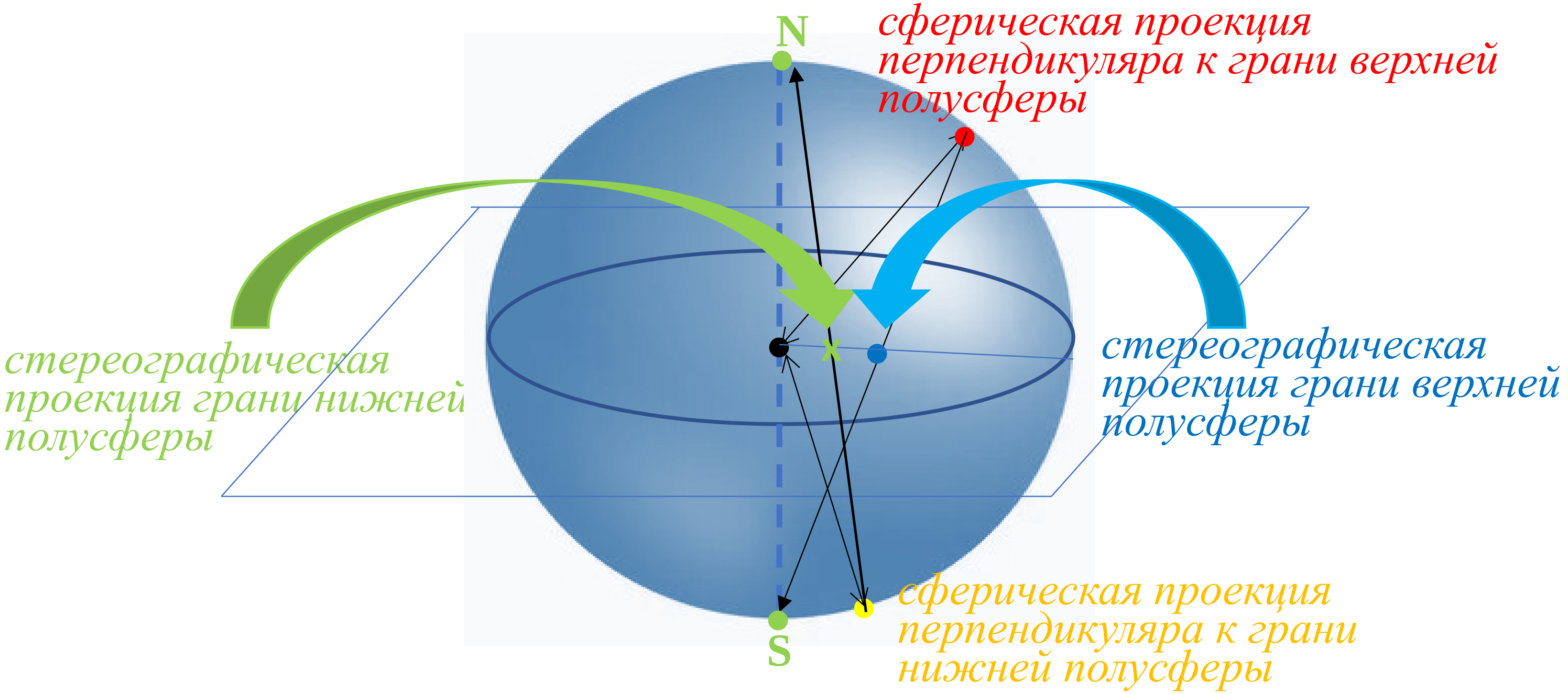
Гномостереографическая проекция плоскости – это стереографическая проекция ее перпендикуляра

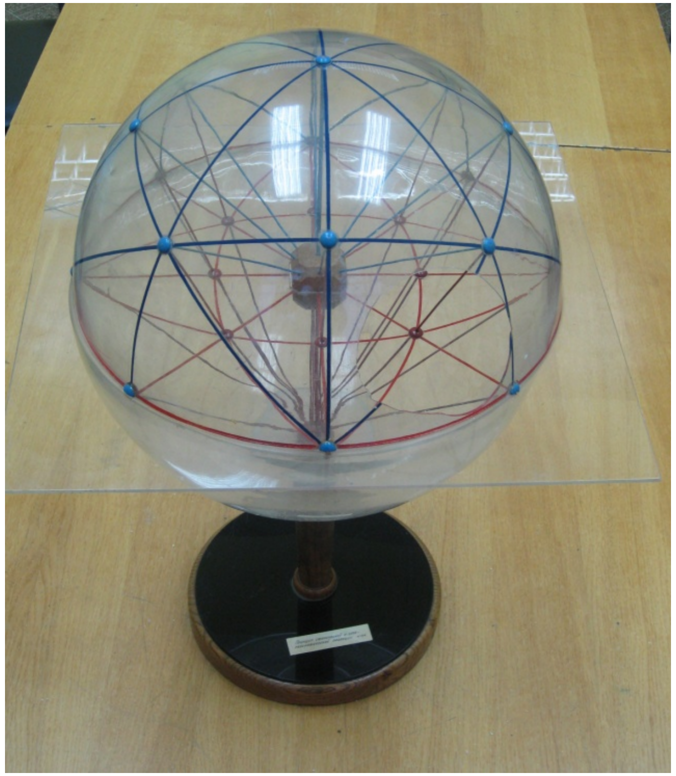
Солнечные часы в Египте



Собор Санта-Мария дель Фьоре



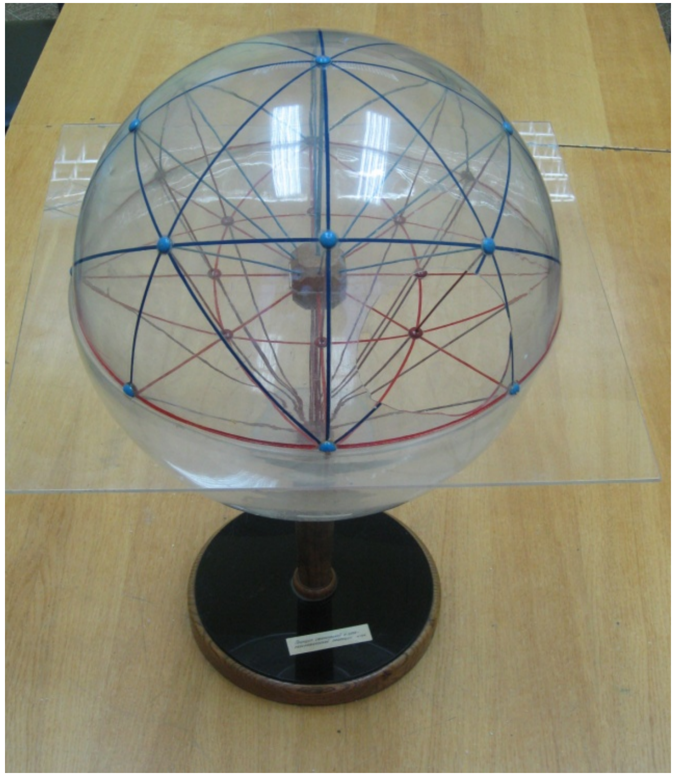


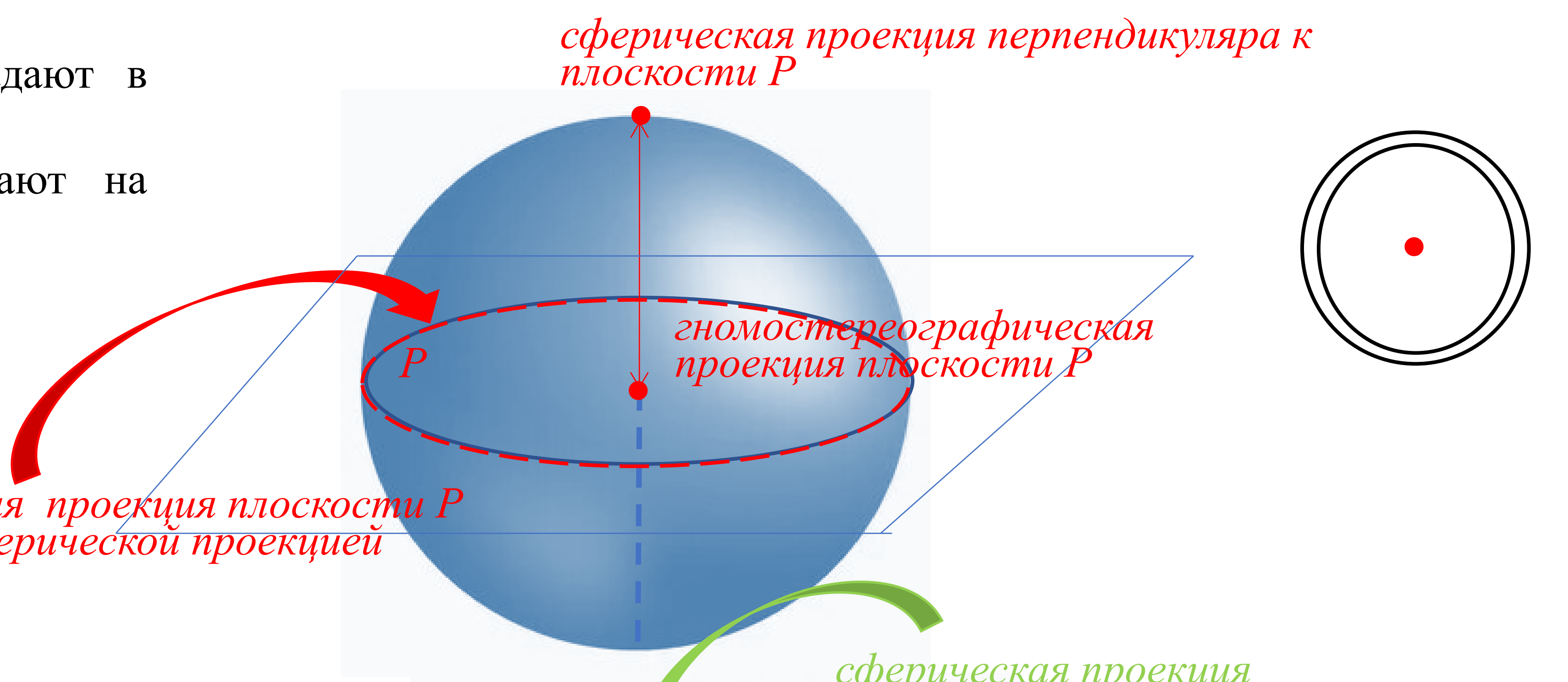


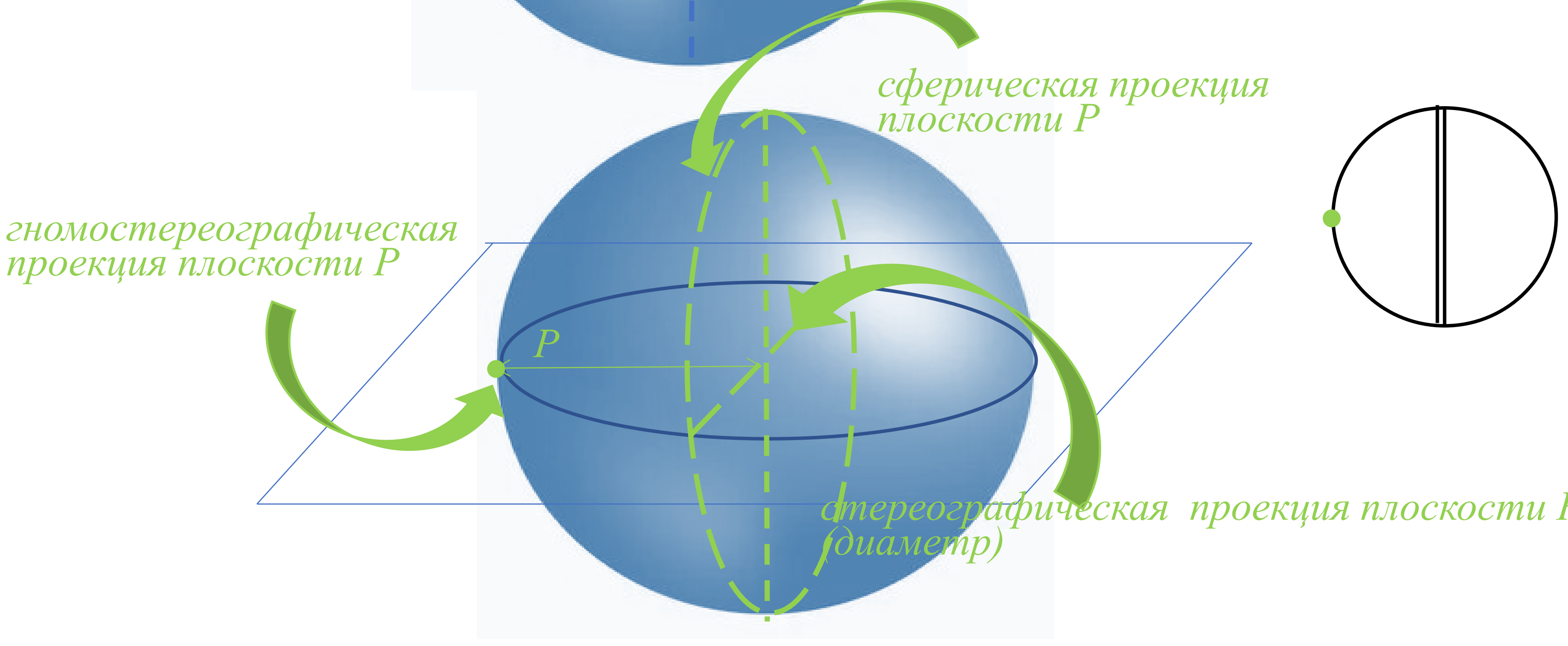
Грани, которые видит северный наблюдатель, рисуются кружками, а которые видит южный – крестиками. Возникает вопрос – экваториальную плоскость видят оба наблюдателя, какой значок для вертикальных граней (нормали к ним попадают на горизонтальную плоскость) использовать? Договорились - использовать кружки. Таким образом, *все грани верхней полусферы и экваториальной плоскости рисуются кружками, а нижней полусферы – крестиками.*

Все *горизонтальные плоскости* попадают в центр проекции

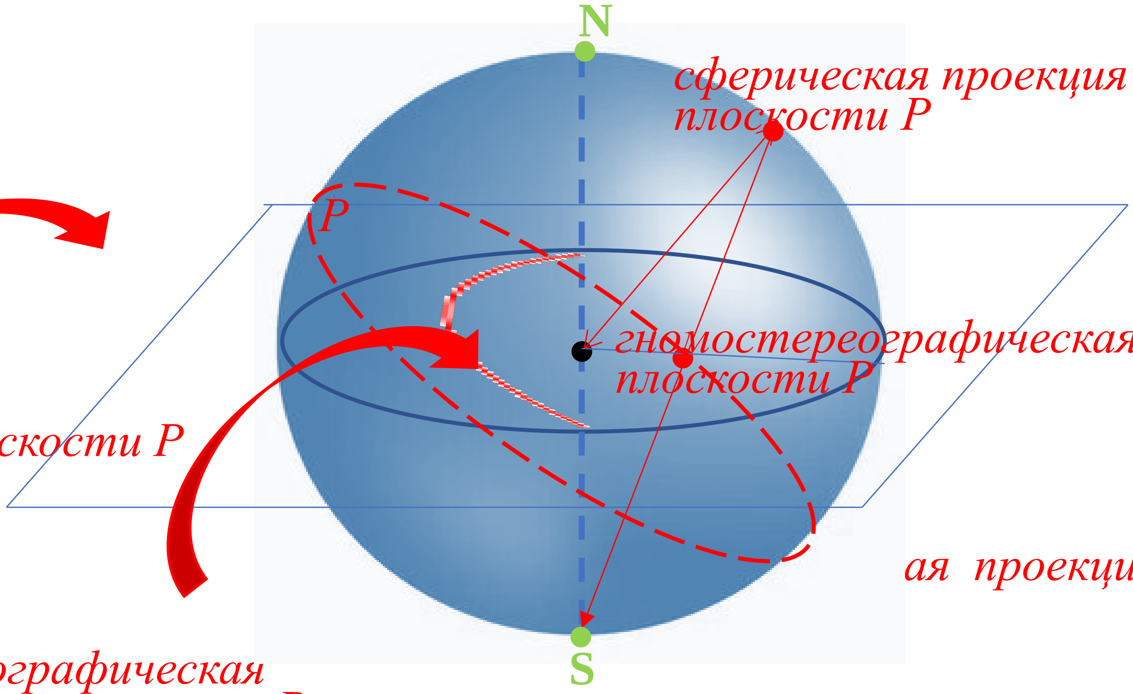
Все *вертикальные плоскости* попадают на окружность





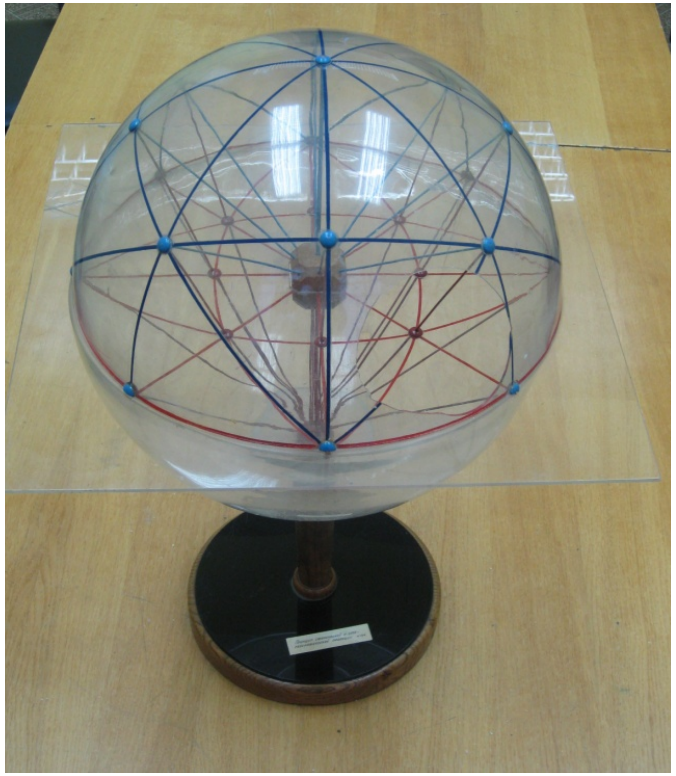


Наклонные плоскости занимают промежуточное положение.



сферическая проекция плоскости P

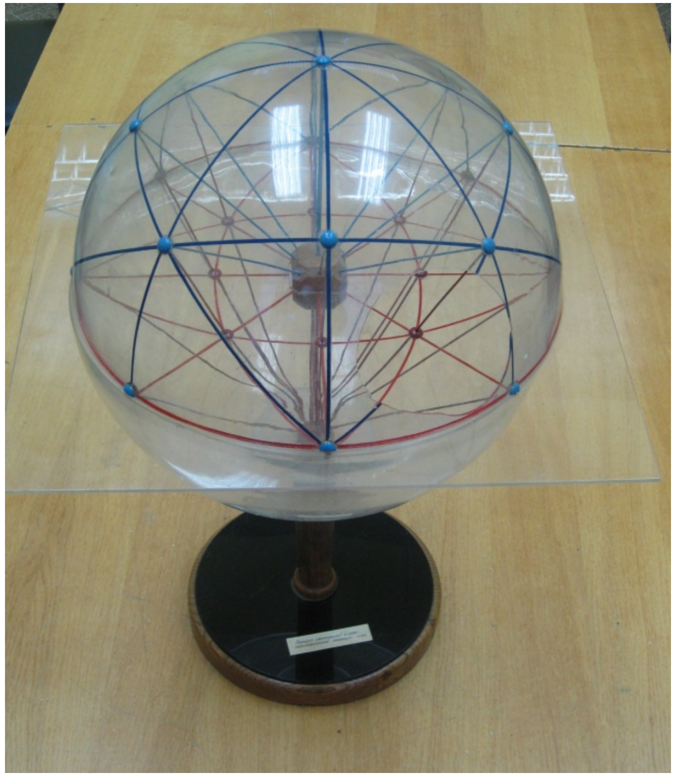
Стереографическая проекция плоскости P (меридиан, дуга, опирающаяся на диаметр)

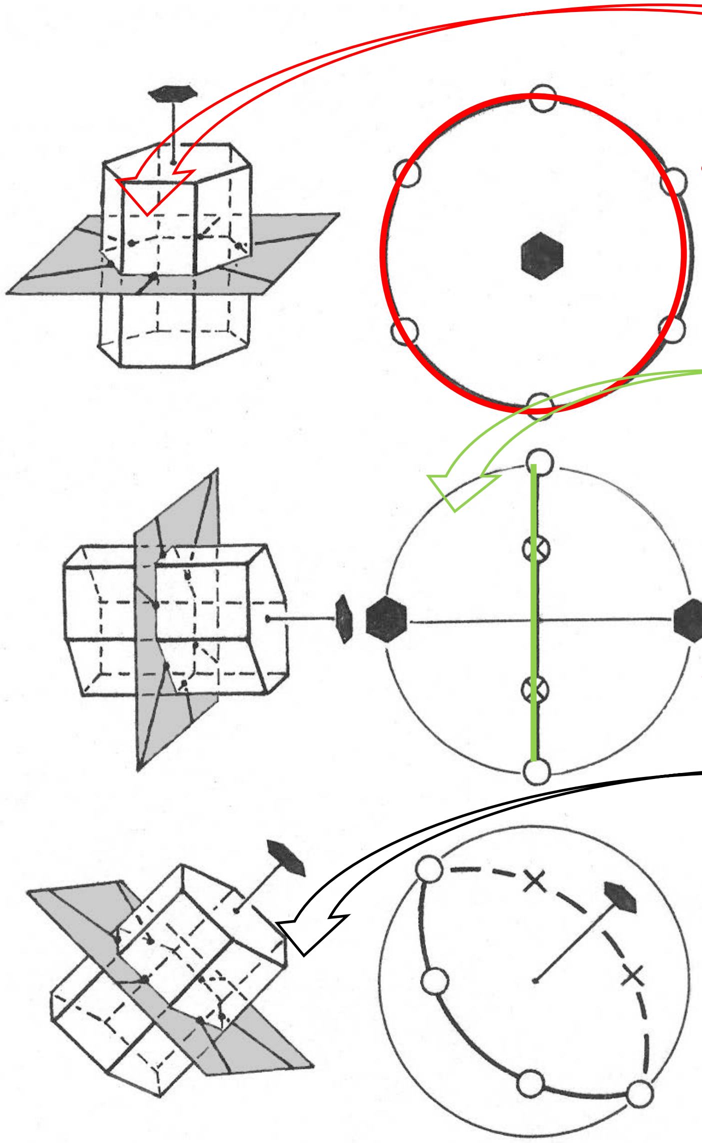


Меридианальная сетка это стереографические проекции плоскостей, проходящих через один центральный диаметр

Более точно нанести грани помогают *элементы симметрии* и *зоны*

Зоны – плоскости на которые проецируются грани, пересекающиеся по параллельным ребрам. Такие грани называются *таутозональными*





горизонтальная зона: грани пересекаются по параллельным *вертикальным* ребрам

вертикальная зона: грани пересекаются по параллельным *горизонтальным* ребрам

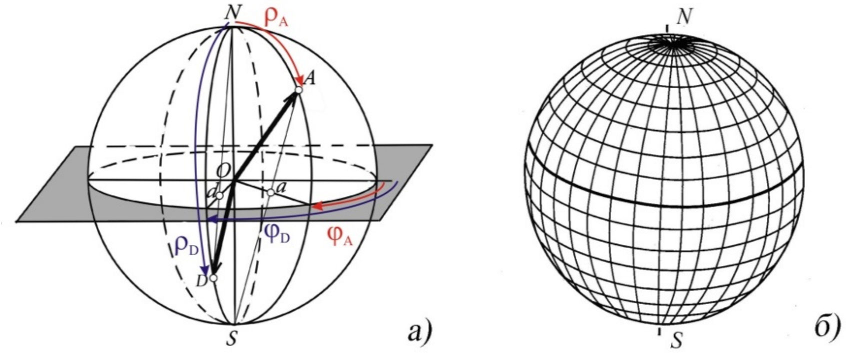
наклонная зона: грани пересекаются по параллельным *наклонным* ребрам

Простая форма – это совокупность граней, связанных между собой симметрическими операциями.

Отметим, что грани, принадлежащие одной простой форме, равны по своим физическим свойствам. Для идеальных кристаллов они равны также и геометрически - т.е. обладают одинаковой формой и площадью поверхности.

Сколько простых форм может быть в одном кристалле? Формально – сколько угодно, на практике – не больше десятка, а чаще всего меньше. Минимальное число простых форм равно одному (если форма закрытая - способна оконтурить собой трехмерное пространство). Чаще в огранке кристалла могут участвуют грани нескольких простых форм, при этом образуются ***комбинационные многогранники***.

Проецирование



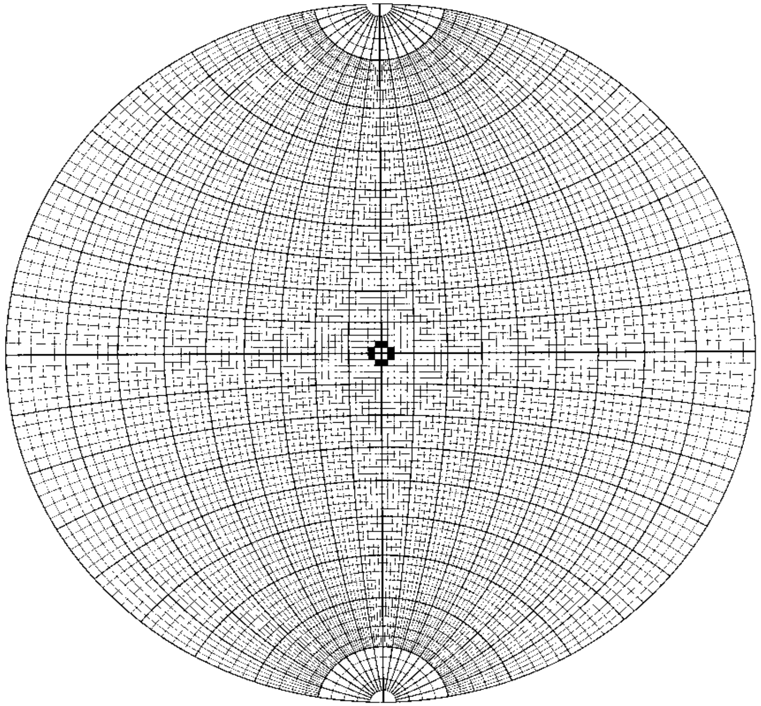
Каждая точка на сфере проекций имеет две координаты (как в географии) – широта (обозначается греческой буквой ρ) и долгота (обозначается греческой буквой φ).

В кристаллографии и географии эти координаты снимаются различными способами: в кристаллографии широта отсчитывается не от Гринвича, а от меридиана, совпадающего с положительным выходом оси *y*. Этот меридиан выбирается в качестве 0-ого (φ = 0º, он же имеет φ = 360º). Таким образом, каждая точка на сфере имеет долготу от 0 до 360º. Широта (координата ρ) отсчитывается по меридиану, проведенному через исследуемую точку «*A*» в направлении от северного полюса *N* к южному полюсу (S). ρ на северном полюсе N=0º, на экваторе ρ = 90º, а на южном полюсе *S* ρ = 180º (Скотт и Амундсен были бы слегка удивлены).

Роберт Фалкон Скотт
Достиг точки с ρ = 180º
17 января 1912 года,
погиб на обратном пути

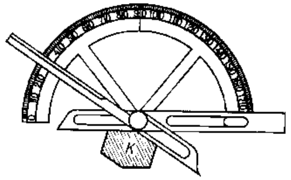
Руаль Амундсен
Достиг точки ρ = 180º
14 декабря 1911 года.
Погиб позже (1928 г.)

СЕТКА ВУЛЬФА



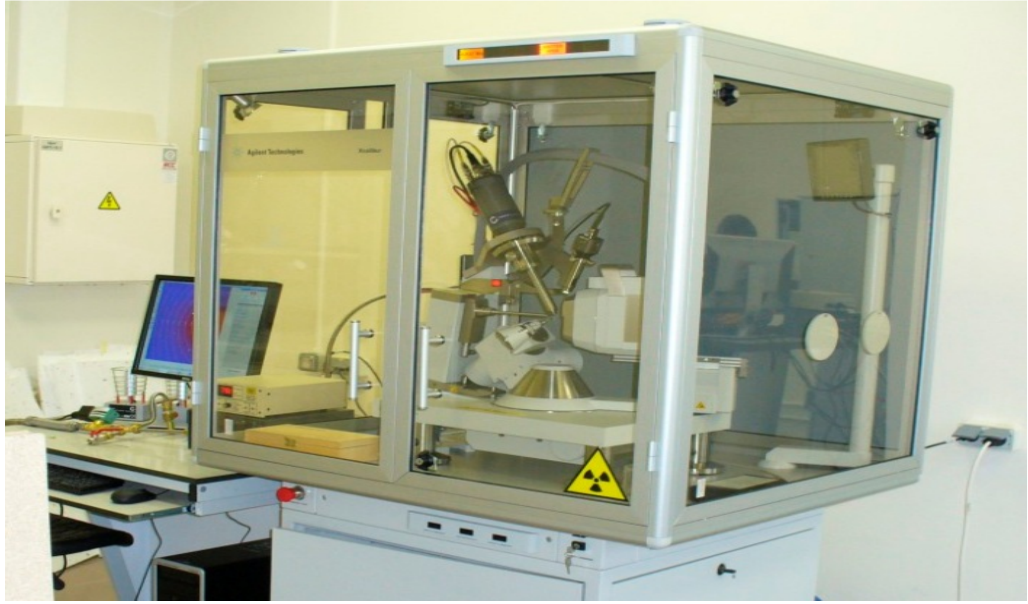
http://cryst.geol.msu.ru/yaroslav/Wulff_nets/Wulff10sm.zip.

Сетка Вульфа – это меридиональная сетка, с помощью которой, используя сферические координаты φ° и ρ° (результат гониометрических исследований), можно строить стереограммы кристаллов, точно наносить проекции граней и ребер, определять углы между ними и решать другие задачи. Для петрографической и минералогической практики оптимальным оказался диаметр 20 см с системой маркированных меридианов и параллелей через 2°, что обеспечивает погрешность измерений всего 1°.



Прикладной гониометр времен Роме де Лиля

Учебный гониометр второй половины 20-ого века



Гониометрический блок современного монокристального рентгеновского дифрактометра

Современные гониометры позволяют не только определять углы между гранями, но и определять их сферические координаты. Таким образом, нормаль к каждой грани получает свои координаты (аналог GPS отметки), что строго ее фиксирует положение, но не на местности, а на сфере проекций. гониометры, входящие в состав современных приборов, которые позволяют определять координаты граней образцов размером в десятые и сотые доли миллиметра

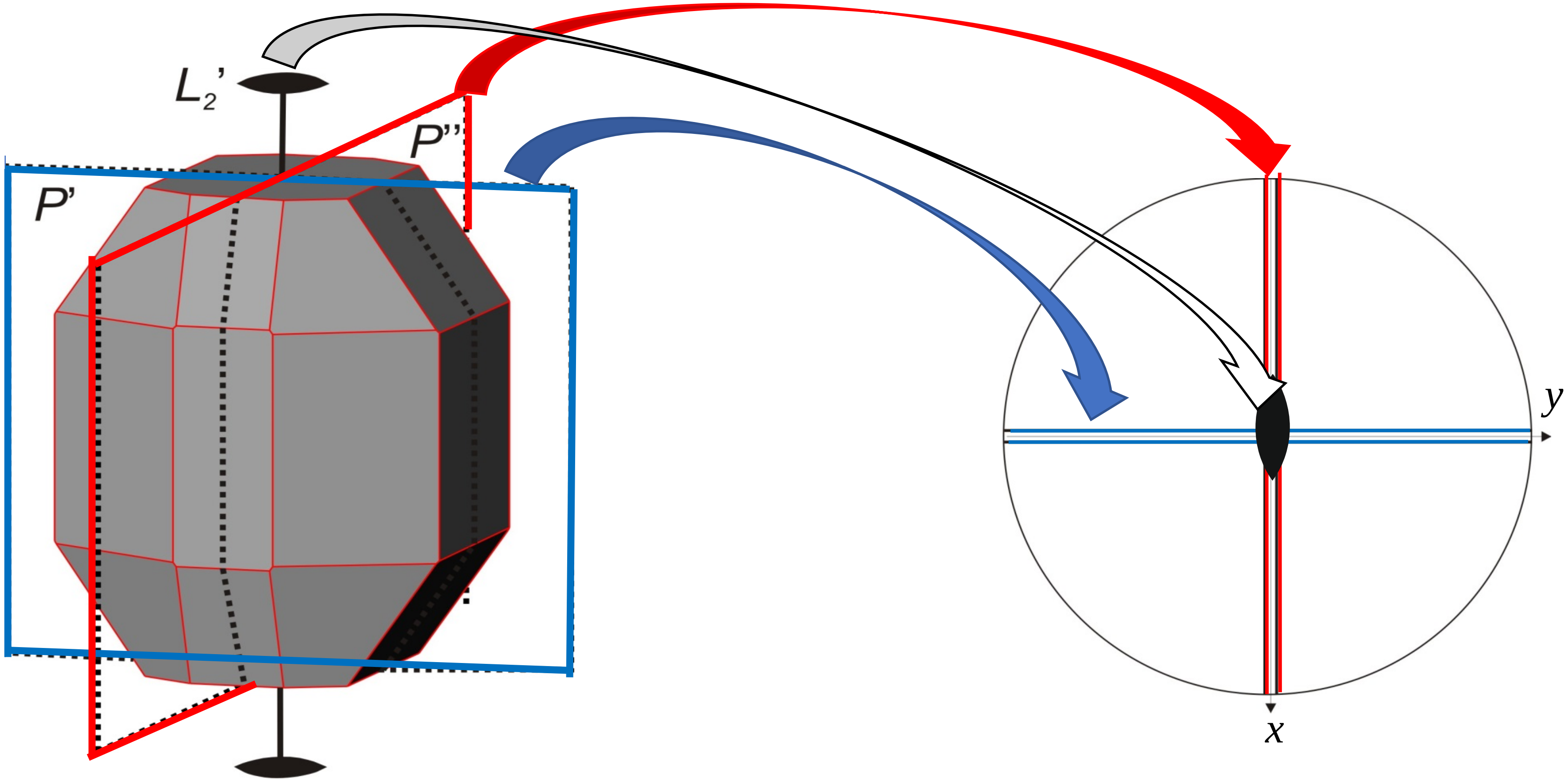
Георгий Викторович Вульф
(1863—1925)
российский учёный-кристаллограф.

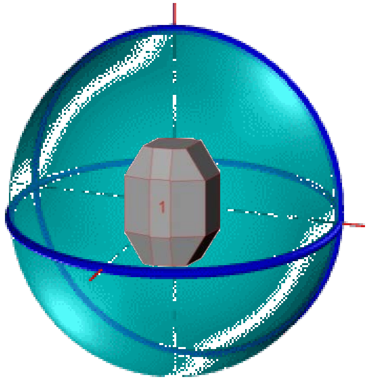
Автор около 150 работ по кристаллографии, кристаллофизике, кристаллооптике, рентгеноструктурному анализу. Предложил способ вывода всех видов симметрии кристаллов, разработал графический метод обработки результатов измерения кристаллов с помощью стереографической сетки (сетка Вульфа). Установил закон процесса роста кристаллов.

В 1913 году независимо от Л. Брэгга вывел условия интерференционного отражения рентгеновских лучей от кристаллов (***формула Брэгга —Вульфа***), положенные в основу рентгеновской спектроскопии. Первый в России начал рентгеноструктурные исследования.

Спроецируем кристалл оливина

1. ПРОЕЦИРОВАНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ СИММЕТРИИ.

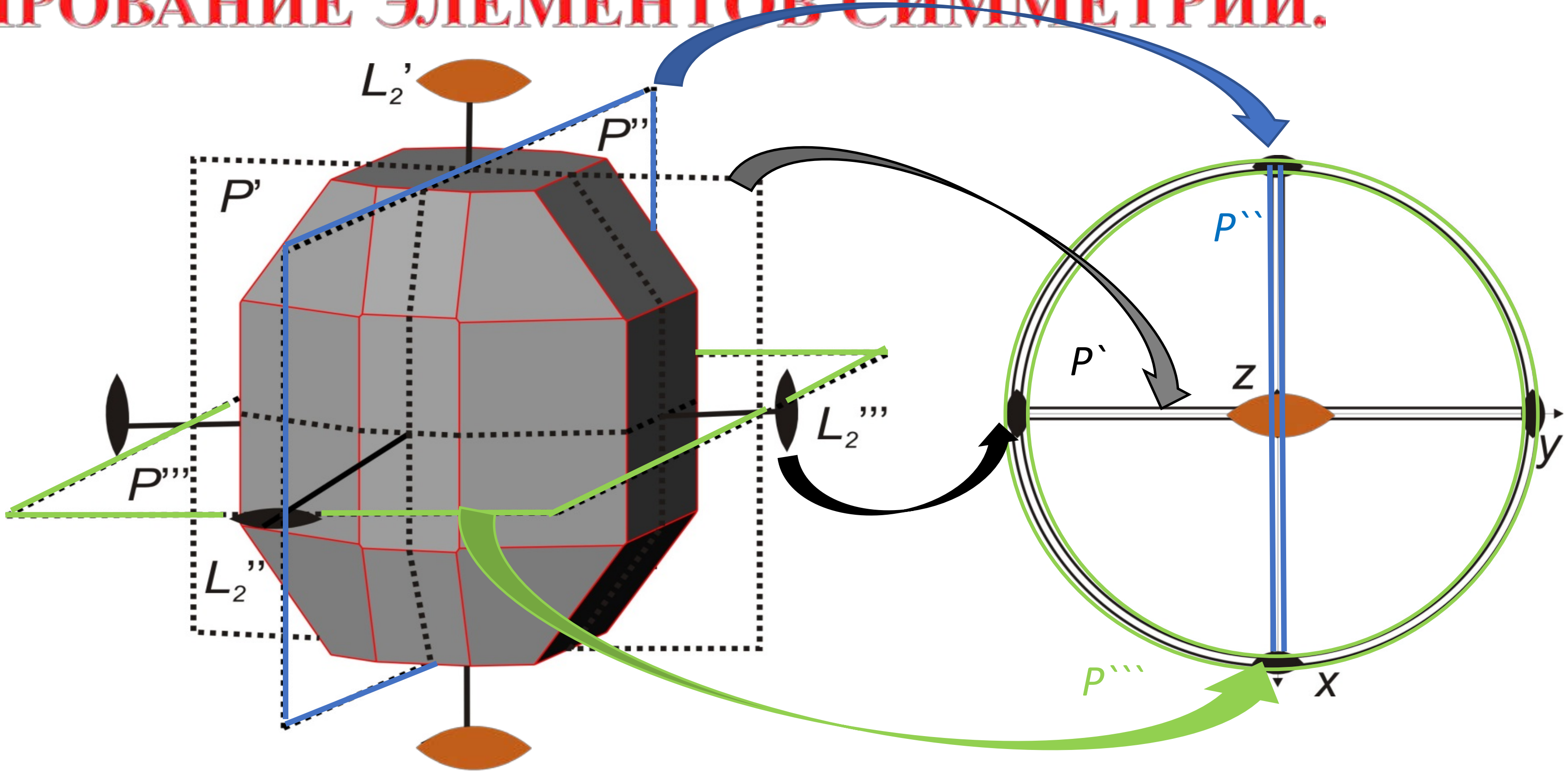


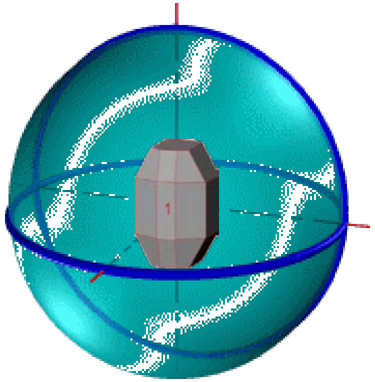


1) Используя трафарет, рисуем окружность, наносим на ней выходы координатных осей *x*, *y*, *z*.

2) Наносим графические значки оси L_2' и плоскостей P_x, P_y

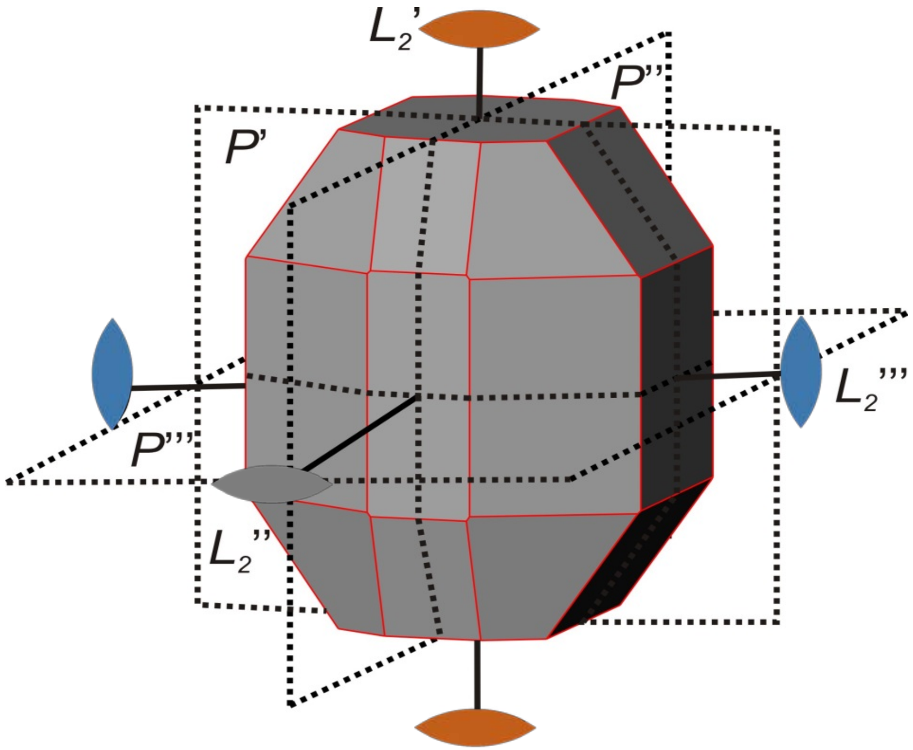
1. ПРОЕЦИРОВАНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ СИММЕТРИИ.

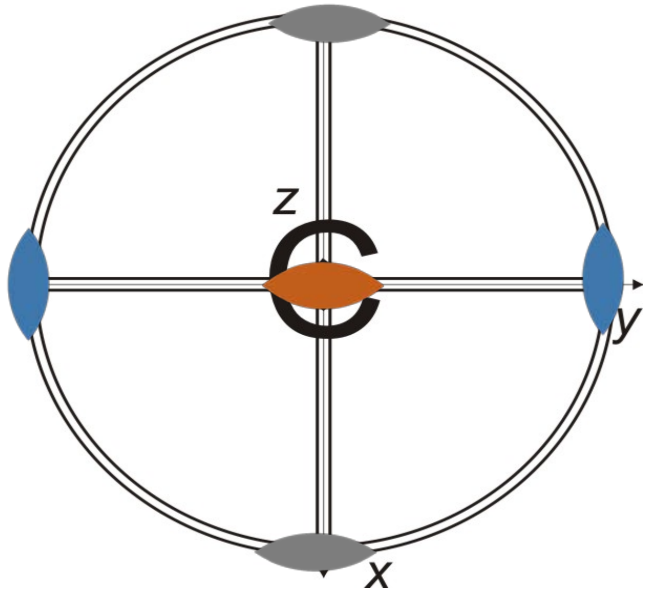


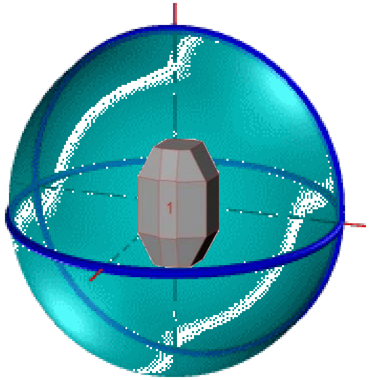


3) Наносим графические значки осей L_2'' и L_2''' и изображение плоскости P_z в виде двойной окружности

1. ПРОЕЦИРОВАНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ СИММЕТРИИ.







4) Находим центр и подписываем его на проекции.

На этом первый этап проецирования завершен. Класс симметрии, описывающий кристалл оливина: $L_2L_2L_2PPPC$