

# **ЛЕКЦИЯ 4**

***Координатные системы.***

***Категории.***

***Сингонии.***

***Символика Шенфлиса***

***и***

***Германа-Могена.***

# Разминка



Работая с кристаллами, исследователи обратили внимание на то, что элементы симметрии располагаются в них не случайно, а закономерным образом. Напомним, что **полный набор элементов симметрии строго определенным образом располагающихся по отношению друг к другу называется классом симметрии.**

Число классов симметрии бесконечно, но в кристаллах, где могут существовать только оси определенных целочисленных порядков, число классов закономерно сокращается до тридцати двух.

**Вспомним**  
**Четыре важнейших исторических репера**  
**открытия 32 классов**

**Давайте вспомним!**



*В 1826 г. немецкий кристаллограф  
М. Л. Франкенгейм (1801-1869 гг.)  
вывел 32 класса симметрии .*



Мориц Людвиг  
Франкенгейм



*И. Ф. Х. Гессель (1796-1872 гг.)  
в 1830 г. вывел 32 класса симметрии*



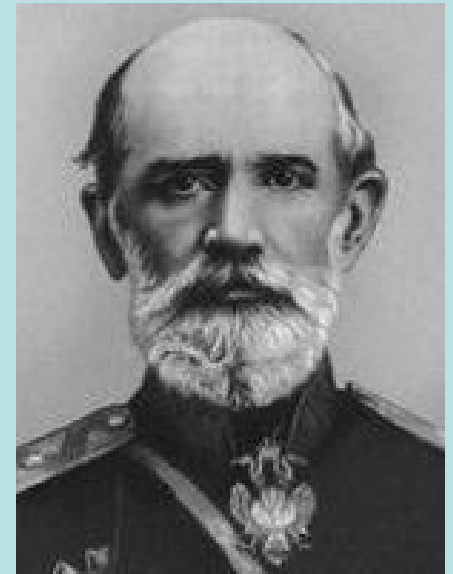
Иоганн  
Христиан

**Однако их работы были  
недопоняты и забыты.**

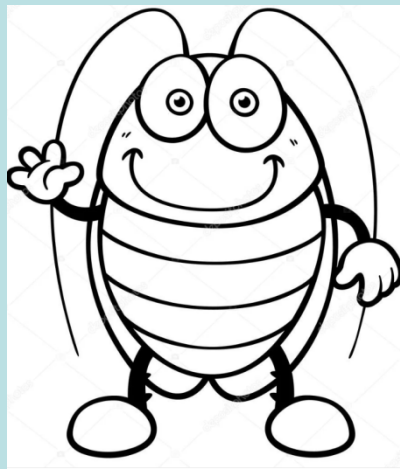
В 1867 г. Аксель Вильгельмович  
Гадолин дал строгий  
математический вывод

*32 групп симметрии.*

(Петербургская АН в 1868 присудила  
ему за это Ломоносовскую премию).



# Вывод с помощью путешественника - таракана



# 32 КЛАССА СИММЕТРИИ КРИСТАЛЛОВ

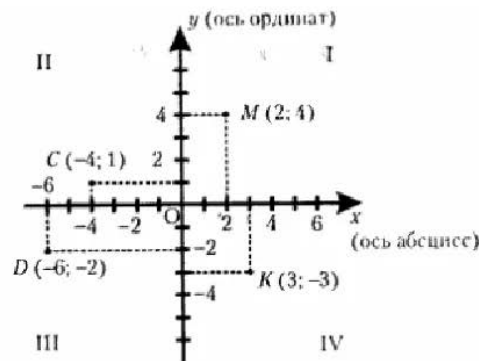
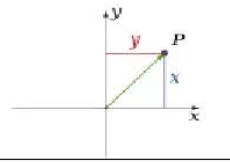
Категория	НИЗШАЯ $a \neq b \neq c$			СРЕДНЯЯ $a = b \neq c$			ВЫСШАЯ $a = b = c$		
Сингония	Триклинная $\alpha \neq \beta \neq \gamma$	Моноклиная $\alpha = \beta = 90^\circ$ $\gamma \neq 90^\circ$	Ромбическая $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	Тетрагональная $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	Гексагональная $\alpha = \beta = 90^\circ$ $\gamma = 120^\circ$		Кубическая $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$		
				Тригональная подсингония	Гексагональная подсингония				
$C_n$	$L_1 C_1$ 1 монотр. 	$L_2 C_2$ 2 осев. двур. 		$L_4 C_4$ 4 тетрагональная пирамид. 	$L_3 C_3$ 3 тригональная пирамид. 	$L_6 C_6$ 6 гексагональная пирамид. 	Обозначения Символ Шенфлиса Символ Браве Стереографическая проекция класса симметрии		
$C_{ni}$ ( $S_n$ )	$L_1/C_1/S_2$ 1 плановый 	$L_2/P C_2/S_1$ 2 плоскостной двур. 		$L_4 C_4/S_4$ 4 тетрагональный тетраэдр. 	$L_3 C_3/S_6$ 3 ромбоэдр. 	$L_6 C_6/S_3$ 6 тригональный бипирамид. 	Международный символ Форма общего положения		
$C_{nh}$		$L_2PC C_{2h}$ 2 ромбическая призма 		$L_4PC C_{4h}$ 4 тетрагональная бипирамид. 	$L_6 C_{3h}$ 6 тригональная бипирамид. 	$L_6PC C_{6h}$ 6 гексагональная бипирамид. 			
$C_{nv}$			$L_2P C_{2v}$ 2 ромбическая пирамид. 	$L_4P C_{4v}$ 4 дипирамидальная пирамид. 	$L_3P C_{3v}$ 3 тригональная пирамид. 	$L_6P C_{6v}$ 6 дигексагональная пирамид. 			
$D_n$			$3L_2 D_2$ 222 ромбический тетраэдр. 	$L_4AL_2 D_4$ 422 тетрагональный тетраэдр. 	$L_3L_2 D_3$ 32 тригональный тетраэдр. 	$L_6L_2 D_6$ 622 гексагональный тетраэдр. 	$3L_2AL_3 T$ 23 лептаэдрон триплетрадр. 	$3L_4L_6L_2 O$ 432 лептаэдрон триоктаэдр. 	
$D_{nd}$				$L_2L_2P D_{2d}$ 4 тетрагональный октаэдр. 	$L_3L_3PC D_{3d}$ 3 тригональный октаэдр. 		$3L_4L_6P T_d$ 43m гексаэдрон тетраэдр. 		
$D_{nh}$			$3L_3PC D_{2h}$ mmm ромбическая бипирамид. 	$L_4L_5PC D_{4h}$ 4 дипирамидальная бипирамид. 		$L_3L_4P D_{3h}$ 6 дипирамидальная бипирамид. 	$L_6L_7PC D_{6h}$ 6 дигексагональная бипирамид. 	$3L_4L_6PC T_h$ m3 дидодекаэдр. 	$3L_4L_6L_9PC O_h$ m3m гексаоктаэдр. 

Скачать оригинал этой таблицы в формате А4 можно по гиперссылке <http://cryst.geol.msu.ru/appliances/pics/32.jpg>.

***Координатные системы.  
Категории.  
Сингонии***

Упорядоченная система двух или трёх (*а, кстати, слабо четырех?*) пересекающихся под  $90^\circ$  друг другу осей с общим началом отсчёта и *общей единицей длины* называется **декартовой системой координат**. Из школьной математики и творчества барда-геолога А.Гордницкого она хорошо известна.

**Рене Декарт**  
(1596-1659)



*Давайте отложим вчерашние планы  
До нового марта,  
Дожди, бездорожье и рыжее пламя  
В системе Декарта.*

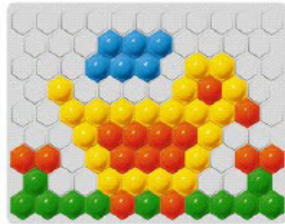
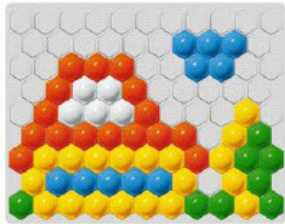
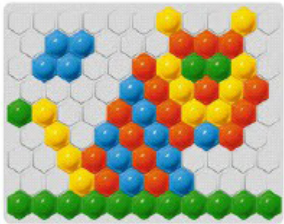
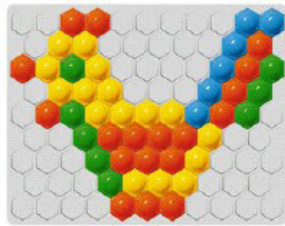
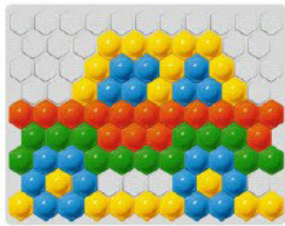
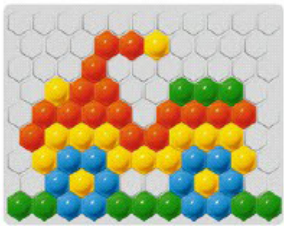
<https://gorodnitsky.com/songs/%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0-%D0%B4%D0%B5%D0%BA%D0%B0%D1%80%D1%82%D0%B0/?ysclid=18kdzx16cx441782723>

В кристаллографии такой координатной системой для всех осей пользоваться неудобно, так как прямоугольная система координат с одинаковыми масштабами по осям часто не соответствует реальной симметрии кристалла.



Что бы не было противоречия между координатной системой и симметрией

*координатные оси выбирают по особым направлениям в кристалле*



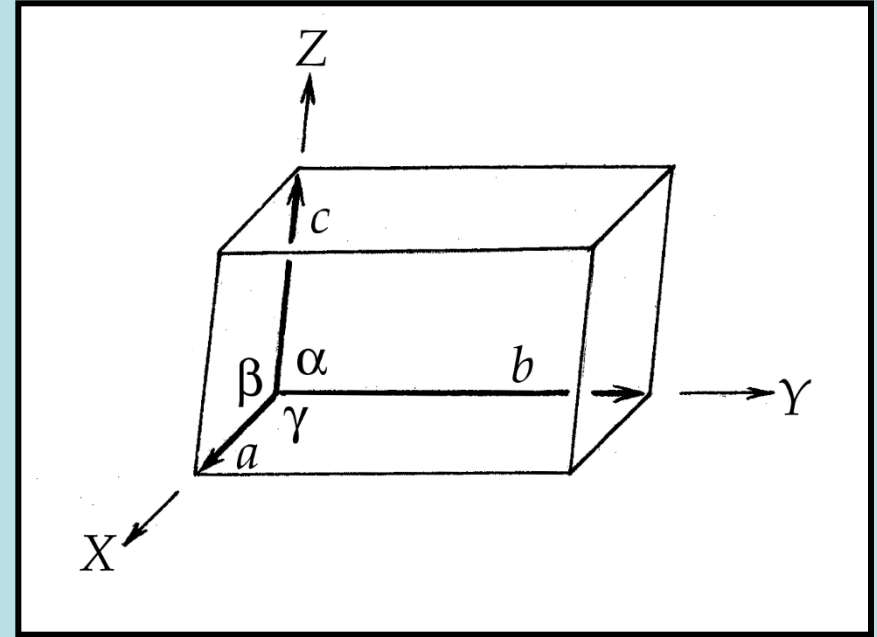
В кристаллографии **координатные оси совмещаются с особыми направлениями в кристалле.** При недостаточном их количестве (т.е. меньше трех) координатные оси выбираются по **действительным** или **возможным** ребрам кристалла.

**Особые направления** — оси симметрии (поворотные и инверсионные). При этом **предпочтение отдается инверсионным осям.**

**Единичные направления** — особые направления, не повторяющиеся в кристалле



Таким образом, в кристаллографии масштабы и углы между координатными осями задают элементы симметрии



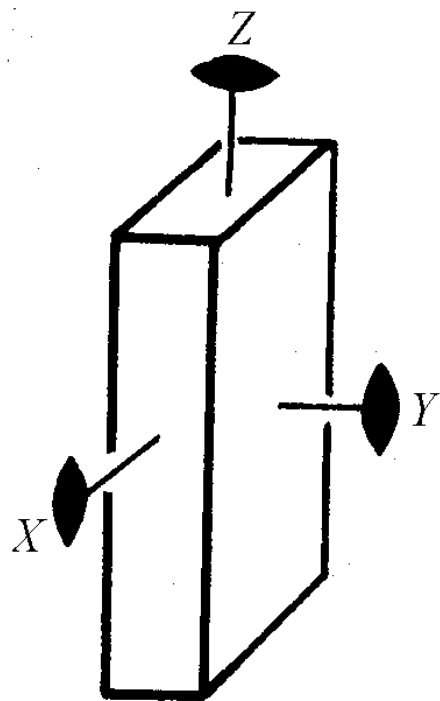
Основные характеристики координатной системы:

**Метрические параметры** (масштабные отрезки по координатным осям): ***a*** (масштаб по *x*), ***b*** (по *y*), ***c*** (по *z*)

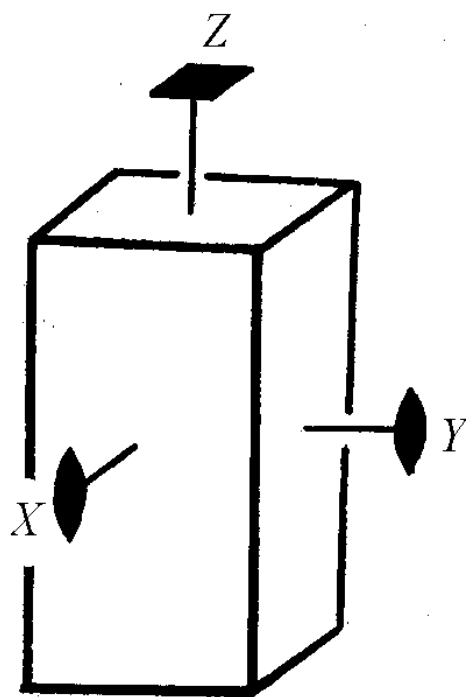
**Угловые параметры** (углы между координатными осями): ***α*** (*Y*  $\wedge$  *Z*), ***β*** (*X*  $\wedge$  *Z*), ***γ*** (*X*  $\wedge$  *Y*)

По степени эквивалентности координатных направлений (условно *равенство единичных векторов* – *масштабов*  $a$ ,  $b$ ,  $c$  – по соответствующим координатным осям  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ) все 32 класса симметрии можно разделить на три группы: **3 категории.**

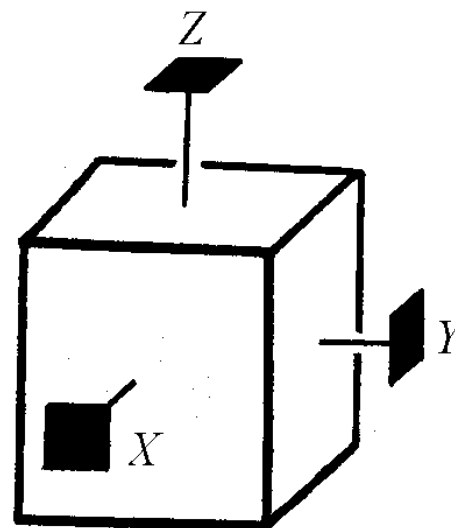
$$a \neq b \neq c$$



$$a = b \neq c$$



$$a = b = c$$



**Категория** – объединение классов симметрии по принципу соотношения масштабных отрезков

1) **низшая категория**  $a \neq b \neq c$

полная неэквивалентность координатных направлений (которая объясняется отсутствием в них **осей высшего порядка** ( $>2$ )).

2) **средняя категория**  $a = b \neq c$

частичная эквивалентность (присутствие в их группах симметрии одной **оси высшего порядка**)

3) **высшая категория**  $a = b = c$

полная эквивалентность (несколько **осей высшего порядка, в т.ч. четыре оси 3-его порядка**)

Категории, в свою очередь, по угловым характеристикам делятся на **сингонии** - семейство классов симметрии с единой координатной системой: **всего 6 сингоний.**



**Низшая категория  $a \neq b \neq c$**

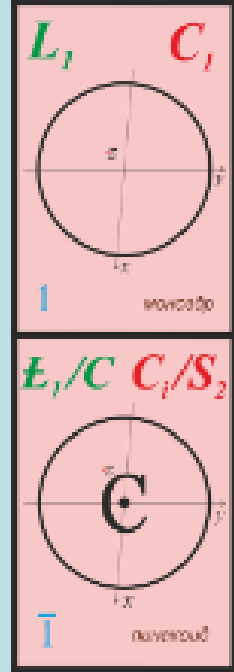
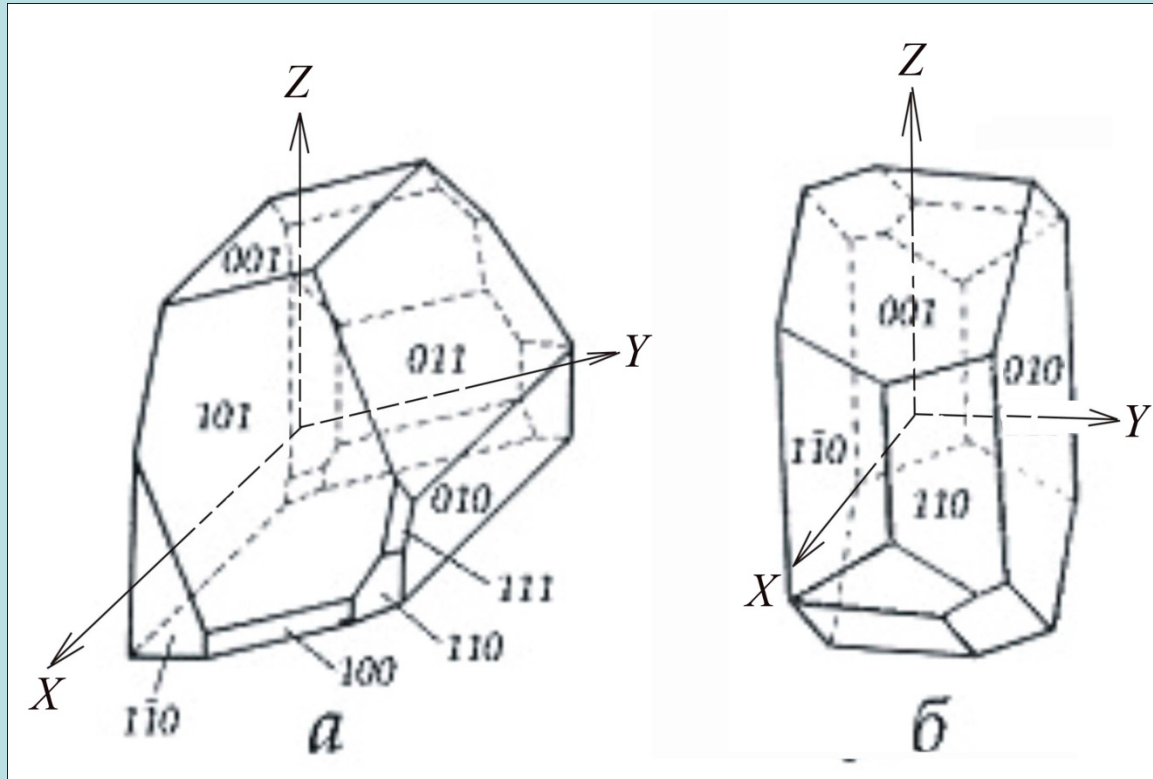
1)  $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$ ,  $a \neq b \neq c$

**Ромбическая сингония** (*english orthorombic*)

2)  $a \neq b \neq c$ ,  $\alpha = \beta = 90^\circ$  и углом моноклинности  $\gamma \neq 90^\circ$  **Моноклинная сингония**

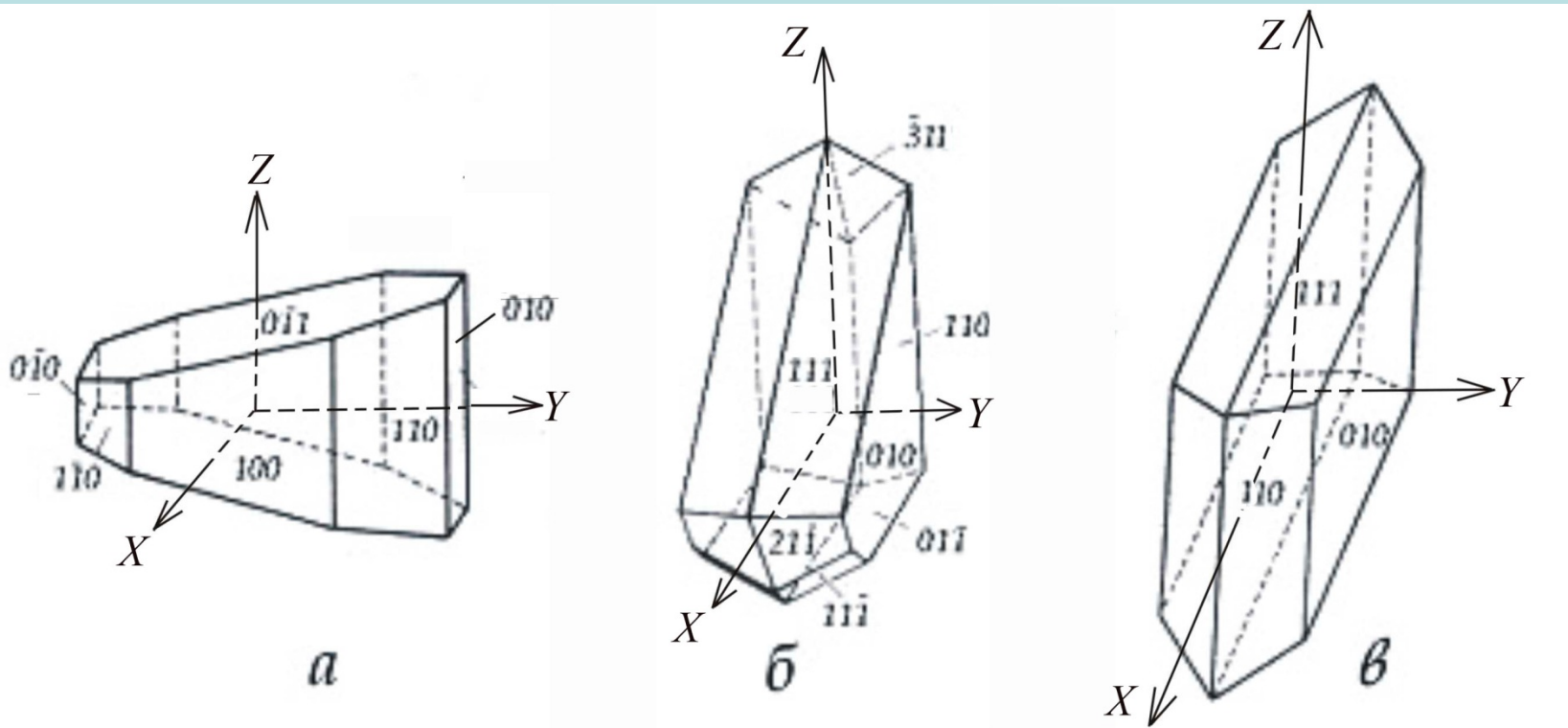
3)  $a \neq b \neq c$ ,  $\alpha \neq \beta \neq \gamma$ . **Триклинная сингония**

# Триклинная сингония



При отсутствии в кристаллах особых направлений (т. е. либо в кристалле вообще нет элементов симметрии, либо есть только центр инверсии -  $C$ ) координатные оси выбирают по действительным или **возможным** ребрам кристалла, что приводит к координатному реперу самого общего вида

# Моноклинная сингония



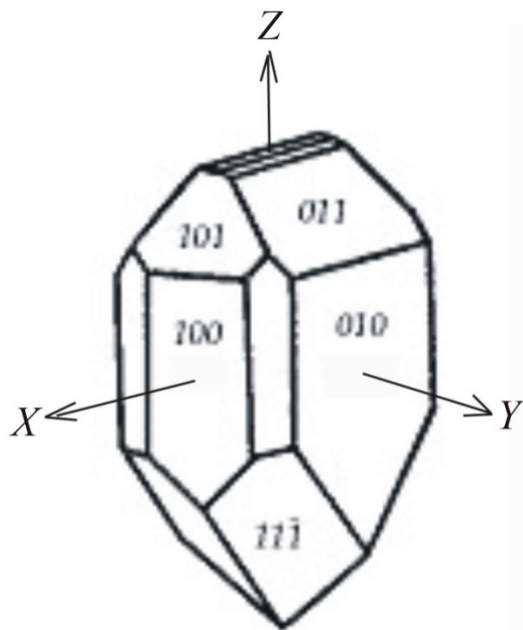
В кристаллах моноклинной сингонии имеется одно особое направление, вдоль которого выбирается одна из координатных осей. Две другие располагаются в плоскости, перпендикулярной особому направлению, и выбираются по возможным или действительным ребрам кристалла.

(а) единственное особое направление ось 2-го порядка (вдоль оси  $Z$   $Y$ -минералогии);

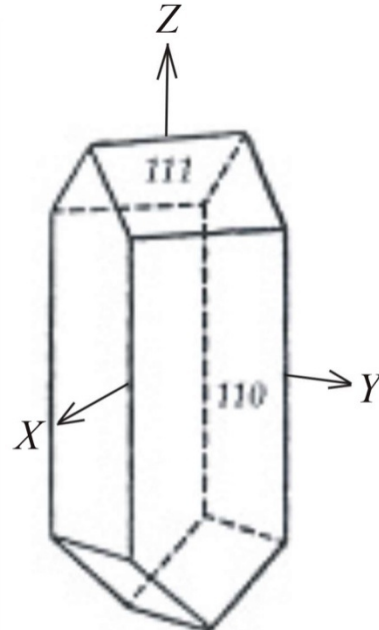
(б) – нормаль к плоскости симметрии  $P$  ( $Z$ );

(в) симметрия  $L_2PC$  одна координатная ось ( $Z$ ) совмещается с осью 2-го порядка и нормалью к плоскости, перпендикулярной этой оси

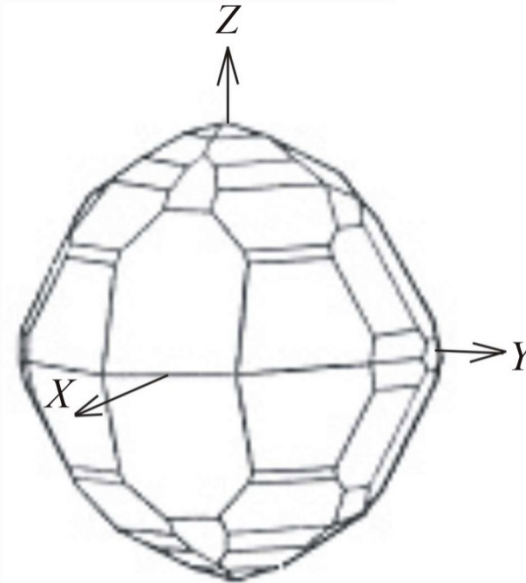
# Ромбическая сингония



**a**



**б**



**в**



- а) в кристалле с симметрией  $L_2 2P$  ось  $Z$  выбирается вдоль вертикальной оси 2-го порядка, две другие ( $X$  и  $Y$ ) – по нормалям к плоскостям симметрии;
- б) в кристалле с симметрией  $3L_2$  все три координатные направления соответствуют трем осям 2-го порядка;
- в) в кристалле с симметрией  $3L_2 3PC$  координатные направления связаны с направлениями, каждое из которых представлено осью 2-го порядка, совпадающей с нормалью к плоскости симметрии, перпендикулярной этой оси.

- Название «**ромбическая сингония**» связано с поперечным сечением в виде ромба простых форм, присутствующих в огранке этих классов (ромбическая бипирамида, ромбическая призма и др.).
- Поэтому весьма часто используемый в научных публикациях термин «**орторомбическая сингония**», являющийся, по существу механическим переводом с английского языка слова orthorombic, выглядит как искусственный американизм.
- По логике внедрения этого термина столицу России следует на русском языке называть словом «**Москау**», а столицу Китая - не Пекином, а «**Бейджюнгом**»



-Ты слушай меня, Легкоступов. В русском языке есть слова, их там много, когда их составляешь вместе - получаются предложения, где есть подлежащее, сказуемое и прочая светотень! И всё это - ВЕЛИКИЙ РУССКИЙ ЯЗЫК!!! Ты понял меня Легкоступов?

- Так вот, у нас Великий Русский Язык! В нем переставь местоимение, сказуемое и подлежащее - и появится интонация!!!

- "Наша Маша горько плачет!" или "Плачет наша Маша - горько" .... Ты понимаешь? Это-ж поэзия! Это-ж - былины,

- А есть вообще предложения в одно слово: Моросит. Вечереет. Смеркается. Ты чувствуешь, Легкоступов?

- Так точно, товарищ командир!

Звучат во всех краях планеты  
 Без перевода, как **Москва**,  
 Большевики, Октябрь, Советы,  
 Мир, спутник, - русские слова.

*Александр Твардовский  
 О новом слове (1959 г.)*



*орторомбическая  
сингония -  
это вопиющая  
безграмотность!*

*(все равно что Москву назвать Москау)*

## Средняя категория $a = b \neq c$

### 1) **Тетрагональная сингония**

$$a = b \neq c, \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$$

### 2) **Гексагональная сингония**

$$a = b \neq c, \alpha = \beta = 90^\circ, \gamma = 120^\circ$$

Внутри **гексагональной сингонии** выделяют две **подсингонии**:

2а) **собственно гексагональную** подсингонию

(если порядок главной оси равен 6)

2б) **тригональную** подсингонию

(если порядок главной оси равен 3).

Термин **Тригональная сингония** -  
на структурном уровне  
**кристаллографически неинтеллигентен**  
(хотя, увы, весьма распространен)

ФУ! КАК  
НЕКУЛЬТУРНО!..

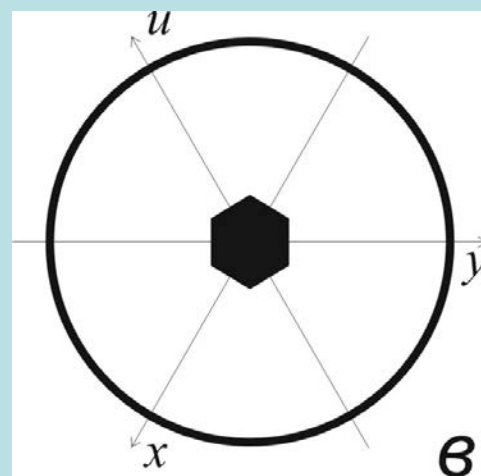
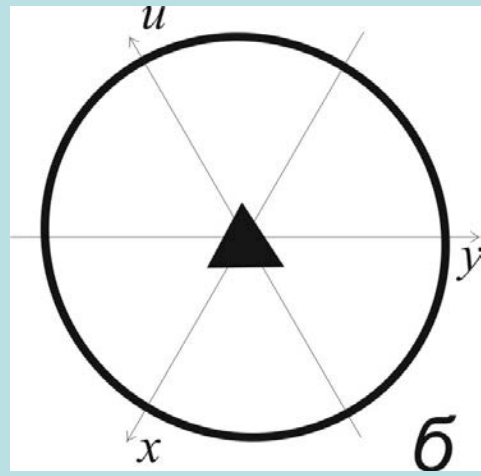


Официальный сайт международного союза  
кристаллографов:

Note: *there is no "trigonal" lattice system. To avoid confusion of terminology, the term "trigonal lattice" is not used.*

*In three dimensions, the hexagonal and trigonal crystal systems are combined into one hexagonal crystal family*

Тригональная подсингония	$L_3 C_3$	
3	тригональная подсингония	
$L_3 C_3/S_6$		
$\bar{3}$	тригональная подсингония	
$L_3 3P C_{3v}$		
3m	тригональная подсингония	
$L_3 3L_2 D_3$		
32	тригональная подсингония	
$L_3 3L_2 3PC D_{3d}$		
$\bar{3}m$	тригональная подсингония	



$$a = b \neq c, \alpha = \beta = 90^\circ, \gamma = 120^\circ$$



**тригональная подсингония**

(порядок главной оси равен 3)

**гексагональная подсингония**

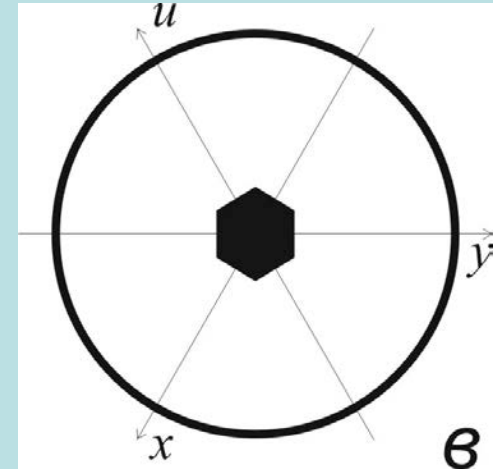
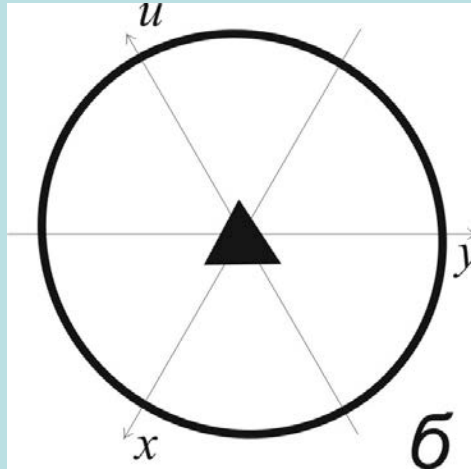
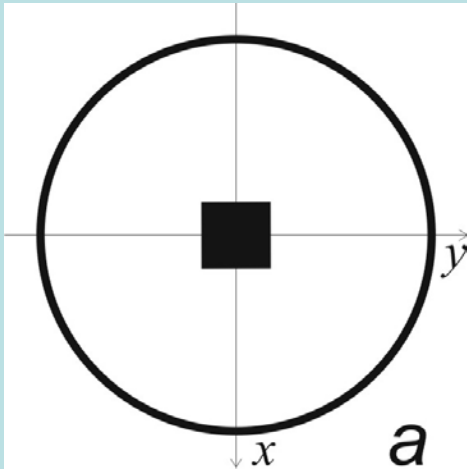
(порядок главной оси равен 6)

Гексагональная подсингония		$L_6 C_6$	
6	гексагональная подсингония		
$L_6 C_6/S_6$			
$\bar{6}$	гексагональная подсингония		
$L_6 C_{3h} C_3$			
$\bar{6}$	гексагональная подсингония		
$L_6 PC C_{6h}$			
$6/m$	гексагональная подсингония		
$L_6 6P C_{6v}$			
$6mm$	гексагональная подсингония		
$L_6 6L_2 D_6$			
622	гексагональная подсингония		
$L_3 L_3 P D_{3h}$			
$\bar{6}m2$	гексагональная подсингония		
$L_6 L_6 7PC D_{6h}$			
$\bar{6}m\bar{2}$	гексагональная подсингония		

## ***Средняя категория $a = b \neq c$***

Из условия эквивалентности двух горизонтальных координатных направлений ( $a = b$ ) следует, что симметрия кристаллов средней категории описывается группами с единственной осью высшего порядка. С этой осью совмещают координатное направление  $Z$ , ориентируя его вертикально. Две другие оси –  $X$  и  $Y$  – выбирают в плоскости, перпендикулярной главной оси, по осям 2-го порядка или нормалям к плоскостям. Если же горизонтальных особых направлений в кристалле нет, то координатные оси выбирают по ребрам. Угол  $\gamma$  между осями  $X$  и  $Y$  определяется порядком главной оси и равен  $90^\circ$  в случае присутствия оси 4-го порядка и  $120^\circ$ , если присутствуют оси 3-го и 6-го порядков.

# Средняя категория $a = b \neq c$



Обратим внимание, что в координатной системе в гексагональной сингонии появляется еще одна ось ( $u$ ) в горизонтальной плоскости, перпендикулярная оси  $z$ . С осями  $x$  и  $y$  эта ось  $u$  образует угол в  $120^\circ$ . **На первый взгляд это глупость**: пространство однозначно описывается тремя различными координатными направлениями. Но как мы вам покажем чуть позже, введение этой дополнительной оси облегчает геометрические процедуры в кристаллографии, другими словами **кристаллографически оправдано**.

# Вывод классов высшей категории

## Допустимые сочетания углов:

Сочетания осей      Сумма углов

$$L_2 \ L_2 \ L_2 \ L_3 \quad 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 270^\circ$$

$$L_2 \ L_2 \ L_4 \ L_2 \quad 60^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 240^\circ$$

$$L_2 \quad 45^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 225^\circ$$

$$L_5 \ L_2 \ L_2 \ L_6 \quad 36^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 216^\circ \quad \text{не в кристаллах}$$

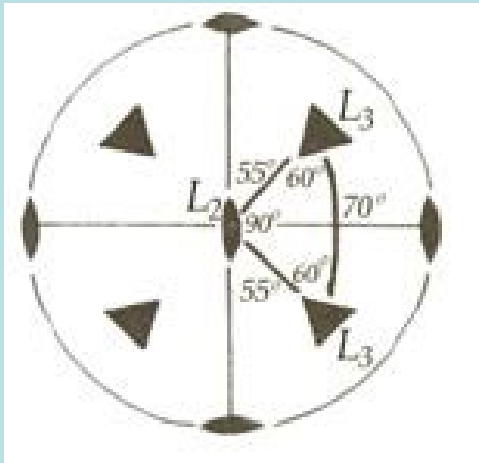
$$L_2 \ L_2 \quad 30^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 210^\circ$$

$$L_7\text{-итд} \ L_2 \ L_2 \quad *^\circ + 90^\circ + 90^\circ \Rightarrow 180^\circ \quad \text{не в кристаллах}$$

$$L_3 \ L_3 \ L_2 \quad 60^\circ + 60^\circ + 90^\circ = 210^\circ$$

## Допустимые сочетания углов:

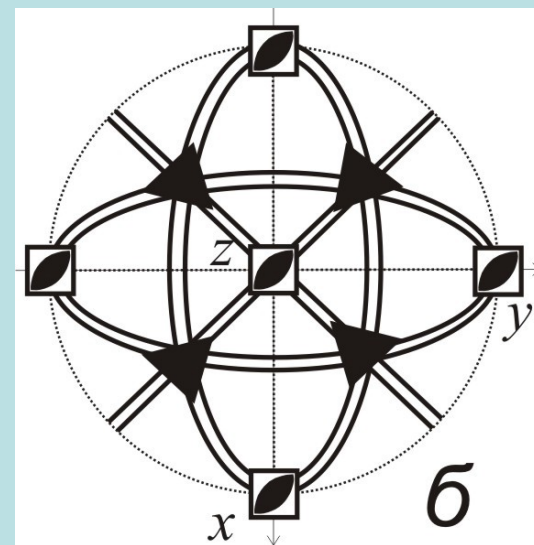
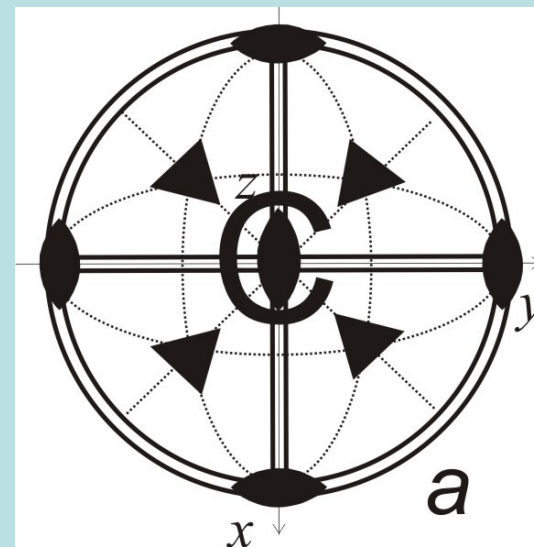
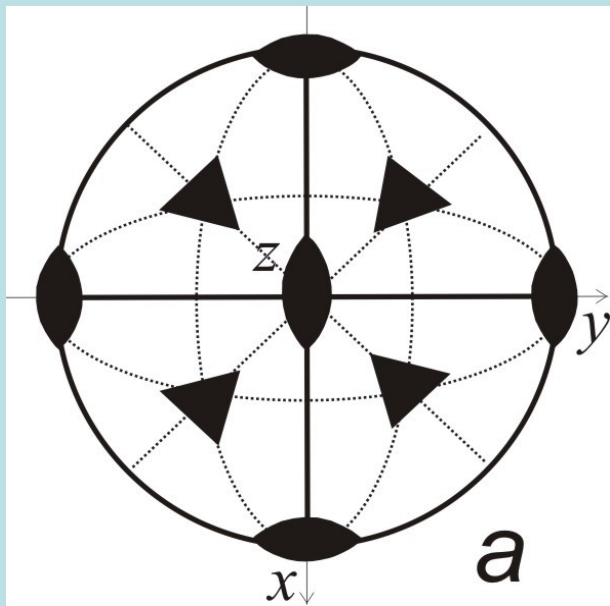
Сочетания осей	Сумма углов
$L_2 L_2 L_2 L_3 L_2$	$90^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 270^\circ$
$L_2 L_4 L_2 L_2$	$60^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 240^\circ$
$L_5 L_2 L_2 L_6 L_2$	$45^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 225^\circ$
$L_2$	$36^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 216^\circ$ не в кристаллах
$L_7\text{-итд} L_2 L_2$	$30^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 210^\circ$
$L_3 L_3 L_2$	$*^\circ + 90^\circ + 90^\circ \Rightarrow 180^\circ$ не в кристаллах
$L_4 L_3 L_2$	$60^\circ + 60^\circ + 90^\circ = 210^\circ$
$L_6 L_3 L_2$	$45^\circ + 60^\circ + 90^\circ = 195^\circ$
	$30^\circ + 60^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ НЕЛЬЗЯ!
<i>Кстати!</i> $L_5 L_3 L_2$	$36^\circ + 60^\circ + 90^\circ = 186^\circ > 180^\circ$ (квазикристаллы)



$$L_3 L_3 L_2$$

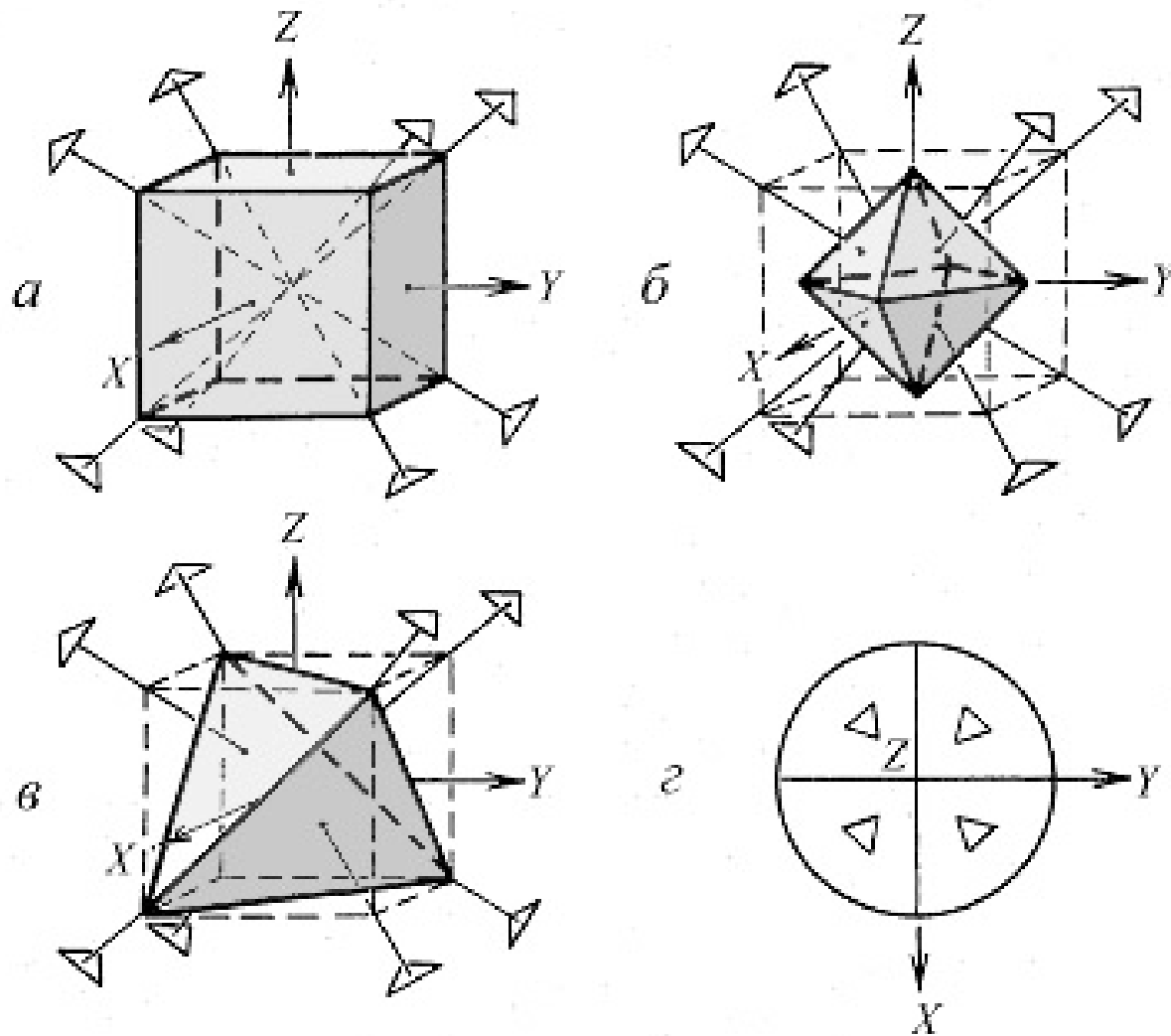
Расположив рассчитанный треугольник на сфере и размножив данные элементы симметрии, получим стереографическую проекцию еще одной осевой группы –  $3L_24L_3$

$$\underline{L_3 L_3 L_2} \quad \underline{60^\circ + 60^\circ + 90^\circ = 210^\circ}$$

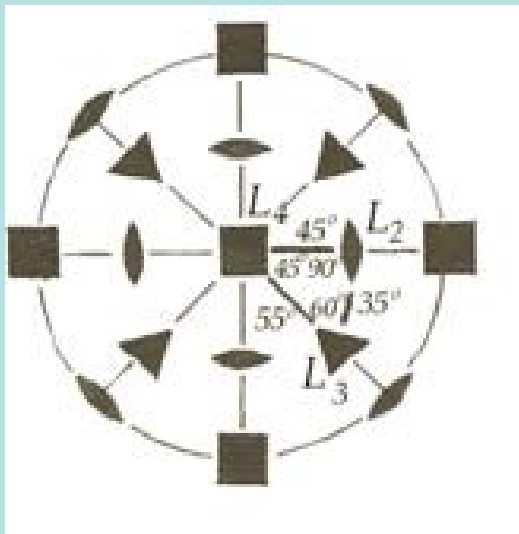


*Три класса с  
тетраэдрическим  
осевым набором*

*Три веселых друга*



. Расположение координатных направлений X, Y, Z и четырех осей 3-го порядка в кубе (а), октаэдре (б), тетраэдре (в) и стереограмма этих направлений (г)

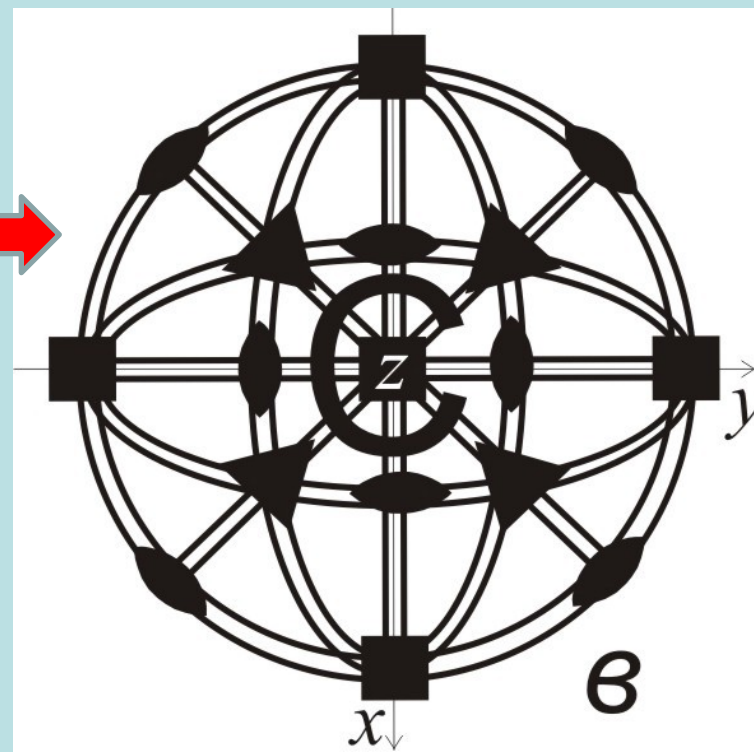
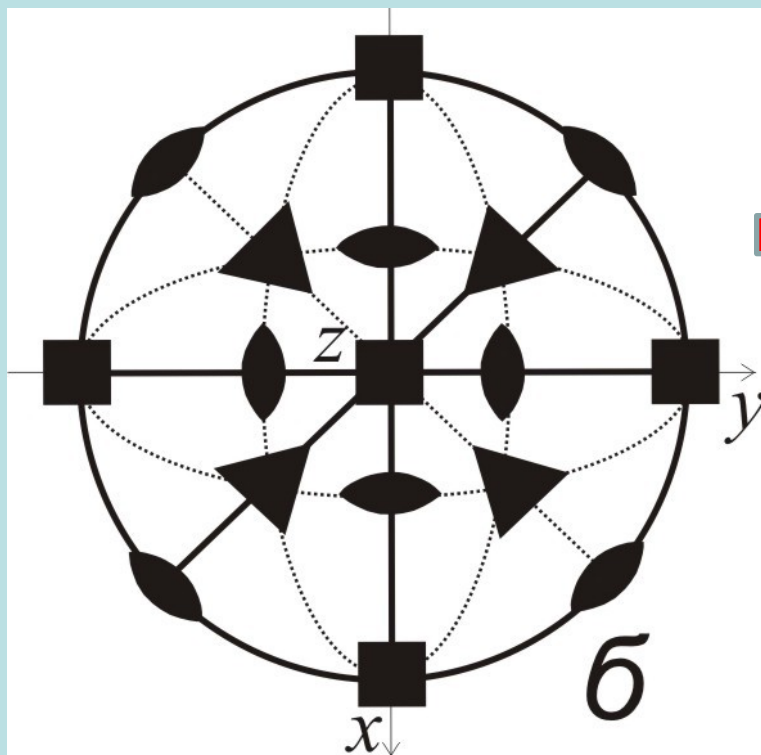


$$L_4 L_3 L_2$$

Расположив рассчитанный треугольник на сфере и размножив данные элементы симметрии, получим стереографическую проекцию еще одной осевой группы :

$$3L_4 4L_3 6L_2$$

$L_4 L_3 L_2$   $45^\circ + 60^\circ + 90^\circ = 195^\circ$



*Два класса с октаэдрическим осевым набором*

# Высшая категория $a = b = c$

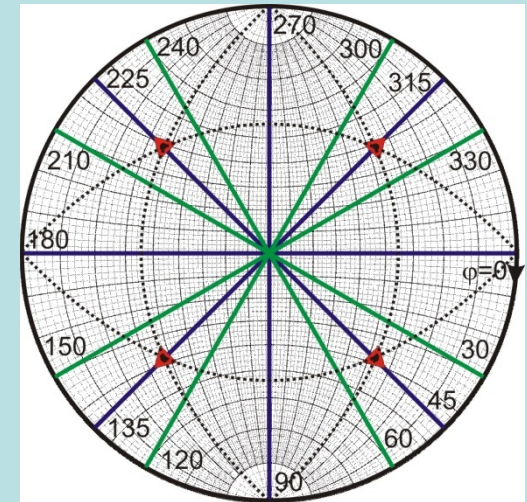
1) **Кубическая сингония:**

$$a = b = c, \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$$

Пока только она



Равенство координатных осей приводит к тому, что равнонаклонно к координатным направлениям возникает наклонная ось третьего порядка. Если размножить ее элементами симметрии, находящимися в координатных осях, то получится 4 наклонные оси третьего порядка, **равноудаленных** от различных выходов координатных направлений. На трафарете, эти позиции осей третьего порядка отмечены красными треугольниками.



Категория	НИЗШАЯ $a \neq b \neq c$			СРЕДНЯЯ $a = b \neq c$			ВЫСШАЯ $a = b = c$		
	Триклинная $\alpha \neq \beta \neq \gamma$	Моноклиная $\alpha = \beta = 90^\circ$ $\gamma \neq 90^\circ$	Ромбическая $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	Тетрагональная $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	Гексагональная $\alpha = \beta = 90^\circ$ $\gamma = 120^\circ$		Кубическая $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$		
Сингония					Тригональная подсингония	Гексагональная подсингония			
$C_n$	$L_1 C_1$  1 моназодр	$L_2 C_2$  2 осевой диэдр		$L_4 C_4$  4 тетрагональная пирамида	$L_3 C_3$  3 тригональная пирамида	$L_6 C_6$  6 гексагональная пирамида	Обозначения Символ Брауэ <span style="color:red">Символ Шенфлиса</span>		
$C_{ni}$ ( $S_n$ )	$L_1/C C_1/S_2$  1 планисоид	$L_2/P C_2/S_1$  2 плоскостной диэдр		$L_4 C_4i/S_4$  4 тетрагональный тетраэдр	$L_3 C_3i/S_6$  3 ромбоэдр	$L_6 C_6i/S_3$  6 тригональная бипирамида	Стереографическая проекция класса симметрии		
$C_{nh}$		$L_2PC C_{2h}$  2 ромбическая призма		$L_4PC C_{4h}$  4 тетрагональная бипирамида	$L_3PC C_{3h}$  3 тригональная бипирамида	$L_6PC C_{6h}$  6 гексагональная бипирамида	Международный символ <span style="color:blue">Форма общего положения</span>		
$C_{nv}$			$L_22P C_{2v}$  2 ромбическая пирамида	$L_44P C_{4v}$  4 тетрагональная пирамида	$L_33P C_{3v}$  3 тригональная пирамида	$L_66P C_{6v}$  6 гексагональная пирамида			
$D_n$			$3L_2 D_2$  3 ромбический тетраэдр	$4L_4 D_4$  4 тетрагональный тетраэдр	$3L_3 D_3$  3 тригональный тетраэдр	$6L_6 D_6$  6 гексагональный тетраэдр	$3L_4 L_3 T$  3 тетраэдр	$3L_4 L_6 L_2 O$  3 тетраэдр	
$D_{nd}$			$L_22L_2P D_{2d}$  2 тетрагональный октаэдр	$L_33L_3PC D_{3d}$  3 тригональный октаэдр		$3L_4 L_6 P T_d$  3 тетраэдр			
$D_{nh}$			$3L_23PC D_{2h}$  3 ромбическая бипирамида	$4L_43PC D_{4h}$  4 тетрагональная бипирамида		$L_33L_4P D_{3h}$  3 тригональная бипирамида	$L_66L_7PC D_{6h}$  6 гексагональная бипирамида	$3L_4 L_3 PC T_h$  3 тетраэдр	$3L_4 L_6 L_2 9PC O_h$  3 тетраэдр

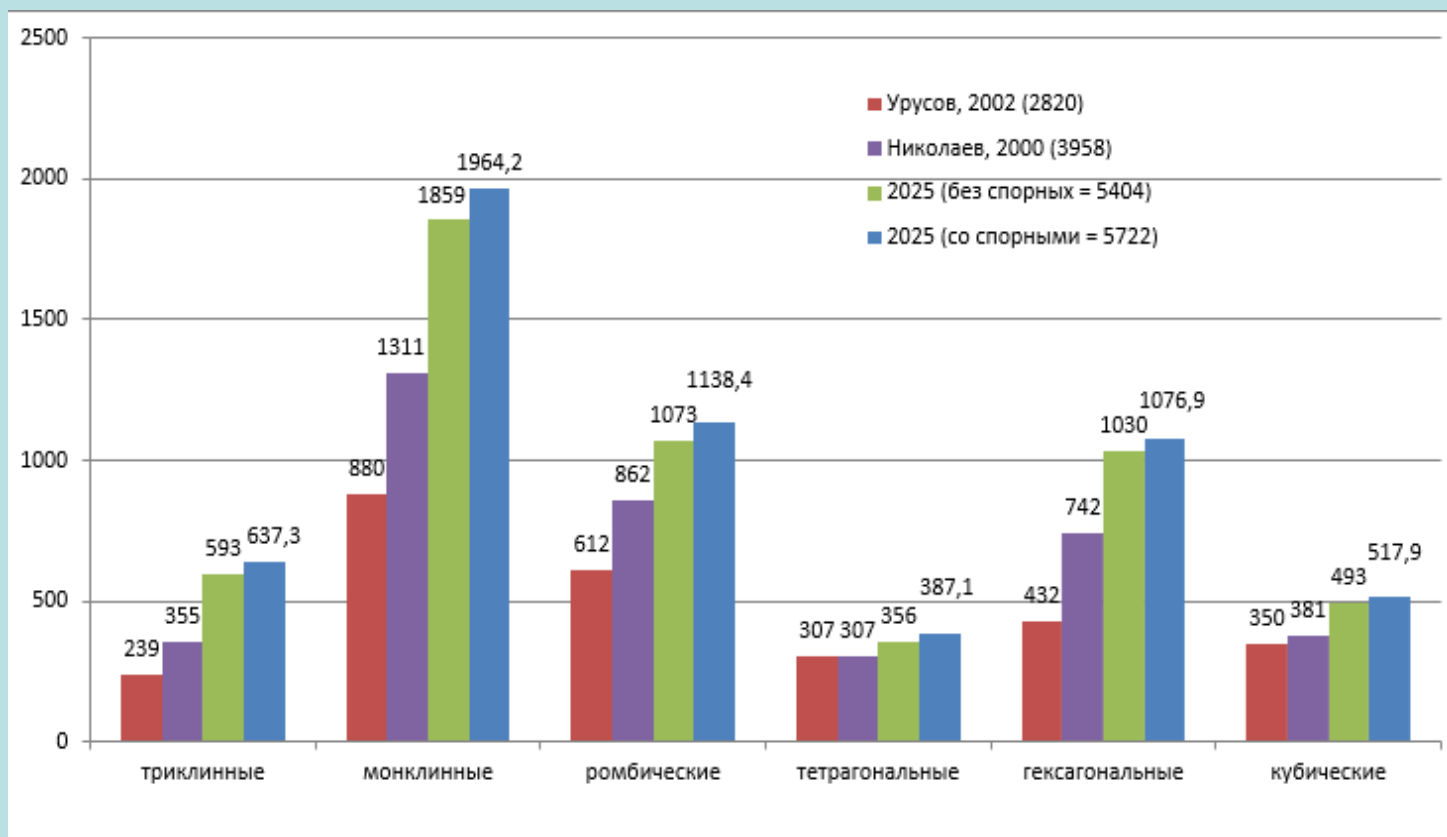
## Распределение классов по сингониям

- Триклинная – 2
- Моноклиная – 3
- Ромбическая – 3
- Тетрагональная - 7
- Гексагональная - 12
- (7+5)
- Кубическая - 5

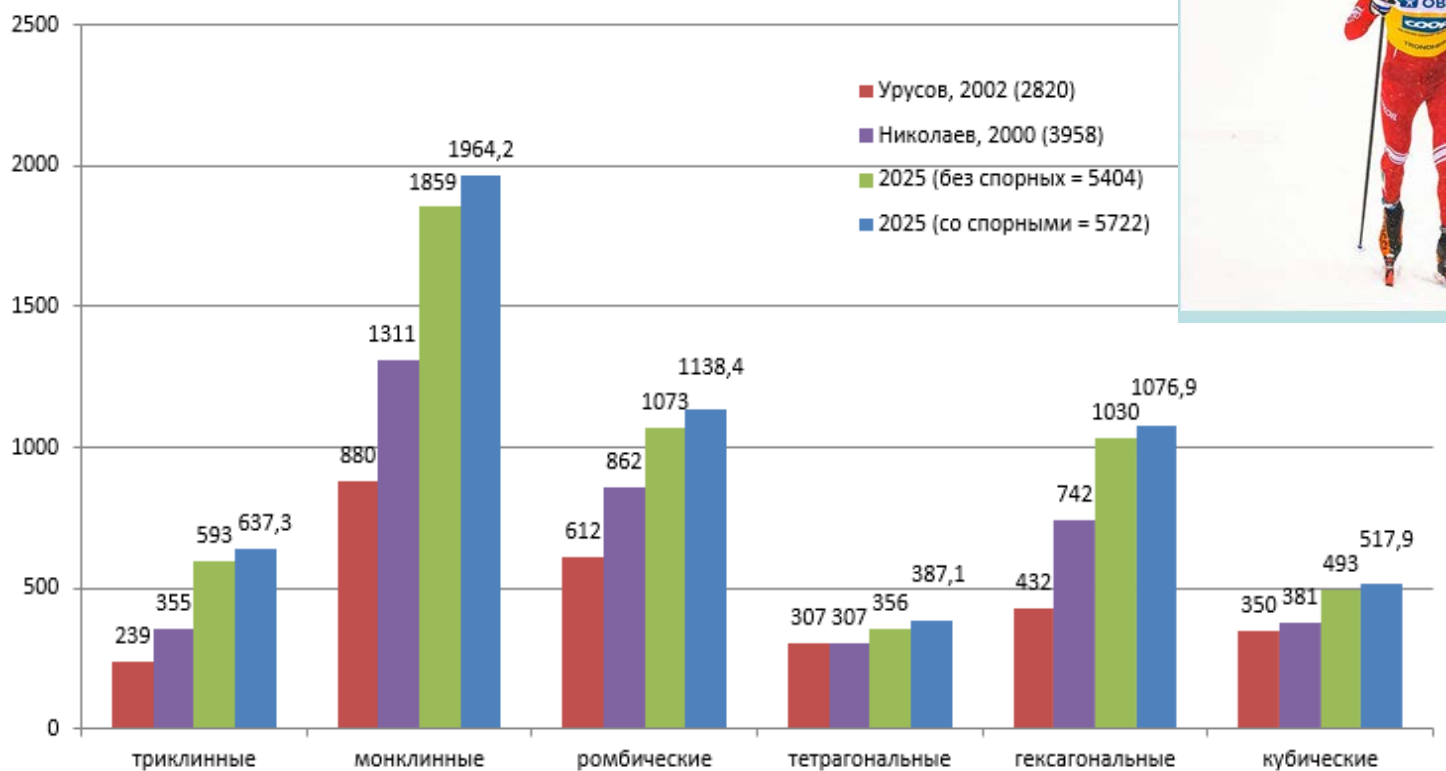
В целом, если говорить о распространенности **минералов** различных сингоний в природе, то можно отметить следующее. На настоящий момент в природе известно около 6000 минералов. Среди них резко преобладают кристаллы низшей и средней категорий.

Лидер - моноклинная сингония,  
намного опережая ромбическую по  
распространенности.

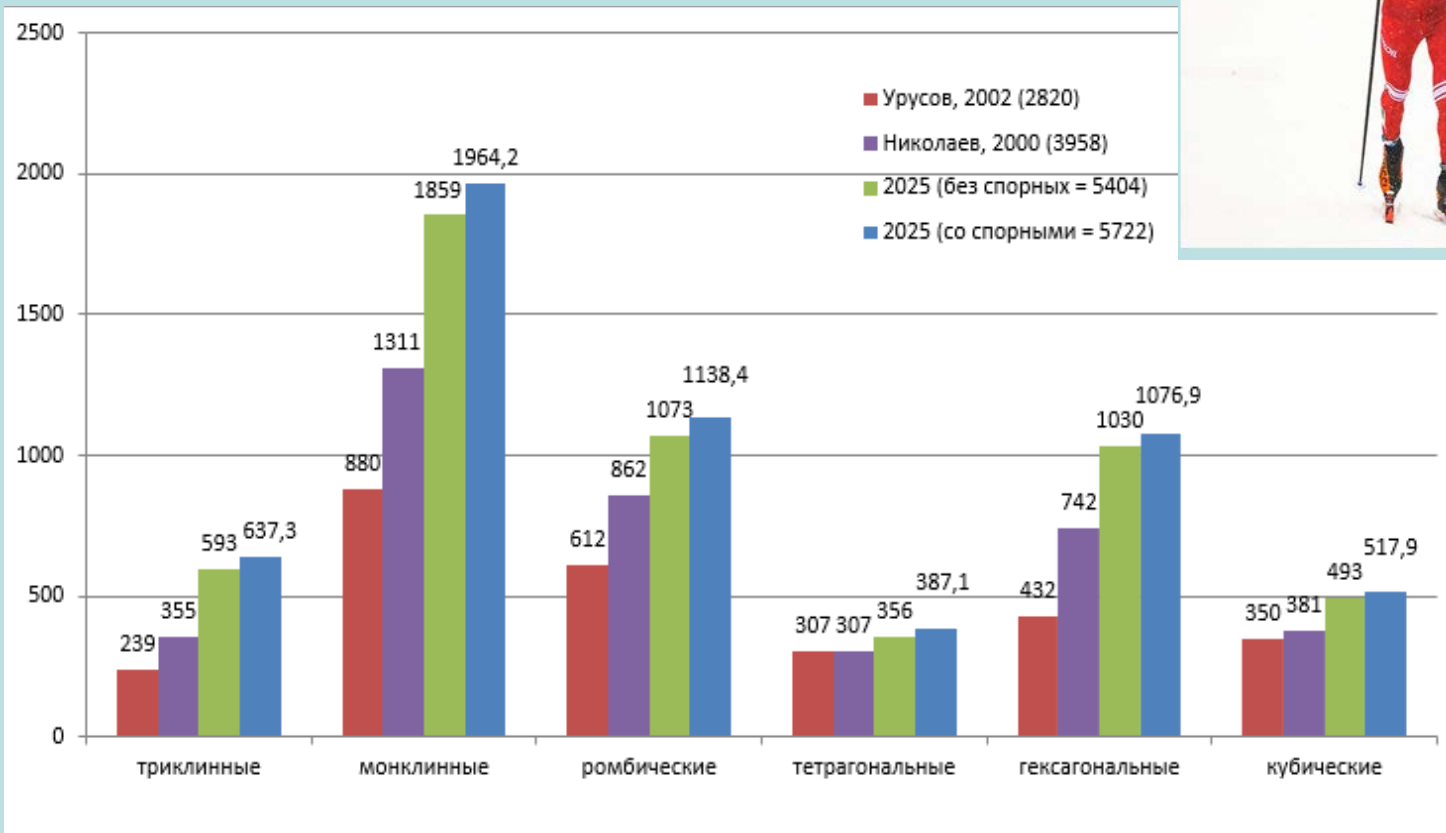
- Из 6006 записей в анализируемой базе данных [[IMA Mineral List](#)] однозначно привязано к определенной сингонии 5404 минерала, а неоднозначно – 5722 минерала. Как видно, добавление дробных неоднозначных определений абсолютно не повлияло на общую картину распределения по сингониям и тем более, на их ранги.



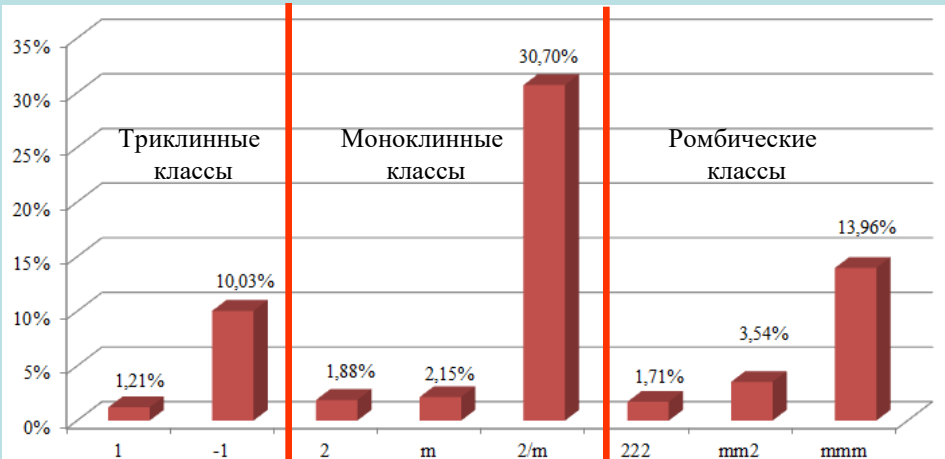
- Произошли изменения рангов по сравнению с выборкой 2002 года: триклинная сингония сменила низший 6-ой ранг на 4-ый, обогнав и кубическую и тетрагональную сингонию.
- Также отметим увеличившийся разрыв между моноклинной (ранг 1) и ромбической (ранг 2) сингонией. Если в 2002 году разница между ними составляла 9,5%, то в настоящее время она выросла до 14,5%.



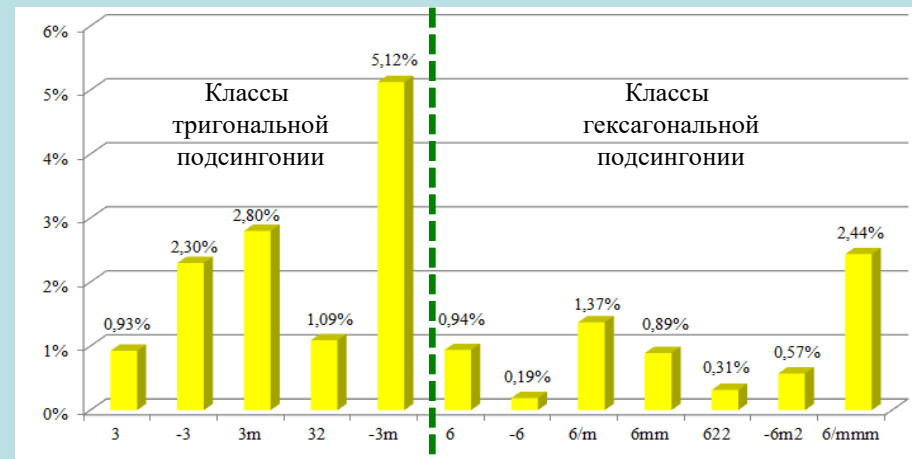
- С другой стороны, если в 2002 году разница между ромбической и гексагональной сингонией (ранг 3) была весьма существенна и составляла 180 минеральных видов (6,4% выборки), то в 2025 году разрыв сильно уменьшился и составил всего 61 минеральный вид (1,07%).



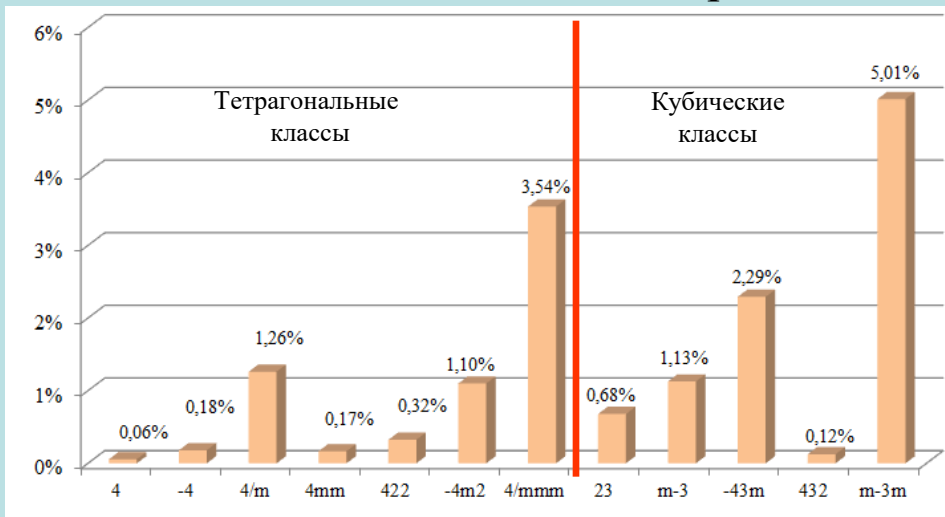
# Распределение минералов по классам



Распределение минеральных видов по классам низшей категории



Распределение минеральных видов по классам гексагональной сингонии



Распределение минеральных видов по классам тетрагональной и кубической сингонии

Лишь семь классов обладают повышенной распространенностью. Явным лидером является *голоэдрический* моноклинный класс  $L_2PC$  на долю которого приходится более 30% всех кристаллических структур минералов.

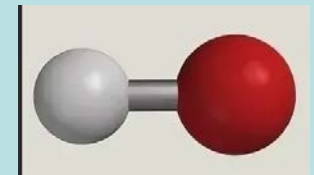
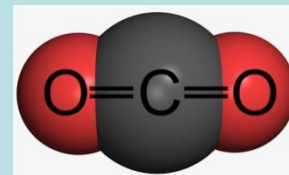
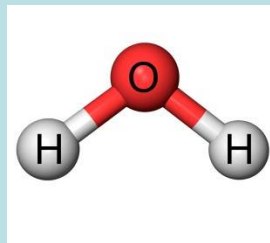
А из семи выявленных распространенных классов пять являются голоэдрическими (при этом отмечены все сингонии, кроме тетрагональной, а гексагональная сингония представлена голоэдрией тригональной подсингонии). Голоэдрический класс  $6/mmm$  гексагональной подсингонии не попал в число распространенных.



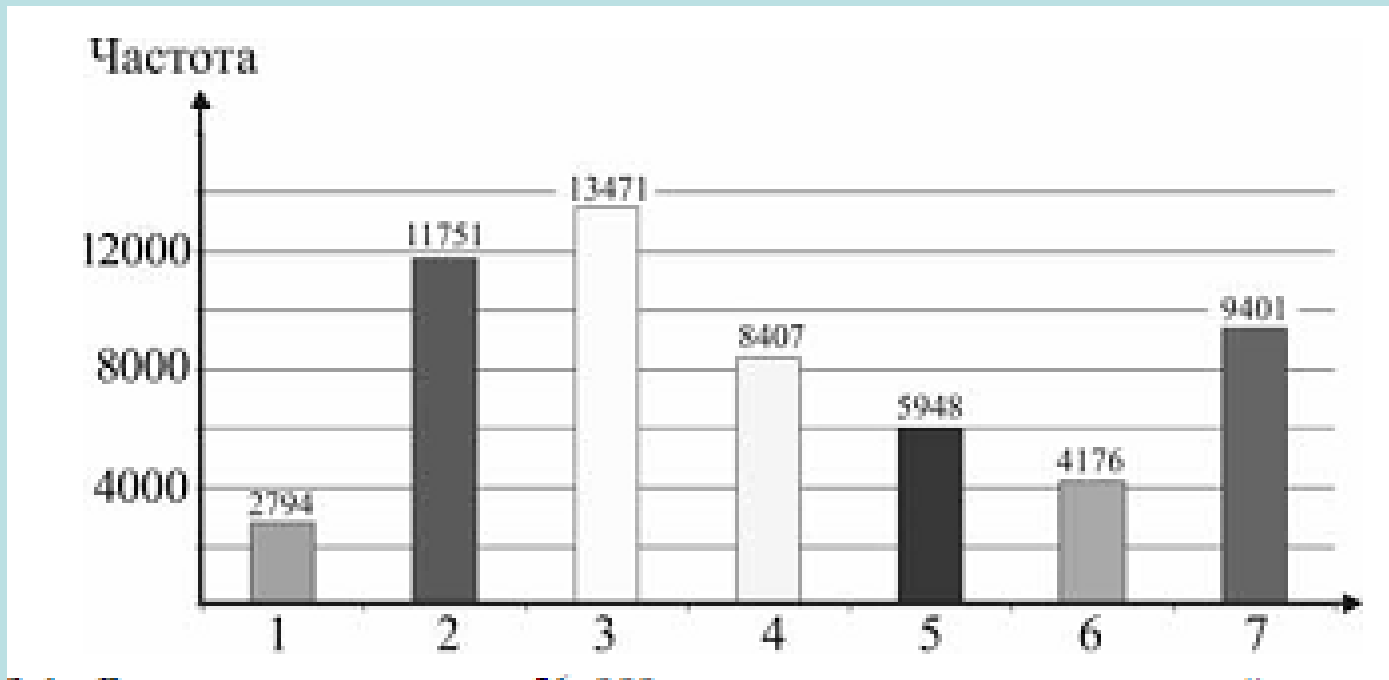
# Почему?

Такая неравномерность связана с тем, что большая часть из минеральных видов встречается (находится и изучается) только в самой поверхностной оболочке Земли – Земной коре, образуясь в результате реакций выветривания и изменения горных пород под действием воды, атмосферы и солнечного света.

Поэтому они часто включают в свой состав молекулы воды  $H_2O$ , углекислоты  $CO_2$ , гидроксил-группу  $OH$ - и другие атомные группировки, отличающиеся невысокой собственной симметрией, что приводит к понижению симметрии всего кристалла (принцип Кюри!)



# Симметричная статистика минералов и неорганических соединений РАЗЛИЧНА!



Распространенность 56 000 неорганических соединений по сингониям и подсингониям:

- 1 — триклинная сингония , 2 — моноклинная
- 3 — ромбическая 4 — *тригональная (п.с.)*
- 5 — тетрагональная, 6 — *гексагональная (п.с.)* ,
- 7 — кубическая

# Символики

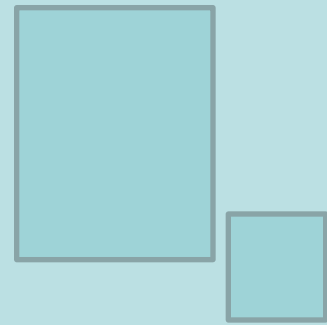
Учебная символика Браве громоздка и  
**не экономна**



Учебная символика Браве не несет  
информации о направлениях, с ней  
**можно легко потеряться**



# Символика Шенфлиса



Символика точечных групп симметрии, предложенная немецким математиком А. Шенфлисом, позволяет одной буквой с соответствующим нижним индексом не только охарактеризовать весь набор элементов симметрии конкретной точечной группы, но и объединить родственные группы в отдельные семейства.

Для не кубических классов симметрии достаточно всего двух букв:  $C$  и  $D$ . Подстрочный цифровой индекс указывает на порядок главной оси, а буквенный на расположение плоскостей (при наличии).



## Символика Шенфлиса

**v** (*vertical* – вертикальный) – для плоскостей, расположенных вдоль единственной или главной оси симметрии, которая **МЫСЛИТСЯ** вертикальной

**h** (*horisontal* – горизонтальный) – для плоскости, перпендикулярной к главной оси симметрии

**d** – (*diagonal* - для вертикальных плоскостей симметрии, делящих пополам угол между побочными осями 2-го порядка – **плоскости делители**

**s** (от нем. *spiegel* - зеркало) – для плоскости неопределенной ориентации, т.е. не фиксированной ввиду отсутствия в группе иных элементов симметрии

# Символика Шенфлиса

1) Циклические группы – группы с единственным особым направлением, представленным поворотной осью симметрии, – обозначаются буквой **C**, с нижним цифровым индексом **n**, соответствующим порядку этой оси (например, класс  $C_4$  содержит только ось  $L_4$ ;  $C_1$  – только ось  $L_1$ ).

2) Группы с единственной инверсионной осью симметрии сопровождаются нижним индексом **i**, например  $C_{3i} = \bar{4}_3$ . Если же инверсионной оси предпочитают ее зеркальный эквивалент, то группа с такими осями обозначается **S<sub>n</sub>**

3) Группы симметрии с побочными (горизонтальными) – перпендикулярными главному направлению – осями 2-го порядка обозначаются **D<sub>n</sub>**, где нижний индекс **n** соответствует не только порядку главной поворотной оси, но и количеству побочных осей 2-го порядка

*Переход от учебной символики Браве к символам Шенфлиса предполагает владение правилами взаимодействия элементов симметрии.*

*Все сочетания элементов симметрии (в низшей и средней категории) можно разделить на два типа:*

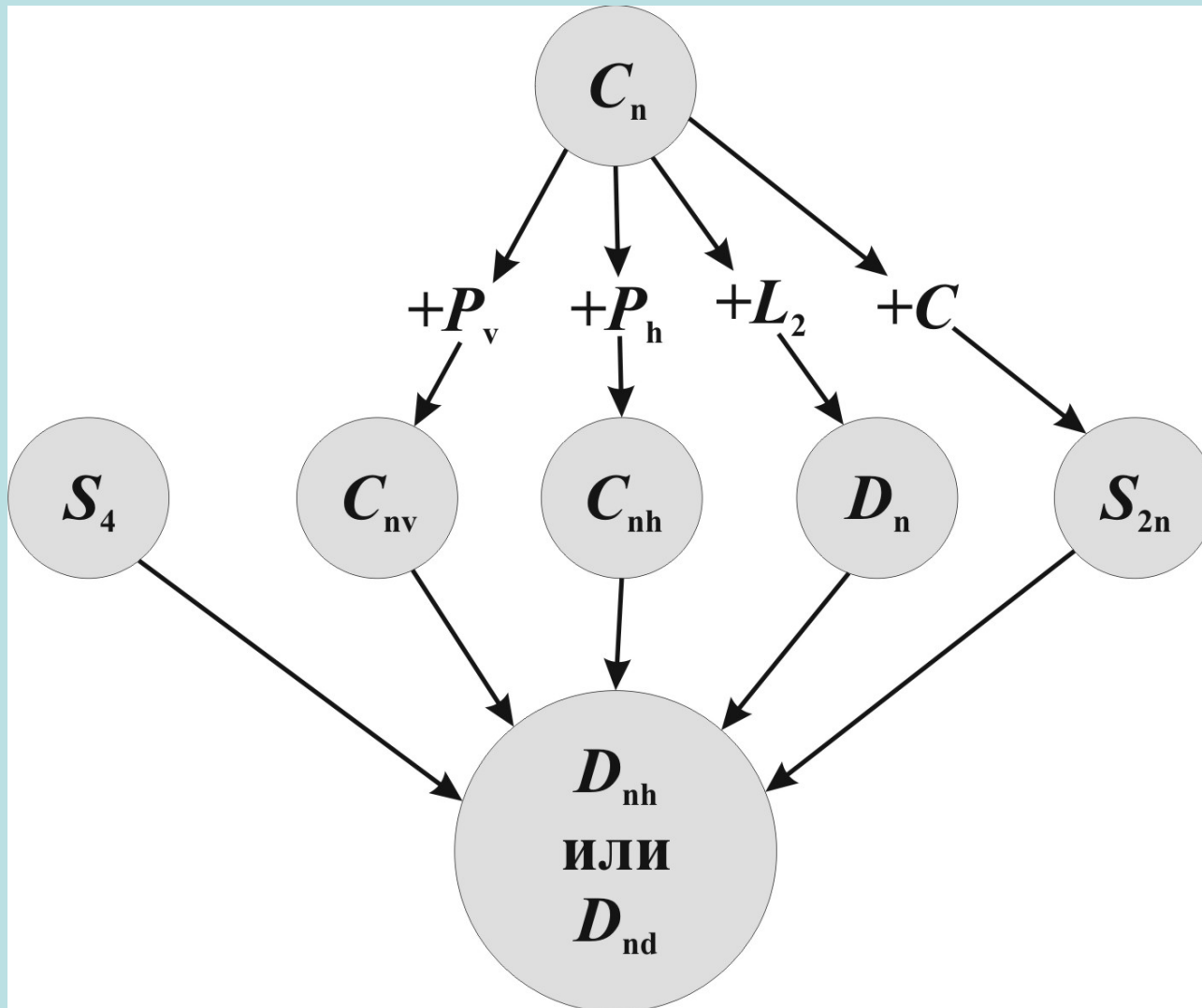
*C и D:*

*Единственную (или главную) ось Шенфлис мыслил вертикальной.*

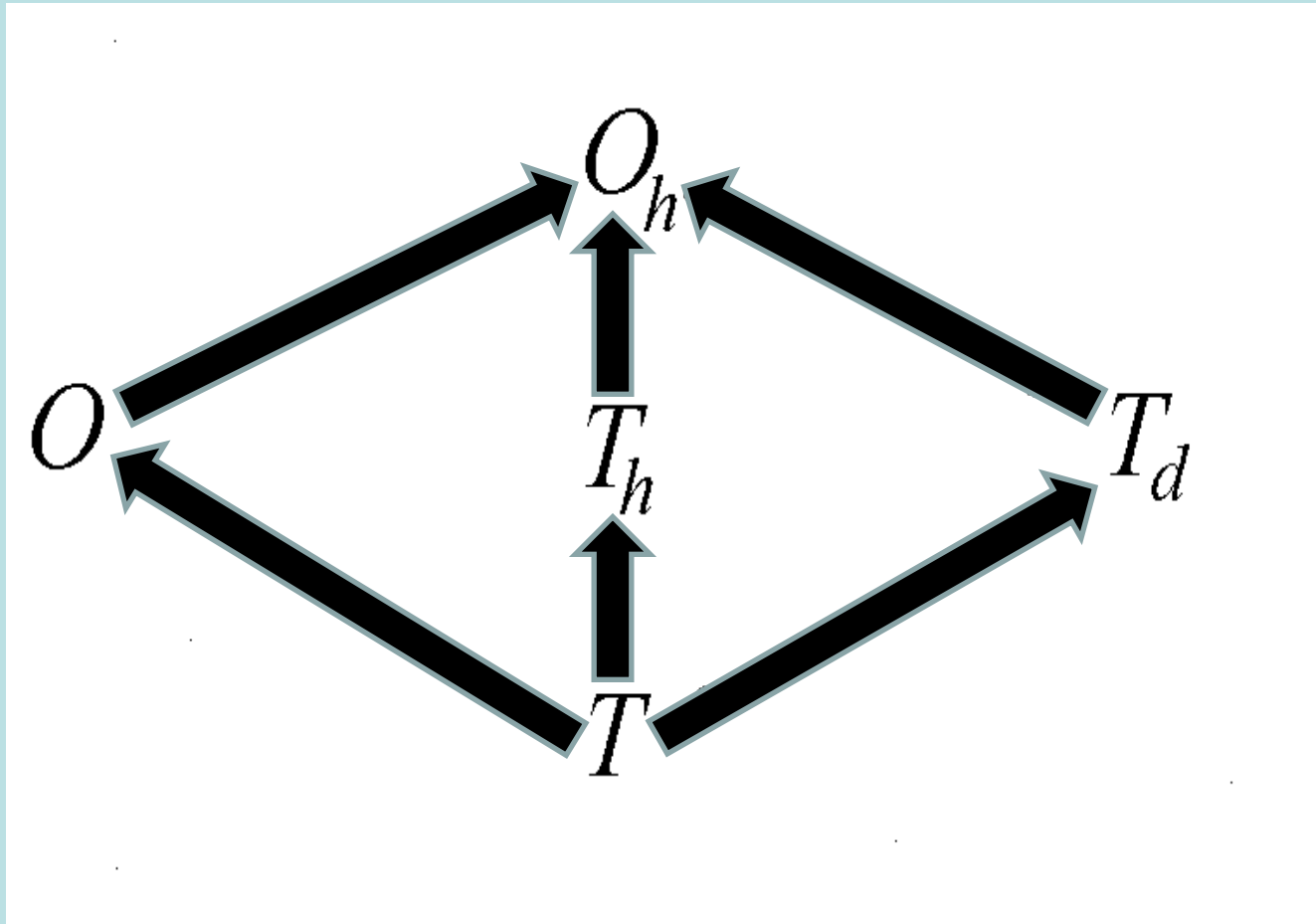
К этой оси можно добавлять элементы симметрии:

- перпендикулярную плоскость  $P$  – получим классы  $C_{nh}$  (при  $n=2k$  характер оси не изменится, добавится центр инверсии, а если  $n=2k+1$ , то ось станет зеркальной  $L_3P_{\perp}$  Шенфлис обозначил такие классы  $S_n$ , а соответствующие им инверсионные оси -  $C_{ni}$
- Параллельные плоскости  $P$ – получим классы  $C_{nv}$
- $C_{1h} = C_{1v} = C_s$
- Перпендикулярные оси  $L_2$  – получим классы  $D_n$

# Взаимосвязь классов симметрии с единичным направлением



Для кубических кристаллов используются две буквы:  $T$  и  $O$ , которые обозначают осевой набор тетраэдра и октаэдра соответственно.



## Симметрия кристаллов



Предлагаемый межфакультетский курс «Симметрия кристаллов» представляет собой популярное изложение фундаментальных основ кристаллографии с элементами кристаллохимии. Программа

### Содержание лекций :

1. [Лекция 01 от 11 февраля 2026 г.](#)
2. [Лекция 02 от 18 февраля 2026 г.](#)
3. [Лекция 03 от 25 февраля 2026 г.](#)

### ЗАЧЕТ:

1. ВХОД В ЗАЧЕТ ПОКА ЗАКРЫТ

### Справочный материал

1. ["32 класса симметрии" Плакат](#)
2. [Сетка Вульфа в формате BMP, радиусом 10 см с разрешением 300 dpi в архиве](#)
3. [Трафарет для рисования, радиус 8 см](#)
4. [Бланк для описания кристаллического многогранника](#)
5. [Правила формирования символа Шенфлиса](#)
6. [Правила формирования международного символа](#)
7. ["47 простых форм" Плакат](#)
8. [Анимация взаимосвязи тетрагональных форм](#)
9. [Анимация взаимосвязи гексагональных форм](#)
10. [Простые формы низшей категории](#)
11. ["Простые формы кубической сингонии" Плакат](#)
12. [Название класса по общей форме](#)
13. [Анимация взаимосвязи кубических форм в prp-формате \(14,5 М\). Выполнил студент 1 курса Волков А.С. в рамках курсовой работы на кафедре кристаллографии](#)
14. [Правила формирования международного символа](#)
15. [Правила формирования символа Шенфлиса](#)



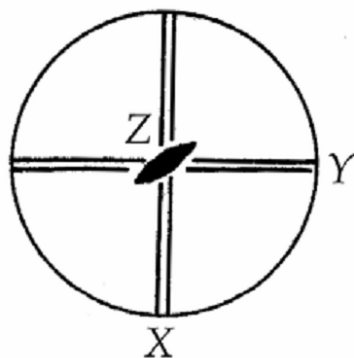
Главный недостаток как символики Шенфлиса, так и учебной символики Браве – *отсутствие строгой привязки к координатной системе.*



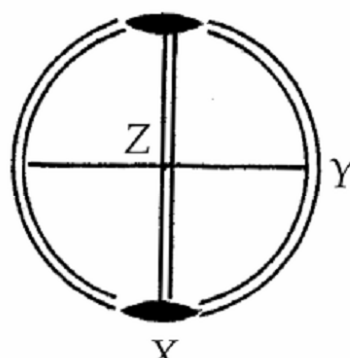
Это, в принципе,  
одно  
и тоже!

$C_{2v}$

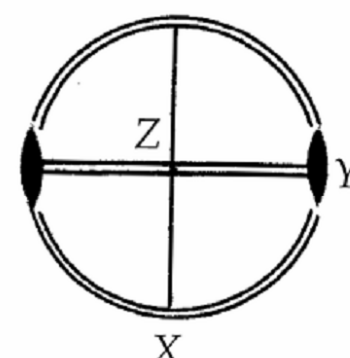
$L_2PC$



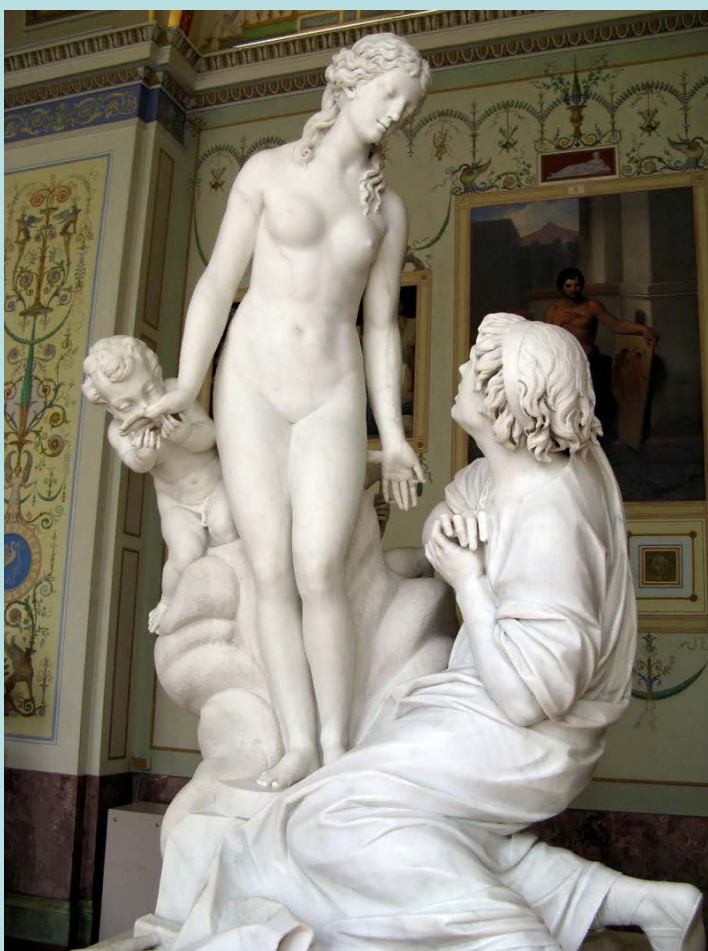
a



б



в



Этого недостатка лишена  
используемая в настоящее  
время  
в кристаллографии

международная символика  
(символика Германа – Могена),

Эта символика  
практически *лишена недостатков*:

изящна,

компактна,

однозначно привязана к координатным осям

# ***Символика Германа-Могена (международная)***

Была предложена немецким кристаллографом Карлом Германом в 1928 году и модифицированы французским минералогом Шарлем Могеном в 1931 году. Также называются международной символикой, поскольку используются в International Tables for Crystallography, начиная с их 1-ого издания в 1935 году.

*Международный символ* класса также как и символ Шенфлиса, достаточно компактен и предполагает знание теорем взаимодействия элементов симметрии. В отличие от символов Браве и Шенфлиса он четко указывает на ориентацию кристалла относительно выбранных координатных осей.

**Главное правило формирования международного символа**  
***Международный символ фиксирует элементы симметрии на  
всех не эквивалентных особых направлениях.***

# **Символика Германа-Могена (международная)**

**Поворотные оси** обозначаются арабскими цифрами:  
**1, 2, 3, 4, 6**

**Инверсионные оси** - арабскими цифрами с верхним подчеркиванием:  **$\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{6}$**

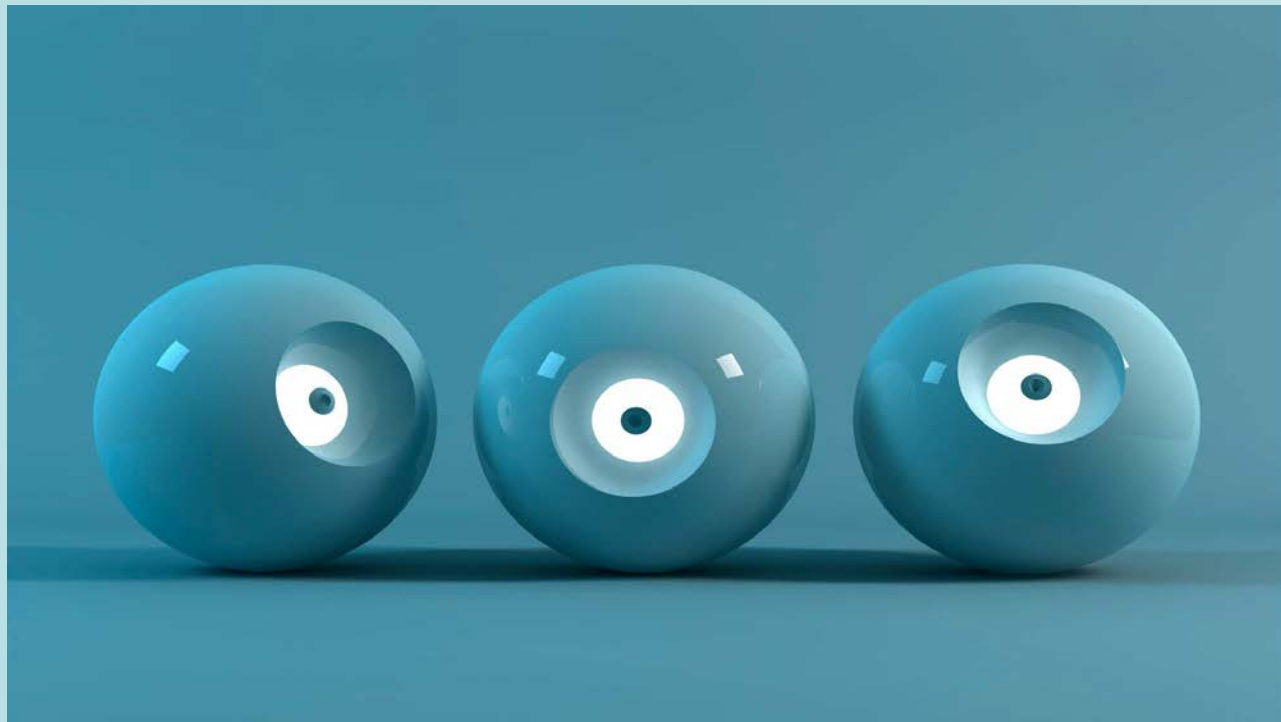
Плоскости зеркального отражения обозначаются маленькой латинской буквой ***m*** и фиксируются нормалью!!!

**Центр инверсии** обозначается как инверсионная ось:  **$\bar{1}$**

# Не эквивалентных особых направлений не может быть больше трех






Типичный студент, описывающий  
класс симметрии по  
международной символике



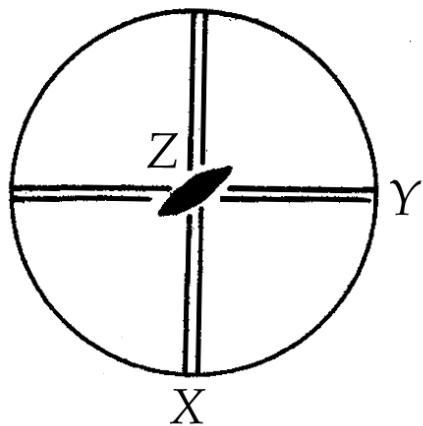
Специальные 3 глаза, которые видят  
поворотные и инверсионные оси симметрии

# Символика Германа-Могена (международная)

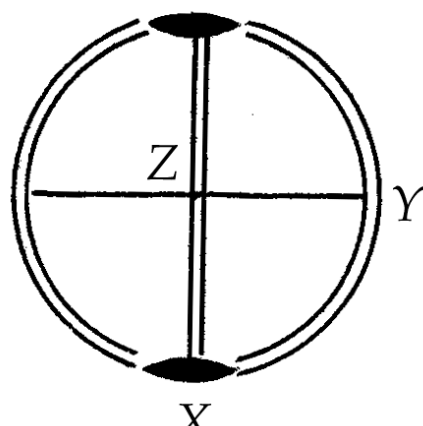
Вид международного символа зависит от категории.

		I позиция <i>Глаз 1</i> 	II позиция <i>Глаз 2</i> 	III позиция <i>Глаз 3</i> 
Низшая категория	$a \neq b \neq c$	X	Y	Z
Средняя категория	$a = b \neq c$	Z	X = Y (=U)	$\alpha/2$
Высшая категория	$a = b = c$	X = Y = Z	3	$\alpha/2$

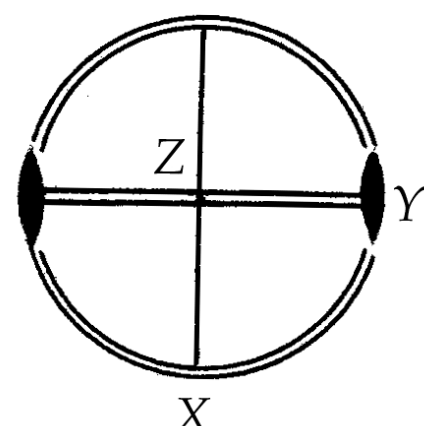
# Символика Германа-Могена



*a*



*б*



*в*

Это одно  
и то же!  $C_{2v}$ !

Э, нет! Это не  
одно и то же!

Зависимость международного  
символа группы симметрии  
 $L_22P$  ( $C_{2v}$ ) от ее ориентации  
относительно выбранных  
координатных осей:

*a* –  $mm2$ , *б* –  $2mm$ , *в* –  $m2m$



# Символика Германа-Могена (международная)

Если по выбранному направлению располагается и поворотная ось и нормаль к плоскости, то их записывают в виде дроби: в числителе – ось, в знаменателе – нормаль к плоскости

$$\text{например: } L_2PC = \frac{2}{m}$$

Обратим внимание, что центр в записи **отсутствует**. Предполагается, что читатель понимает, что если ось второго порядка перпендикулярна к плоскости, то центр неизменно возникнет ( $L_2 - P - C$ ), то есть центр заложен в записи в неявном, скрытом виде! Опускают в записи так же оси 2, если являются порожденными. **Оси высших порядков пишутся всегда (почти всегда, хи)!**

# ***Символика Германа-Могена (международная)***

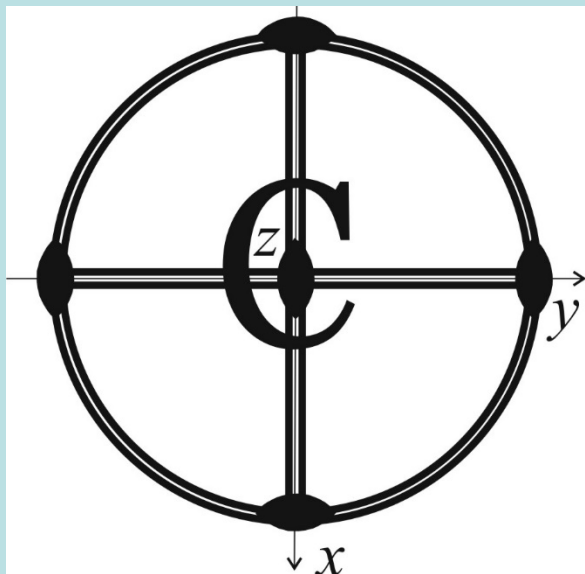
*Координатные оси всегда выбираются  
по перпендикулярам к плоскостям*

*В случае отсутствия плоскостей  
– по осям симметрии*

*При недостатке особых направлений  
- по реальным ребрам кристалла*

# Символика Германа-Могена (международная)

Таким образом, построение международного символа состоит из двух этапов: на первом (на черновике) записываются все элементы симметрии, которые фиксируются по трем особым направлениям, а на втором (на чистовике) из записи удаляется избыточная информация о тех элементах, которые могут быть получены путем взаимодействия между собой порождающих элементов, уже присутствующих в символе



(есть пара исключений но об этом не сегодня, хи-2).

$$\frac{2}{m} \quad \frac{2}{m} \quad \frac{2}{m} = mmm$$

## Симметрия кристаллов



Предлагаемый межфакультетский курс «Симметрия кристаллов» представляет собой популярное изложение фундаментальных основ кристаллографии с элементами кристаллохимии. Программа

### Содержание лекций :

1. [Лекция 01 от 11 февраля 2026 г.](#)
2. [Лекция 02 от 18 февраля 2026 г.](#)
3. [Лекция 03 от 25 февраля 2026 г.](#)

### ЗАЧЕТ:

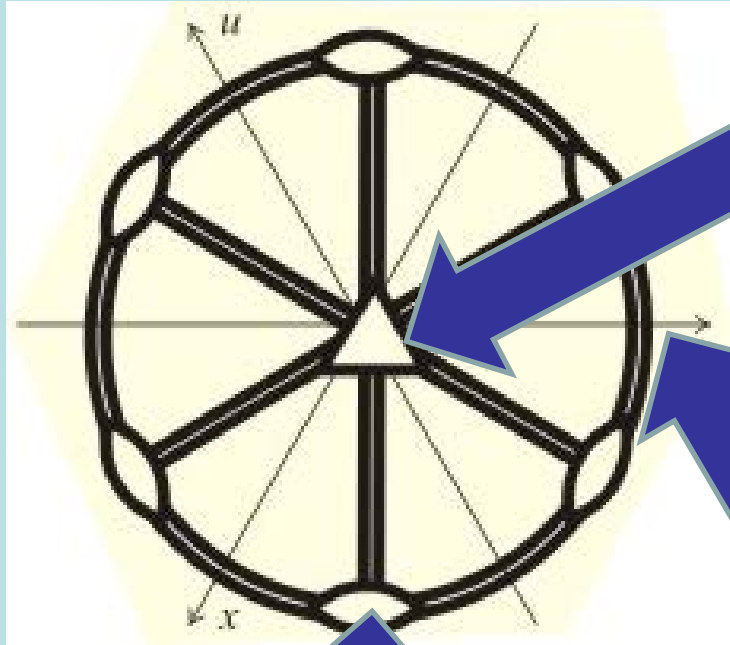
1. ВХОД В ЗАЧЕТ ПОКА ЗАКРЫТ

### Справочный материал

1. ["32 класса симметрии" Плакат](#)
2. [Сетка Вульфа в формате BMP, радиусом 10 см с разрешением 300 dpi в архиве](#)
3. [Трафарет для рисования, радиус 8 см](#)
4. [Бланк для описания кристаллического многогранника](#)
5. [Правила формирования символа Шенфлиса](#)
6. [Правила формирования международного символа](#)
7. ["47 простых форм" Плакат](#)
8. [Анимация взаимосвязи тетрагональных форм](#)
9. [Анимация взаимосвязи гексагональных форм](#)
10. [Простые формы низшей категории](#)
11. ["Простые формы кубической сингонии" Плакат](#)
12. [Название класса по общей форме](#)
13. [Анимация взаимосвязи кубических форм в prp-формате \(14,5 М\). Выполнил студент 1 курса Волков А.С. в рамках курсовой работы на кафедре кристаллографии](#)
14. [Правила формирования международного символа](#)
15. [Правила формирования символа Шенфлиса](#)



# Потренируемся



№1

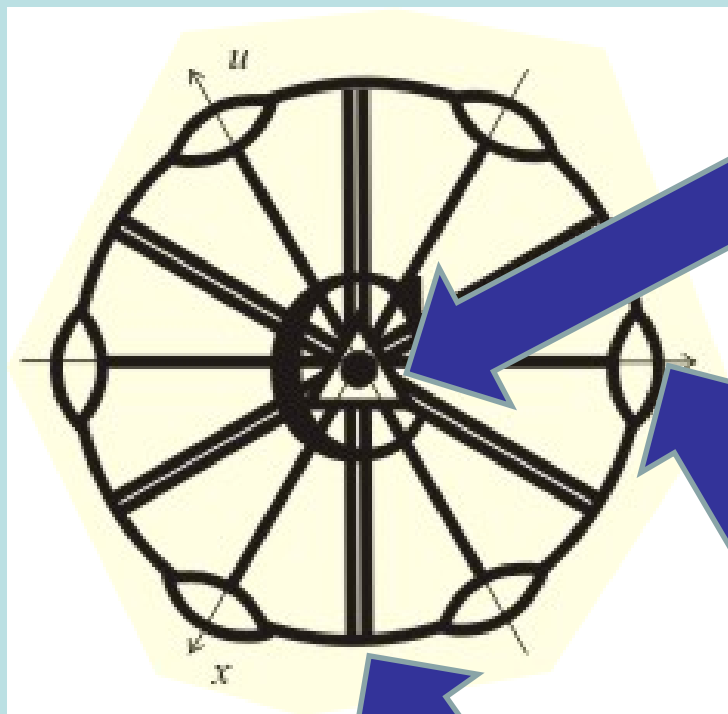


№2



№3

# Еще потренируемся



№1



№2



№3

Как Вы хотите  
меня назвать?!



# В следующий раз



## ПРОСТЫЕ ФОРМЫ КРИСТАЛЛОВ

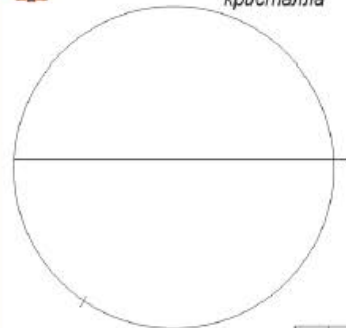


### ОБЛИК – что это?



Бланк для полного описания  
кристалла

Кристалл № \_\_\_\_\_  
ФИО, группа: \_\_\_\_\_



Дайте полное описание кристалла

категория $\alpha, \beta, \gamma$	
символ по Браве	
символ по Шенфлису	
международный символ	
класс по общей форме	

Характеристика простых форм

№	Кол-во граней	Откр. знак	Части общ.	ССГ	ВСС	Название



облик \_\_\_\_\_  
габитус \_\_\_\_\_