

Семинар №2.
Тетрагональные группы симметрии. Вывод пространственных
групп с единственной осью 4 ($\bar{4}$, 4_1 , 4_2 , 4_3)

32 КЛАССА СИММЕТРИИ КРИСТАЛЛОВ

Категория	НИЗШАЯ $a \neq b \neq c$			СРЕДНЯЯ $a = b \neq c$		ВЫСШАЯ $a = b = c$	
	Триклинная $\alpha \neq \beta \neq \gamma$	Моноклиная $\alpha = \beta = 90^\circ$ $\gamma \neq 90^\circ$	Ромбическая $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	Тетрагональная $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$		Гексагональная $\alpha = \beta = 90^\circ$ $\gamma = 120^\circ$	
Сингония				Тригональная подсингония		Гексагональная подсингония	
C_n	$L_1 C_1$ 1 монадр 	$L_2 C_2$ 2 оосовий диадр 		$L_4 C_4$ 4 тетрагональная тетрадра 	$L_3 C_3$ 3 тригональная тетрадра 	$L_6 C_6$ 6 гексагональная тетрадра 	Обозначения Символ Браве Символ Шенфлиса
C_{ni} (S_n)	$L_1/C C_1/S_2$ 1 гинаксий 	$L_2/P C_2/S_2$ 2 плоскостной диадр 		$L_4 C_4/S_4$ 4 тетрагональная дипирадра 	$L_3 C_3/S_6$ 3 ромбодр 	$L_6 C_6/S_6$ 6 тригональная дипирадра 	Международный символ Форма общего положения
C_{nh}		$L_2PC C_{2h}$ 2 ромбическая призма 		$L_4PC C_{4h}$ 4 тетрагональная дипирадра 	$L_3PC C_{3h}$ 6 тригональная дипирадра 	$L_6PC C_{6h}$ 6 гексагональная дипирадра 	
C_{nv}			$L_22P C_{2v}$ 2 ромбическая пирамида 	$L_44P C_{4v}$ 4 тетрагональная пирамида 	$L_33P C_{3v}$ 3 тригональная пирамида 	$L_66P C_{6v}$ 6 гексагональная пирамида 	
D_n			$3L_2 D_2$ 2 ромбический тетрадр 	$4L_4 D_4$ 4 тетрагональный тетрадр 	$L_33L_2 D_3$ 32 тригональный тетрадр 	$L_66L_2 D_6$ 622 гексагональный тетрадр 	$3L_44L_3 T$ 23 тригональный призматический тетрадр
D_{nd}				$L_42L_22P D_{2d}$ 4 тетрагональный октаэдр 	$L_33L_33PC D_{3d}$ 3 тригональный октаэдр 		$3L_44L_6P T_d$ 432 гексагональный тетрадр
D_{nh}			$3L_3PC D_{2h}$ 2 ромбическая дипирадра 	$L_44L_4PC D_{4h}$ 4 тетрагональная дипирадра 		$L_33L_4PC D_{3h}$ 6 тетрагональная дипирадра 	$L_66L_7PC D_{6h}$ 6 гексагональная дипирадра
						$3L_44L_3PC T_h$ 24 гексагональный тетрадр 	$3L_44L_6L_3PC O_h$ 2 октаэдр

Тетрагональная сингония относится к средней категории:

$$a = b \neq c$$

$$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$$

В точечных приближении существует 2 класса, в которых ось 4-ого порядка - единственный элемент симметрии:

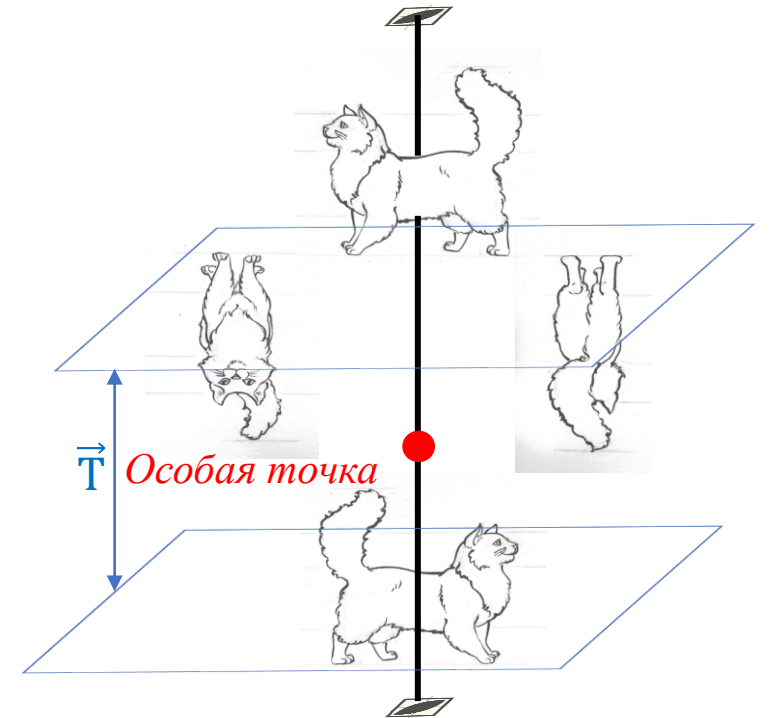
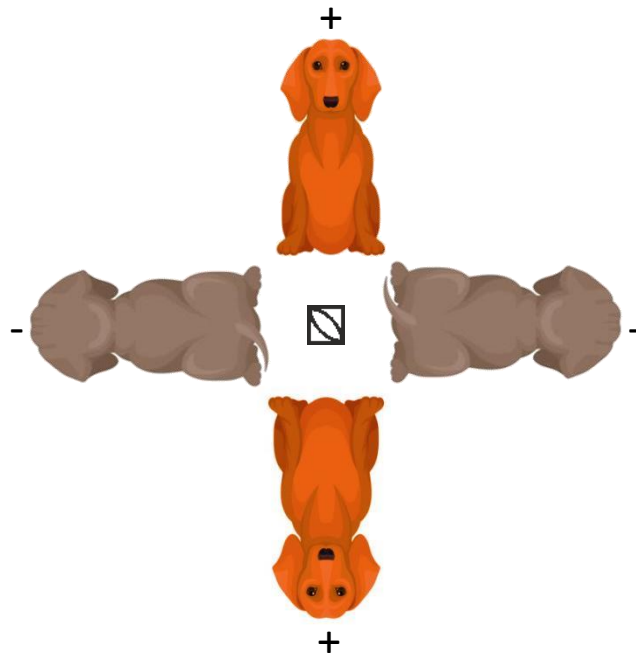
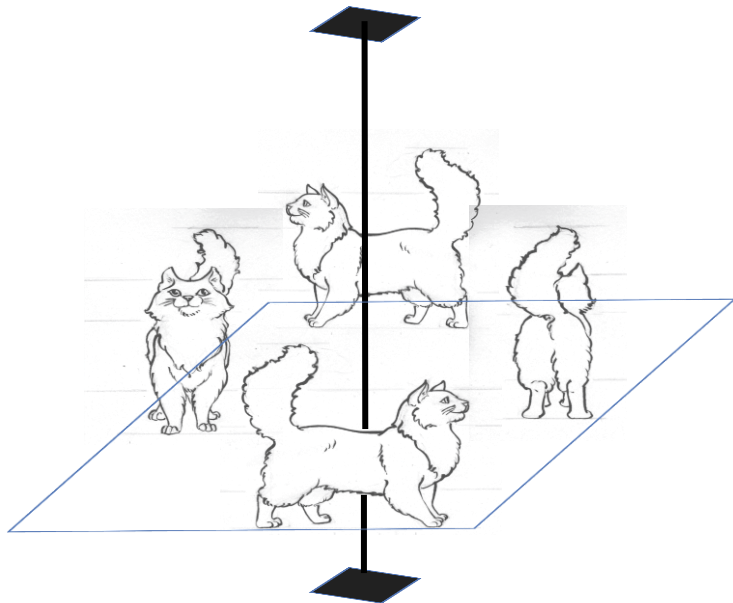
$$4 \text{ и } \bar{4}$$

Сколько же получится пространственных групп?



Оси пространственных групп тетрагональной сингонии:

- Поворотная ось 4-ого порядка 4
- Инверсионная ось 4-ого порядка $\bar{4}$
- Винтовая нейтральная ось 4-ого порядка 4_2
- Винтовая энантиоморфная правая ось 4-ого порядка 4_1
- Винтовая энантиоморфная левая ось 4-ого порядка 4_3



Поворотная ось 4

Инверсионная ось $\bar{4}$

Нейтральные

Оси 4-ого порядка

Винтовые

$\bar{4}$ инверсионная

4 поворотная

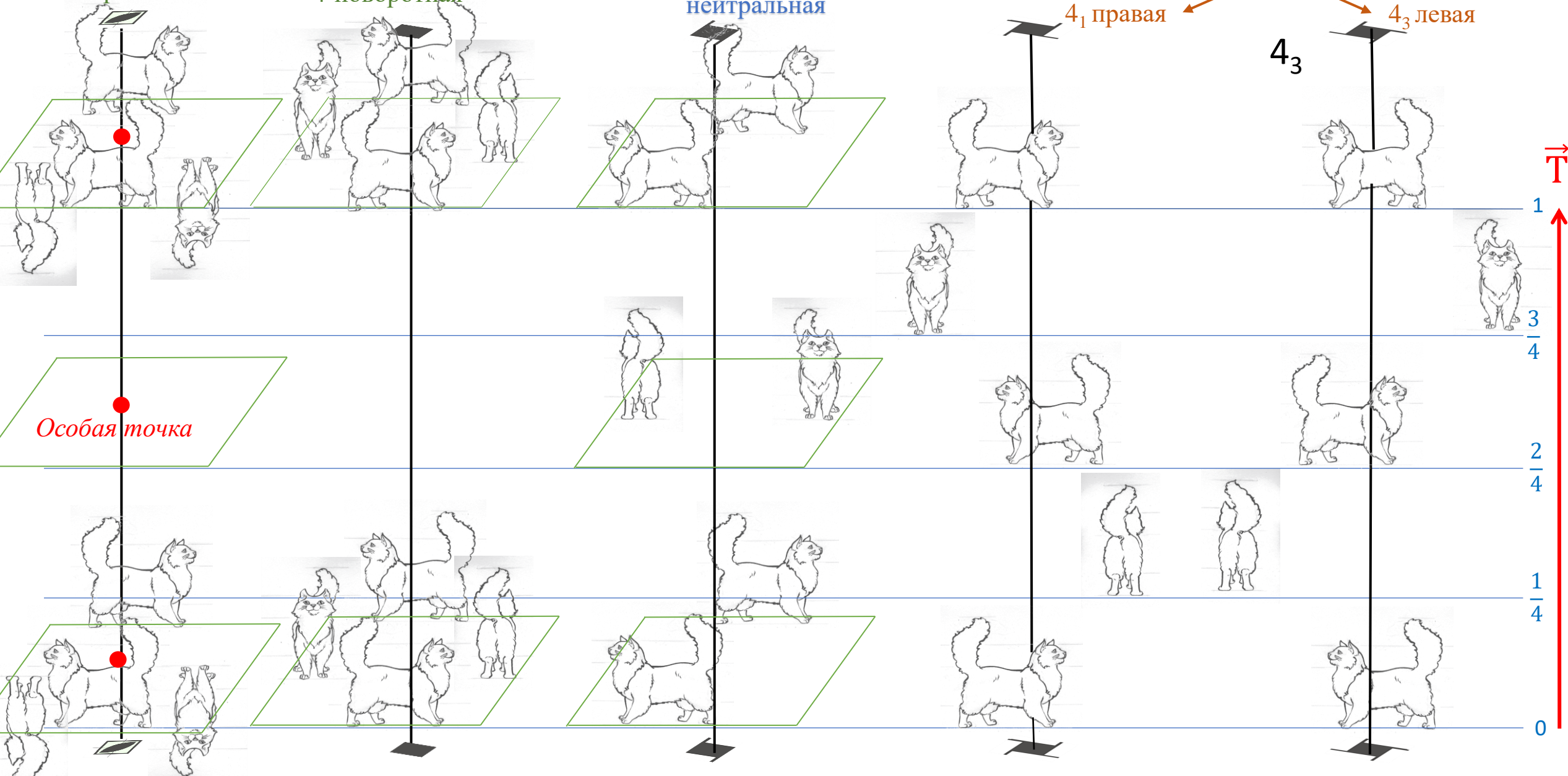
4_2 винтовая нейтральная

нейтральная

энантиоморфные

4_1 правая

4_3 левая



Особая точка

T

1

3/4

2/4

1/4

0

Оси 4-ого порядка

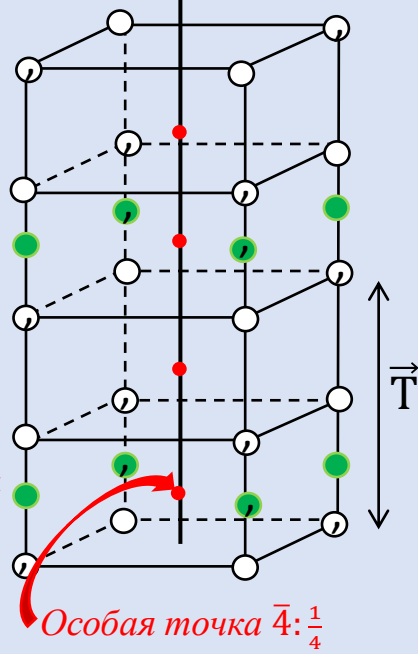
II рода



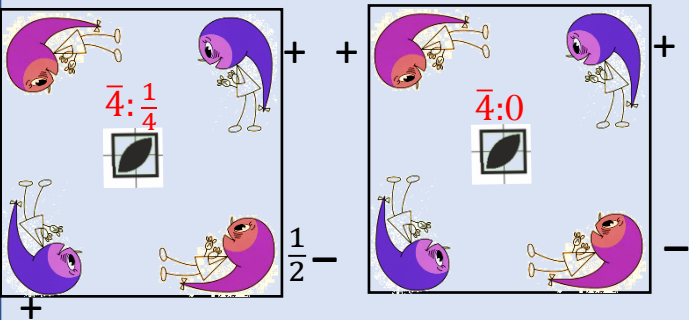
● Симметрия позиции $\bar{4}$

○ Симметрия позиции 2

Симметрия позиции 1



$\frac{1}{2}$



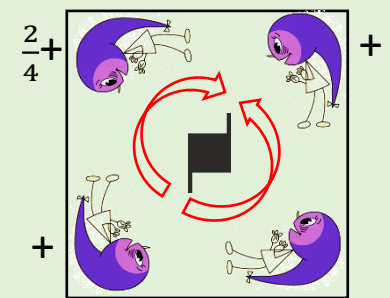
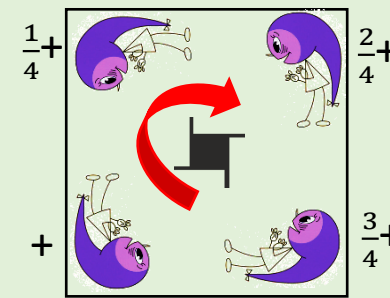
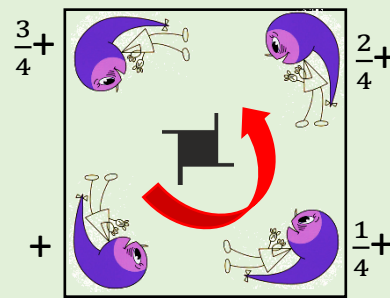
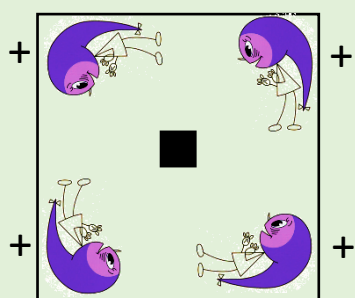
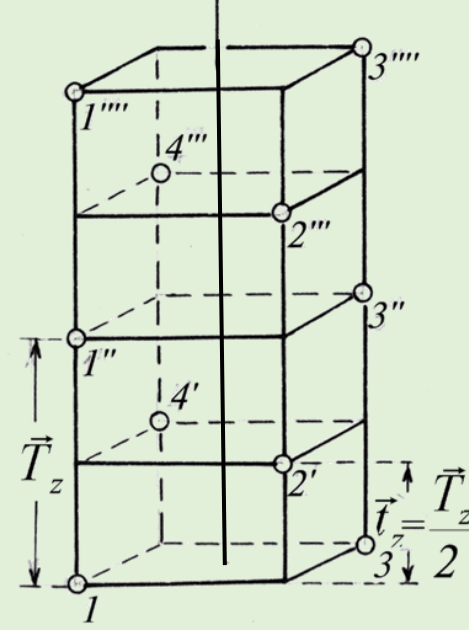
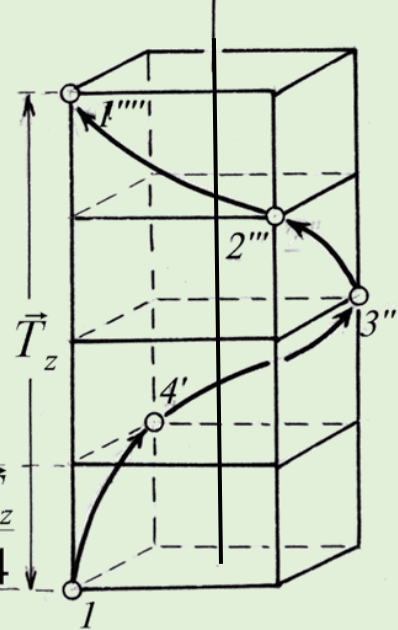
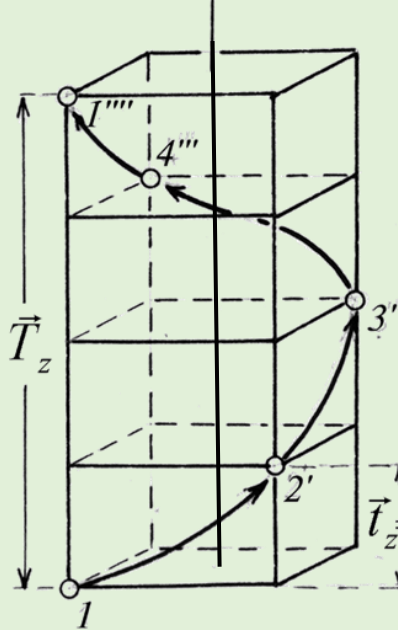
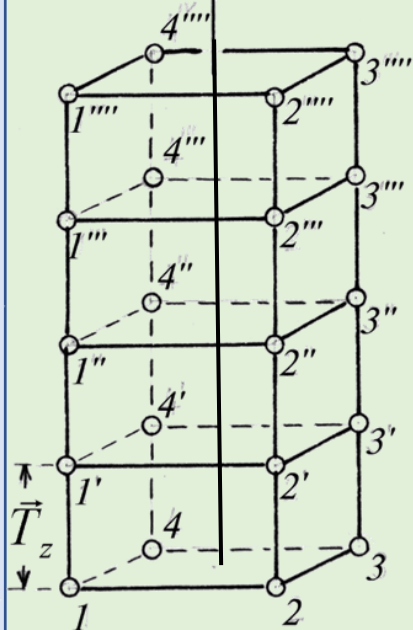
I рода

4

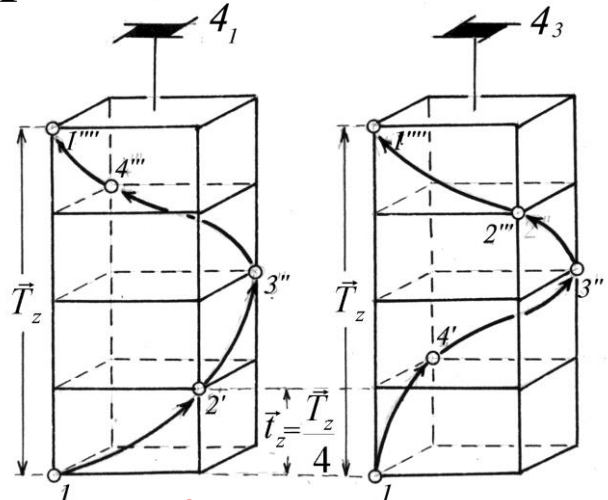
4_1

4_3

4_2



Правые и левые винты



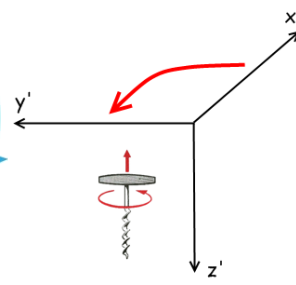
У правой 4_1 оси подъем высоты – против часовой стрелки, у левой 4_3 – по часовой стрелки



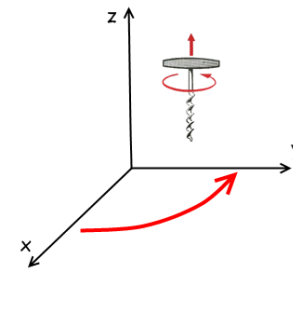
Правый поворот



Левый поворот



Левая



Правая

Практически во всем естествознании используется правая система координат



Правый шуруп всегда закручивается по часовой стрелке



Винтовые лестницы древних замков чаще всего закручены по левой спирали



Лестница Джузеппе Момо (1932) в Ватикане – двойная правая спираль



ДНК – двойная правая спираль



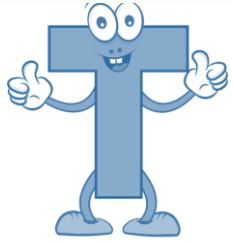
Какая дверь левая, какая правая?

ОТКРЫТЫЕ СЛОЖНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ СИММЕТРИИ. ПЛОСКОСТИ

№	Эл. симм	Гр. знак	I/II род	Низш/вышш	Вел. симм.	Операции симметрии	Матрицы операций симметрии
1	a		II	Низш.	2	$\{e, a\}$	$ \begin{matrix} a_y & 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ & 0 & \bar{1} & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} $
2	b		II	Низш.	2	$\{e, b\}$	$ \begin{matrix} b_x & \bar{1} & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} $
3	c		II	Низш.	2	$\{e, c\}$	$ \begin{matrix} c_y & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & \bar{1} & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} $
4	n		II	Низш.	2	$\{e, n\}$	$ \begin{matrix} n_y & 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ & 0 & \bar{1} & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} $
5	d		II	Низш.	2	$\{e, d\}$	$ \begin{matrix} d_y & 1 & 0 & 0 & 1/4 \\ & 0 & \bar{1} & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & 1/4 \\ & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} $

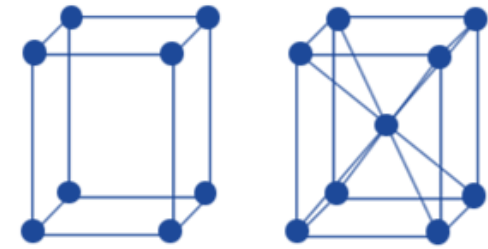
Плоскости
скользящего
отражения

Клино-
плоскости



Типы решёток Браве для тетрагональной сингонии

Я – трансляция
самый главный элемент
симметрии
пространственных групп!



Оригинальных ячеек Браве в тетрагональной сингонии две: ***P*** и ***I***

Симметрия тетрагональной ячейки Браве соответствует голоэдри тетрагональной сингонии: **$4/m\bar{m}m$** , что позволяет передать симметрию любого тетрагонального класса трехмерной периодической среде.

Комплекс **$4/m\bar{m}m$** присутствует во всех вершинных позициях ячейки, а также в центре базисной грани и центре объема.

В случае тетрагональной сингонии ячейки ***F*** и ***C*** могут быть сведены к меньшим по объему ячейкам ***I*** и ***P*** соответственно.

Хотя, например, для пространственных групп, соответствующие точечным классам **$\bar{4}m2$** , иногда представление в ***F***- или ***C***-аспекте актуально, так как по старой минералогической традиции кристаллографические оси в этом классе принято направлять по поворотным осям, а не по перпендикулярам к плоскостям. Так, например, группу **$P\bar{4}m2$** описывают как **$C\bar{4}m2$** , а **$I\bar{4}m2$** как **$F\bar{4}m2$**

	Примитивная <i>P</i> -ячейка	Базо (боко-центрированная) <i>C</i> -ячейка (<i>A</i> , <i>B</i>)	Объемно-центрированная <i>I</i> -ячейка	Гране-центрированная <i>F</i> -ячейка
Триклинная сингония	<i>a</i>			
Моноклиная сингония	<i>b</i>			
Ромбическая сингония	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>e</i>	<i>ЖС</i>
Тетрагональная сингония	<i>3</i>		<i>и</i>	
Гексагональная сингония	<i>к</i>			
Кубическая сингония	<i>м</i>		<i>н</i>	<i>о</i>

ЧЕЛОВЕК С ЦУЧУМИНКОЙ...



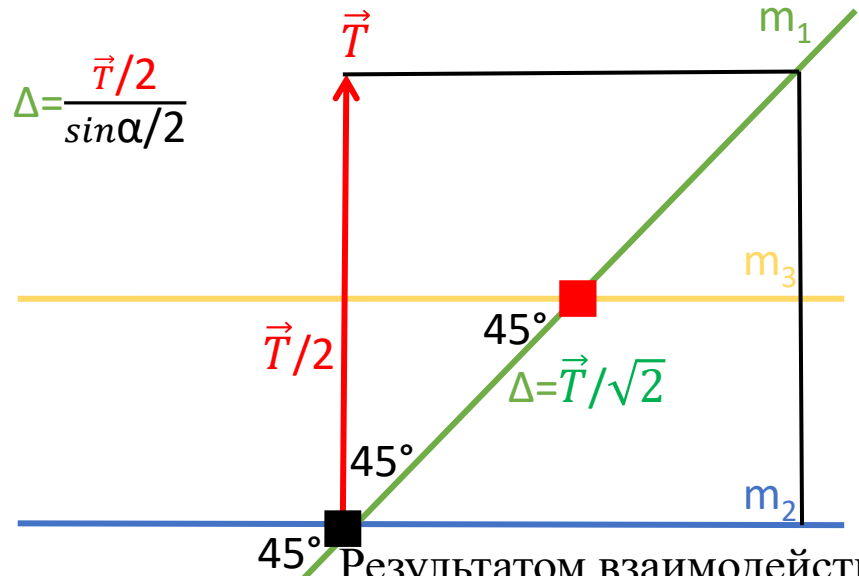
Особенности взаимодействия элементов симметрии в пространственных группах тетрагональной сингонии



1. Взаимодействие осей с перпендикулярной трансляцией
2. Взаимодействие плоскостей под углом 45°
3. Взаимодействие координатных и диагональных плоскостей с координатными трансляциями
4. Взаимодействие осей 2-ого порядка под углом 45°
5. Взаимодействие осей 4 , 4_1 , 4_2 , 4_3 с перпендикулярной плоскостью. Особенности оси $\bar{4}$

1. Особенности взаимодействия элементов симметрии в пространственных группах тетрагональной сингонии: взаимодействие оси 4 и перпендикулярной трансляции

Результат взаимодействия поворота вокруг оси 4 и перпендикулярной трансляции можно представить в свете предложенной Вульфом идеи, разложив каждую из взаимодействующих операций симметрии (трансляцию и поворот вокруг оси 4) последовательными отражениями в параллельных или пересекающихся плоскостях: $4 \times \vec{T} = (m_1 \times m_2) \times (m_2 \times m_3) = m_1 \times m_3 = 4'$

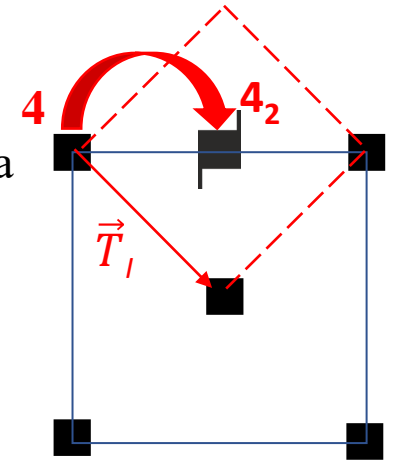


Элементарный угол поворота оси α	Смещение оси Δ	Угол между направлением смещения оси и приложенной трансляцией $90-\alpha/2$
90°	$\frac{\vec{T}/2}{\sin 45^\circ} = \vec{T}/\sqrt{2}$	45°

Результатом взаимодействия оси 4 и перпендикулярной трансляции является еще одна ось 4, смещенная относительно исходного положения на величину Δ в направлении под 45° к приложенной трансляции. Δ легко определить из геометрических соображений: в центре квадрата, построенного на этой трансляции.

Трансляция, параллельная оси 4, меняет ее характер.

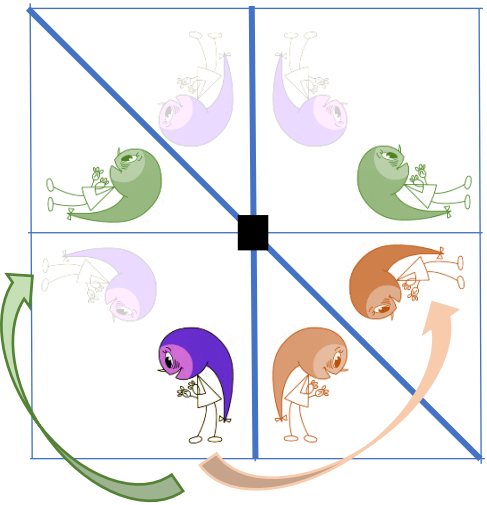
Трансляция, косо ориентированная к оси 4 – одновременно смещает и меняет ее характер: $4 \times \vec{T}_1 = 4_2 [0 \frac{1}{2} z]$



2. Особенности взаимодействия элементов симметрии в пространственных группах тетрагональной сингонии:

взаимодействие плоскостей под углом 45°

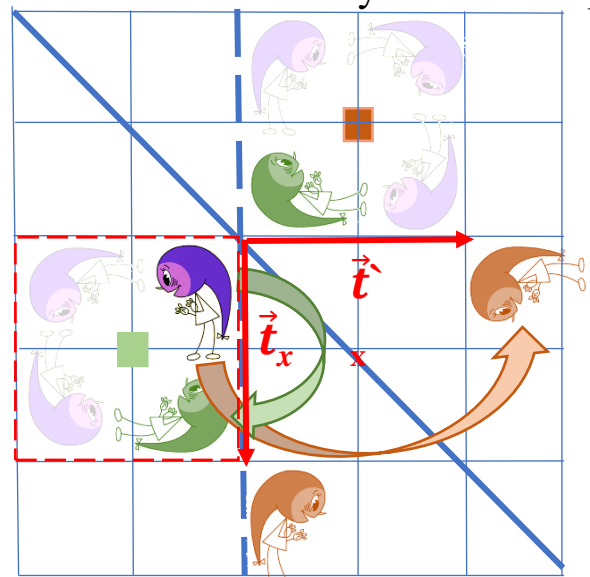
Пересечение любых плоскостей под углом 45° (в тетрагональной сингонии это пересечение координатных и диагональных плоскостей) вызывает появление оси 4-ого порядка, поворотной или винтовой (энантиоморфной или нейтральной). Характер результирующей оси определяется совокупностью параллельных ей трансляций, содержащихся в плоскостях, а положение – совокупностью перпендикулярных трансляций.



$$m_y \times m_{xy} = 4^1_z [00z]$$

$$m_{xy} \times m_y = 4^3_z [00z]$$

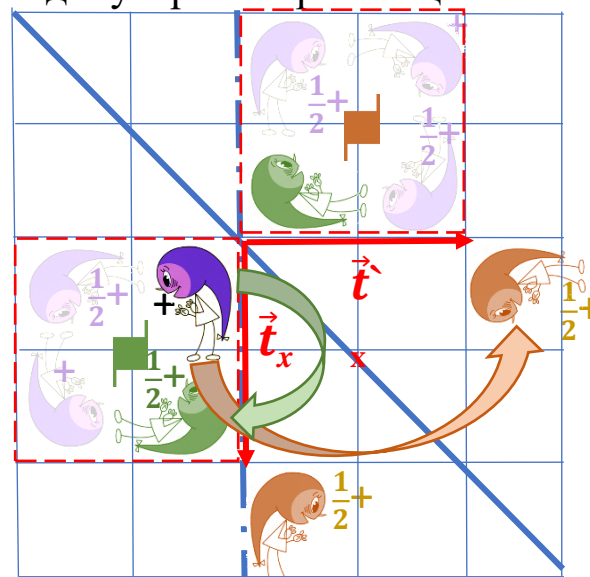
Взаимодействие двух плоскостей симметрии m приводит к возникновению оси 4 , проходящей по линии их пересечения



$$m_{xy} \times a_y = m_{xy} \times m_y \times \vec{t}_x = 4^3_z \times \vec{t}_x = 4^3_z \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{4} z \right]$$

$$a_y \times m_{xy} = m_y \times \vec{t}_x \times m_{xy} = 4^1_z \times \vec{t}_x = 4^1_z \left[-\frac{1}{4} - \frac{1}{4} z \right]$$

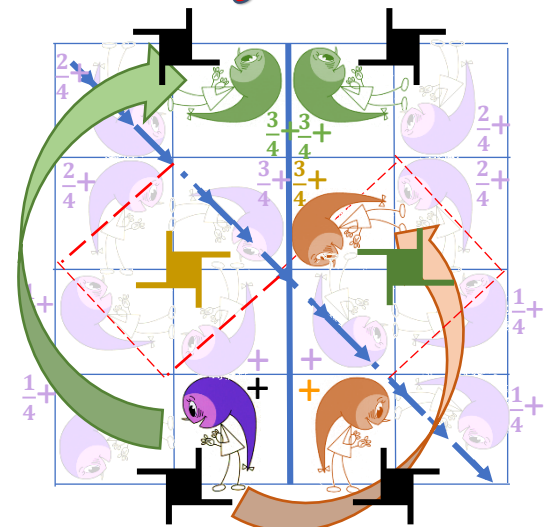
Взаимодействие плоскости m_a и плоскости a_y приводит к возникновению оси 4 в центре квадрата, построенного на трансляции \vec{t}_a , но не на m !



$$m_{xy} \times n_y = m_{xy} \times m_y \times \vec{t}_x \vec{t}_z = 4^3_z \times \vec{t}_x = 4^3_z \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{4} z \right]$$

$$n_y \times m_{xy} = m_y \times \vec{t}_x \vec{t}_z \times m_{xy} = 4^1_z \times \vec{t}_x = 4^1_z \left[-\frac{1}{4} - \frac{1}{4} z \right]$$

Взаимодействие плоскости m_a и плоскости a_y приводит к возникновению оси 4_2 в центре квадрата, построенного на трансляции \vec{t}_a , но не на m !

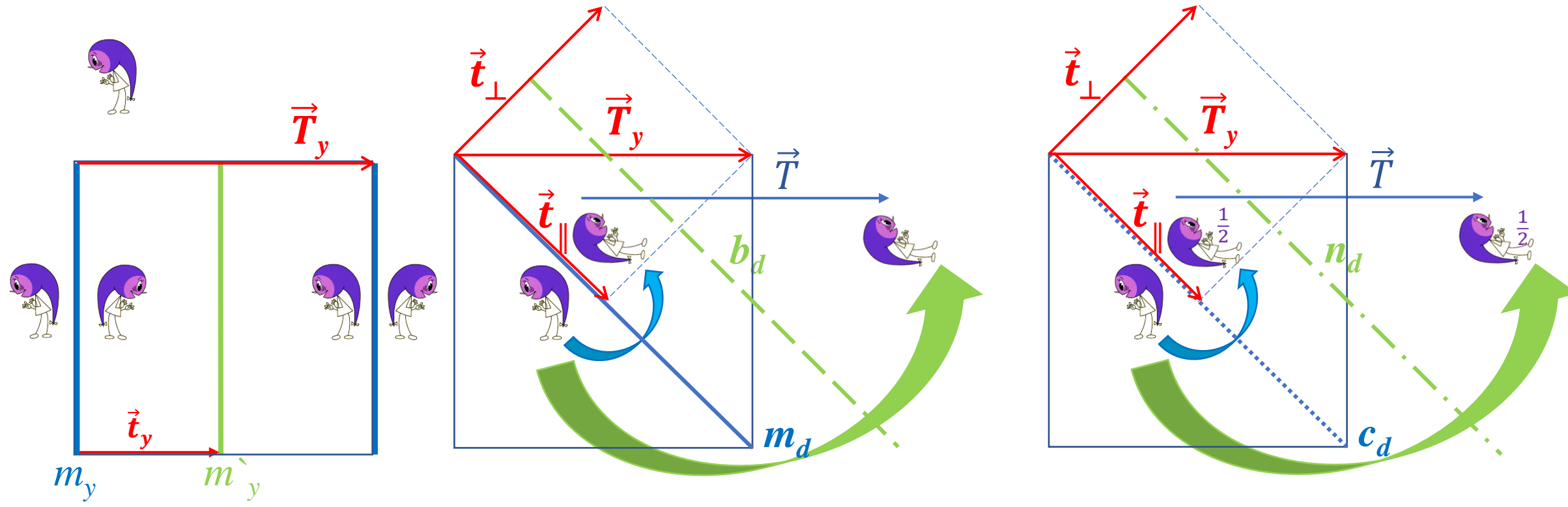


$$m_y \times d_{xy} = m_y \times m_{xy} \times \vec{t}_{1/4xy} \vec{t}_{1/4z} = 4^1_z \times \vec{t}_{1/4xy} = 4^1_z \left[0 \frac{1}{4} z \right]$$

$$d_{xy} \times m_y = m_{xy} \times \vec{t}_{1/4xy} \vec{t}_{1/4z} \times m_y = 4^3_z \times \vec{t}_{xy} = 4^3_z \left[0 - \frac{1}{4} z \right]$$

Взаимодействие плоскости m_y и плоскости d_{xy} приводит к возникновению осей 4_1 и 4_3 в центре квадрата, построенного на трансляции $\vec{t}_{1/4xy}$, но не на m !

3. Особенности взаимодействия элементов симметрии в пространственных группах тетрагональной сингонии: взаимодействие координатных и диагональных плоскостей с координатными трансляциями



Взаимодействие координатной плоскости m_y с перпендикулярной координатной трансляцией \vec{T}_y приводит к появлению неэквивалентной плоскости m'_y , смещенной на половину этой трансляции \vec{t}_y . Аналогично будет себя вести и другие плоскости: n , c , $a(b)$.

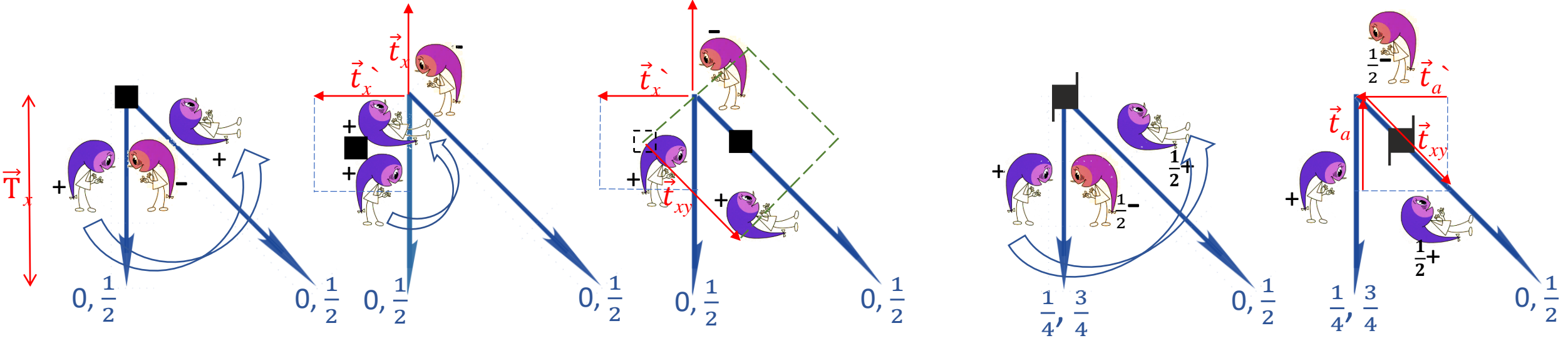
Взаимодействие диагональной плоскости m_d с косо расположенными координатными трансляциями приводит к ее чередованию с плоскостью $b_d (g_d)$

Взаимодействие диагональной плоскости c_d с косо расположенными координатными трансляциями приводит к ее чередованию с плоскостью n_d

4. Особенности взаимодействия элементов симметрии в пространственных группах тетрагональной сингонии: взаимодействие осей второго порядка под углом 45°

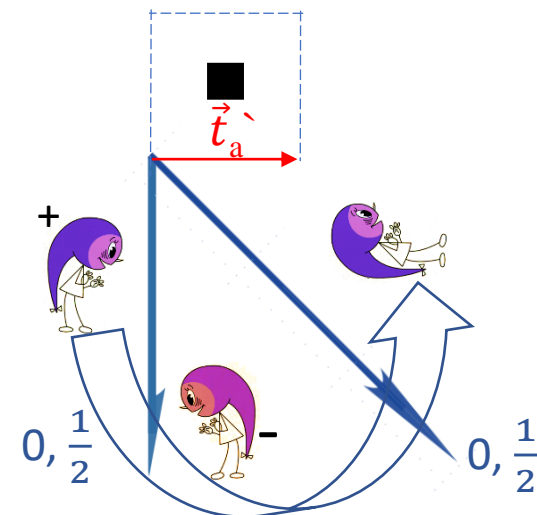
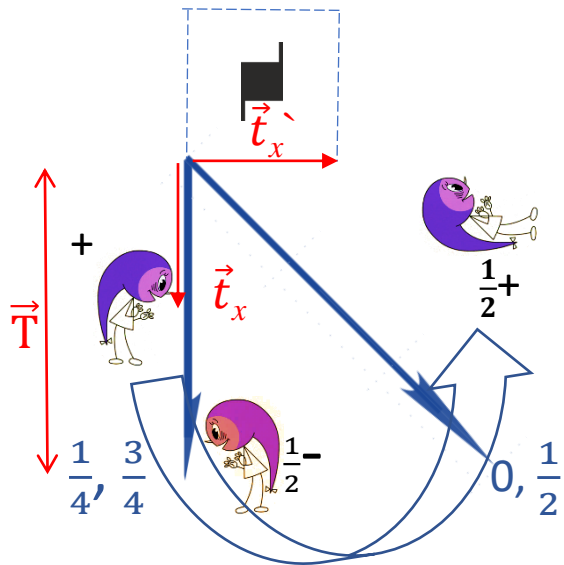
сингонии: взаимодействие осей второго порядка под углом 45°

Взаимодействие осей 2, расположенных под 45° друг к другу, приводит к возникновению оси 4, характер которой зависит только от соотношения высот взаимодействующих осей 2, а положение – от характера осей 2



Ось 4 смещается в центр квадрата, построенного на повернутом вокруг оси 2_{xy} векторе \vec{t}_x в сторону последовательных поворотов вокруг осей 2_1 и 2_2

Ось 4 смещается последовательно в центры квадратов, построенных на \vec{t}_x и \vec{t}_{xy} в сторону последовательных поворотов вокруг осей 2_1

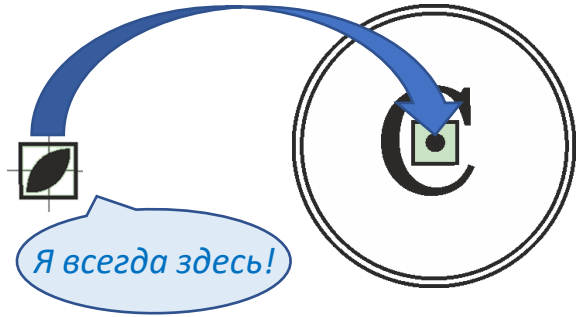


Когда же возникают оси 4_1 и 4_3 ?

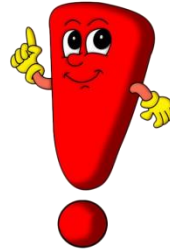


5. Особенности взаимодействия элементов симметрии в пространственных группах тетрагональной сингонии: ось $\bar{4}$

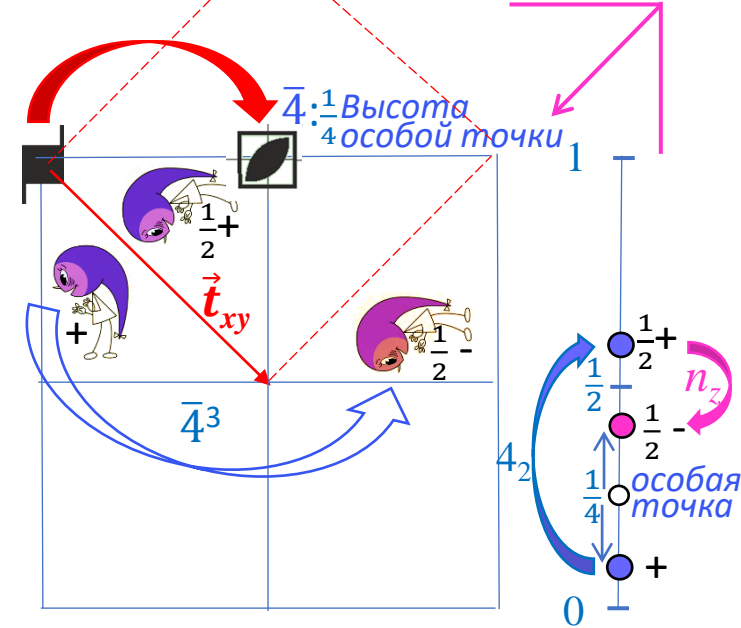
Ось $\bar{4}$ (как и все инверсионные оси, кроме $\bar{2}$) имеет особую точку. В этой точке число степеней свободы – 0! В случае оси $\bar{4}$ это место ее пересечения с мнимой плоскостью или мнимым центром инверсии.



Ось $\bar{4}$ может существовать как самостоятельно, так и быть результатом взаимодействия оси 4 и перпендикулярной плоскости (а также взаимодействия поворотной и инверсионной оси 2-ого порядка под углом 45°)



Только особая точка оси $\bar{4}$ обладает симметрией позиции $\bar{4}$ с величиной симметрии 4! Все остальные точки, находящиеся на оси, имеют симметрию позиции 2 с величиной симметрии 2



В комплексе $\frac{4}{m}$ всегда содержится $\bar{4}$, особая точка которой совпадает с центром инверсии комплекса

$$4_z \times m_z = \bar{4}$$

Но особое значение это приобретает только в пространственных группах, в которых ось $\bar{4}$ «выезжает» из центра комплекса под действием скользящих компонентов перпендикулярной плоскости. В этом случае ось $\bar{4}$ смещается в центр квадрата, построенного на горизонтальной трансляции перпендикулярной плоскости, а ее особая точка, смещаясь вместе с осью, может поменять высоту в соответствии с вертикальной трансляцией оси 4_z , если таковая существует.

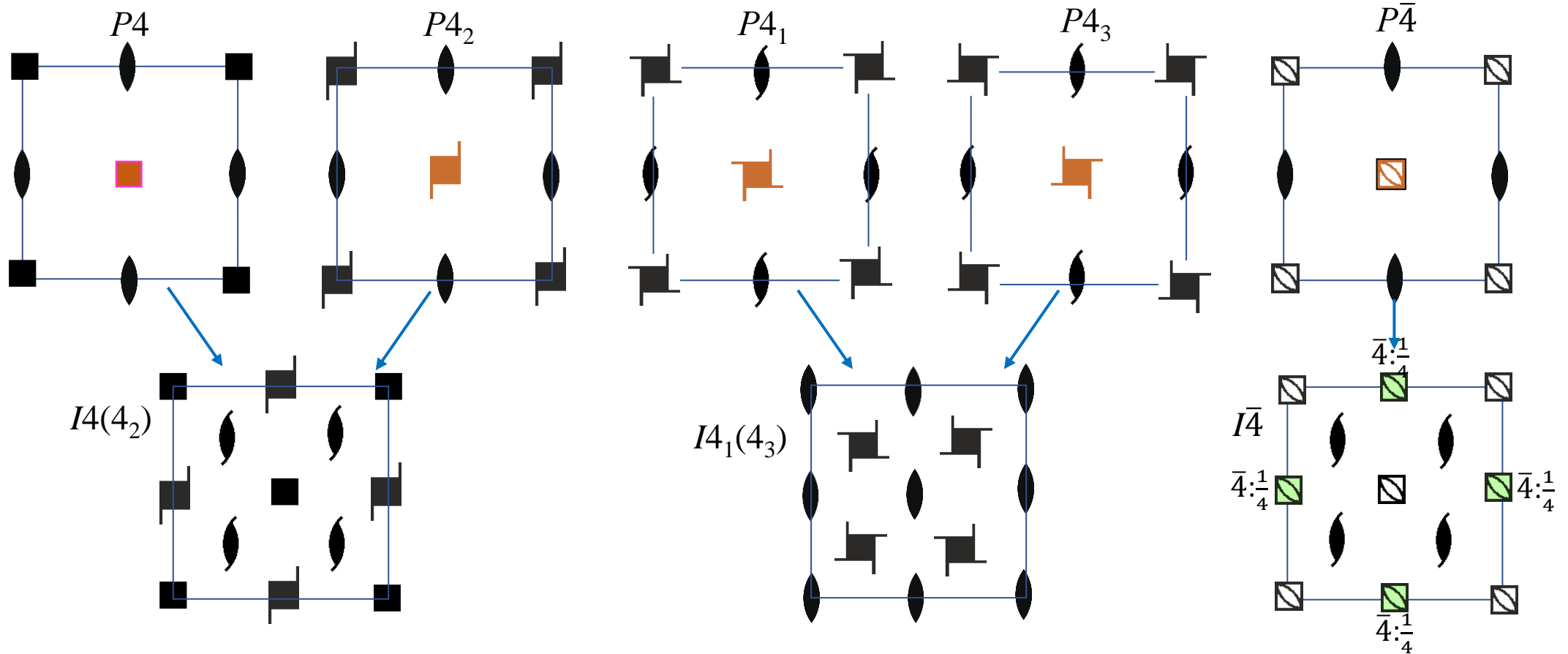
Взаимодействие оси 4_{2z} и перпендикулярной плоскости n_z порождает ось $\bar{4}_z$, которая взаимодействуя с вектором скольжения плоскости n_z ($\vec{t}_n = \vec{t}_{xy}$) перемещается в центр квадрата, построенного на этой трансляции, а ее особая точка меняет свою высоту, смещаясь на половину вектора \vec{t}_z , содержащегося в 4_2 :

$$4_{2z} \times n_z = \bar{4}_z: [0\frac{1}{2}\frac{1}{4}]$$

ВЫВОД ГРУПП ТЕТРАГОНАЛЬНОЙ ТЕТАРТОЭДРИИ

В примитивной ячейке возможны следующие классы:

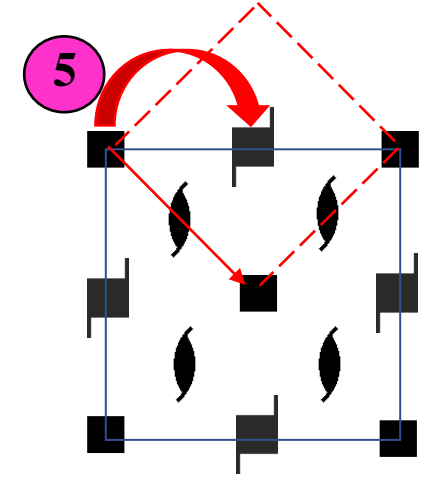
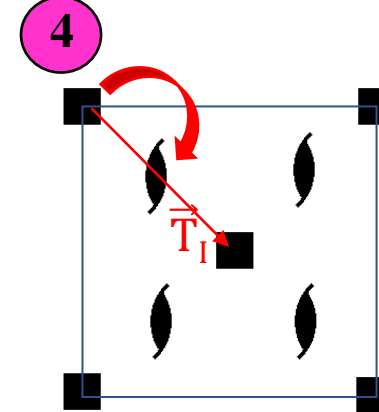
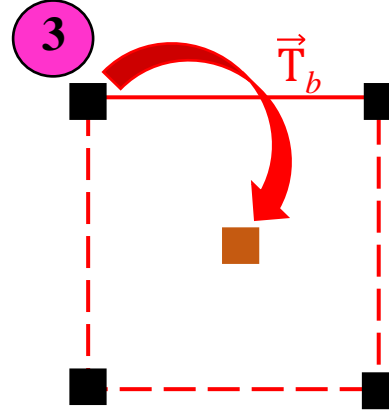
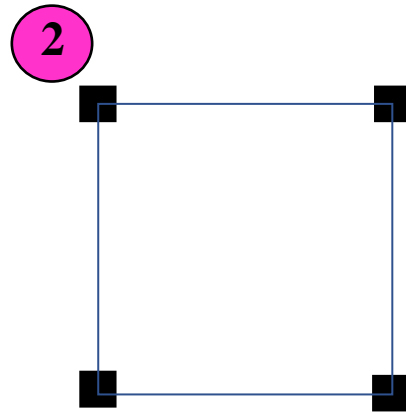
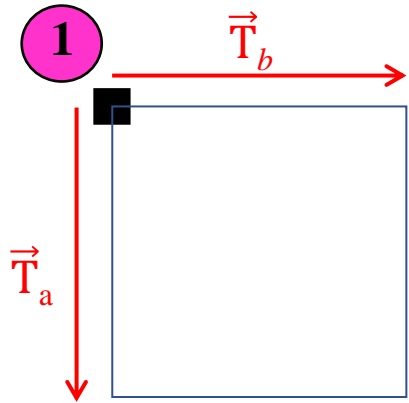
$P4, P4_1, P4_2, P4_3, P\bar{4}$



Чередование осей 4_1 и 4_3 , а также 4 и 4_2 в объемноцентрированной ячейке приведет к 3 пространственным группам:

$I4(4_2), I4_1(4_3)$ и $I\bar{4}$

ЭТАПЫ ПОСТРОЕНИЯ ГРАФИКА ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ГРУППЫ $I4(4_2)$



1. Задаем координатные трансляции \vec{T}_b и \vec{T}_a и помещаем ось 4 в начало координат

2. Размножаем ось 4 координатными трансляциями \vec{T}_b и \vec{T}_a

3. Взаимодействуя с координатной трансляцией \vec{T}_b или \vec{T}_a ось 4 смещается в центр квадрата, построенного на этой трансляции:

$$\vec{T}_b \times 4 = 4 \left[\begin{smallmatrix} 11 \\ 22 \end{smallmatrix} z \right]$$

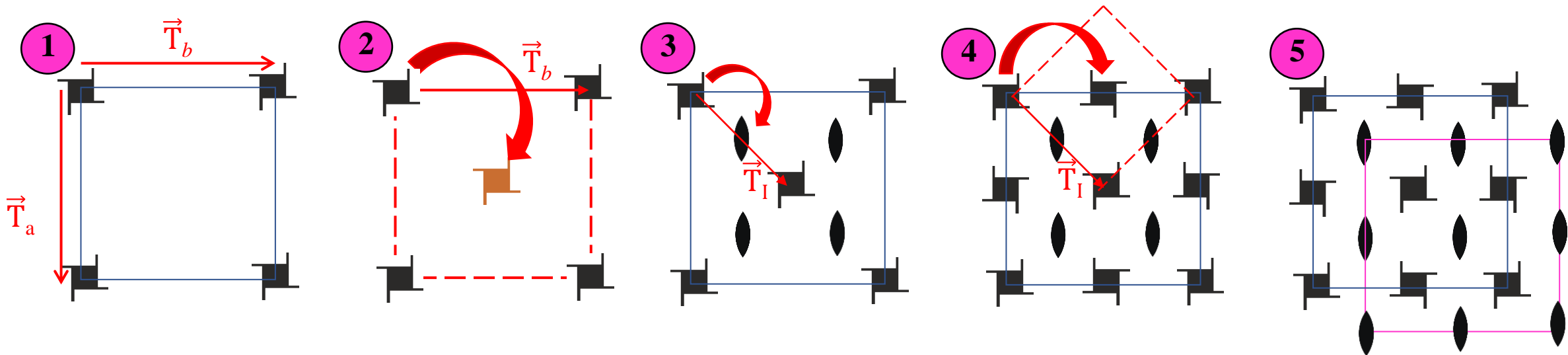
4. Взаимодействуя с трансляцией \vec{T}_I ось 2(4) смещается в центр этой трансляции и меняет свой характер:

$$\vec{T}_I \times 2(4) = 2_1 \left[\begin{smallmatrix} 11 \\ 44 \end{smallmatrix} z \right]$$

5. Взаимодействуя с трансляцией \vec{T}_I ось 4 смещается в центр квадрата, построенного на этой трансляции и меняет свой характер:

$$\vec{T}_I \times 4 = 4_2 \left[0 \begin{smallmatrix} 1 \\ 4 \end{smallmatrix} z \right]$$

ЭТАПЫ ПОСТРОЕНИЯ ГРАФИКА ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ГРУППЫ $I4_1(4_3)$



1. Задаем координатные трансляции \vec{T}_b и \vec{T}_a , помещаем ось 4_1 в начало координат и размножаем ее этими трансляциями

2. Взаимодействуя с координатной трансляцией \vec{T}_b или \vec{T}_a ось 4_1 смещается в центр квадрата, построенного на этой трансляции:

$$\vec{T}_b \times 4_1 = 4_1 \left[\begin{matrix} 11 \\ 22 \end{matrix} z \right]$$

3. Взаимодействуя с трансляцией \vec{T}_1 ось $2_1(4_1)$ смещается в центр этой трансляции и меняет свой характер:

$$\vec{T}_1 \times 2_1(4_1) = 2 \left[\begin{matrix} 11 \\ 44 \end{matrix} z \right]$$

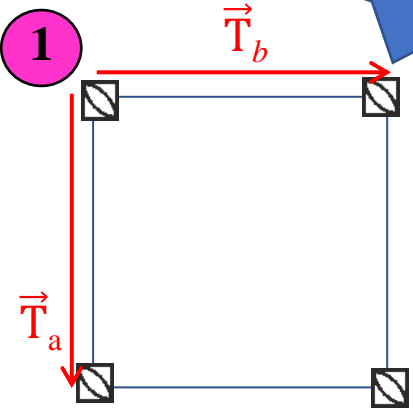
5. Взаимодействуя с трансляцией \vec{T}_1 ось 4_1 смещается в центр квадрата, построенного на этой трансляции и меняет свой характер:

$$\vec{T}_1 \times 4_1 = 4_3 \left[\begin{matrix} 01 \\ 4 \end{matrix} z \right]$$

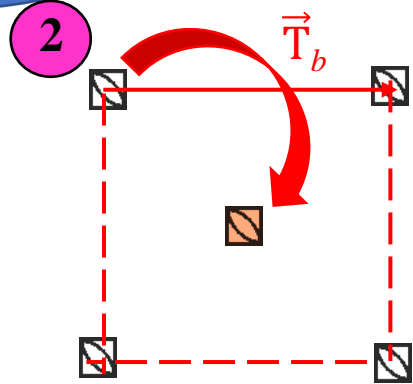
6. Переносим начало координат в самую высокосимметричную и неподвижную точку этой пространственной группы – в ось 2

ЭТАПЫ ПОСТРОЕНИЯ ГРАФИКА ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ГРУППЫ $\bar{I}4$

У меня есть особая точка! Если не указано иначе, моя высота $z=0$



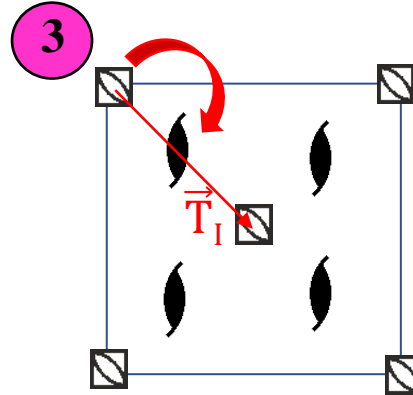
1. Задаем координатные трансляции \vec{T}_b и \vec{T}_a , помещаем ось $\bar{4}$ в начало координат и размножаем ее этими трансляциями



2. Взаимодействуя с координатной трансляцией \vec{T}_b или \vec{T}_a , ось $\bar{4}$ смещается в центр квадрата, построенного на этой трансляции:

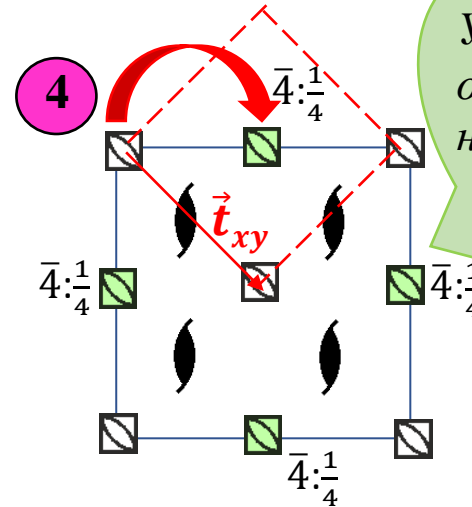
$$\vec{T}_b \times \bar{4} = \bar{4} \begin{bmatrix} 11 \\ 22 \end{bmatrix} z$$

Высота особой точки у всех $\bar{4}$ одинакова и равна 0.



3. Взаимодействуя с трансляцией \vec{T}_I ось $2(\bar{4})$ смещается в центр этой трансляции и меняет свой характер:

$$\vec{T}_I \times 2(\bar{4}) = 2_1 \begin{bmatrix} 11 \\ 44 \end{bmatrix} z$$



5. Взаимодействуя с трансляцией \vec{T}_I ось $\bar{4}$ смещается в центр квадрата, построенного на горизонтальной составляющей этой трансляции \vec{t}_{xy} и меняет положение (высоту) своей особой точки, подчиняясь вертикальной составляющей трансляции \vec{T}_I :

$$\vec{T}_I \times \bar{4} = \bar{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} z$$

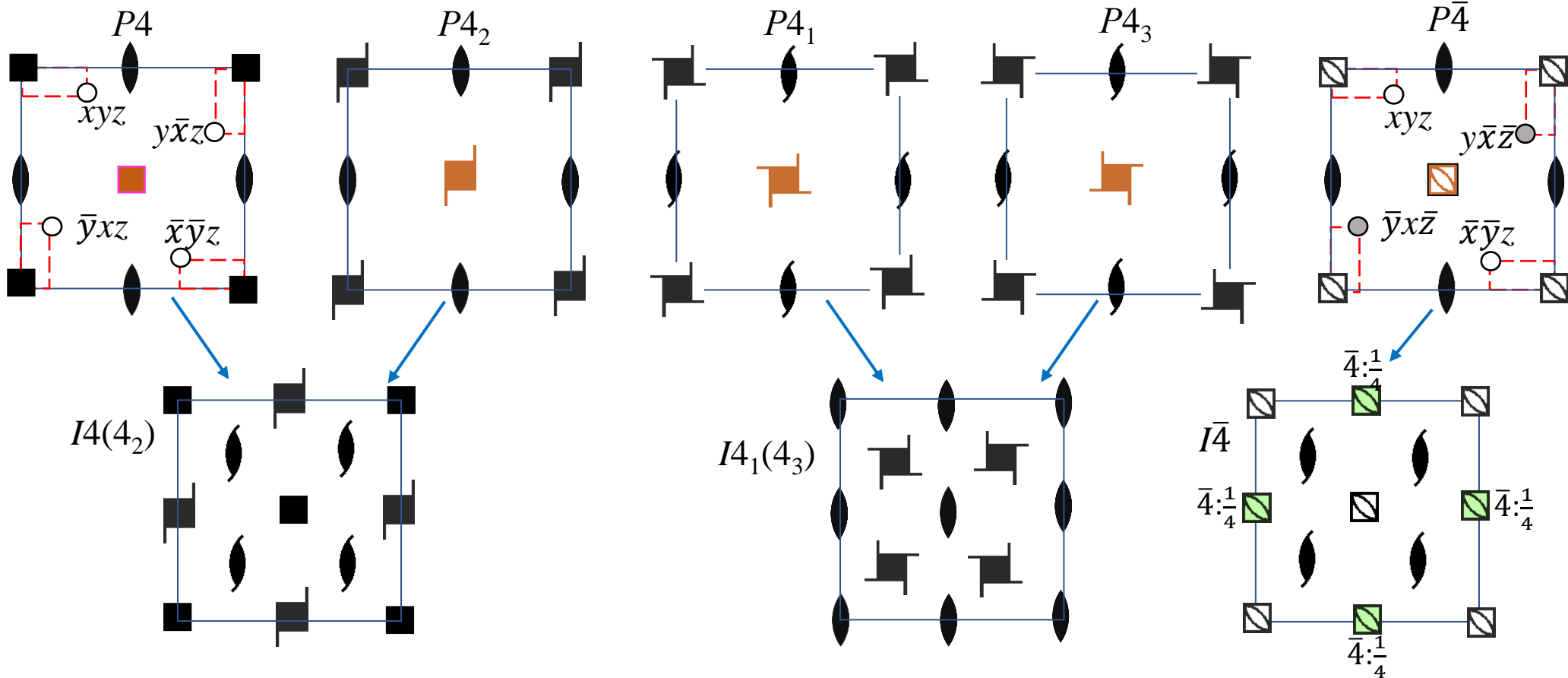
Начало координат в этой группе однозначно выбирается в особой точке инверсионной оси

У меня есть особая точка на высоте $z = \frac{1}{4}$! Высота указывается через двоеточие

ПРАВИЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ТОЧЕК В ГРУППАХ ТЕТРАГОНАЛЬНОЙ ТЕТАРТОЭДРИИ

Правильная система точек – совокупность всех эквивалентных точек или точек, связанных между собой элементами симметрии группы

В тетрагональной тетартоэдрии существует 4 вида симметрично различных правильных систем точек.



В качестве примера точка общего положения размножена для групп $P4$ и $P\bar{4}$.

Пр. гр.	Число ПСТ	ПС Т
$P4$	3	4 2 1
$P4_2$	2	2 1
$P4_1$	1	1
$P4_1$	1	1
$P\bar{4}$	3	4̄ 2 1
$I4$	2	4 1
$I4_1$	2	2 1
$I\bar{4}$	2	4̄ 1

68!

Мы в начале долгого пути вывода пространственных групп тетрагональной сингонии, цель которого 68 групп

Фактор-группа	4	$\bar{4}$	ИТОГО
<i>P</i>	4	1	5
<i>C</i>	-	-	0
<i>A(B)</i>	-	-	0
<i>F</i>	-	-	0
<i>I</i>	2	1	3
ИТОГО	6	2	8



Пока только 8

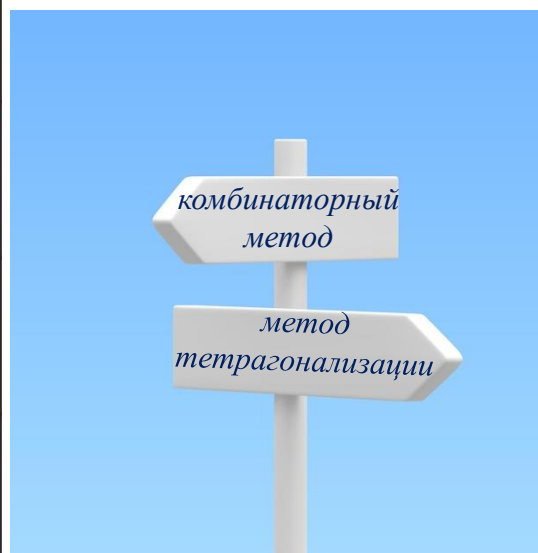
32 КЛАССА СИММЕТРИИ КРИСТАЛЛОВ

Категория	НИЗШАЯ $a \neq b \neq c$			СРЕДНЯЯ $a = b \neq c$			ВЫСШАЯ $a = b = c$		
	Триклинная $\alpha \neq \beta \neq \gamma$	Моноклиная $\alpha = \beta = 90^\circ$ $\gamma \neq 90^\circ$	Ромбическая $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	Тетрагональная $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	Гексагональная $\alpha = \beta = 90^\circ$ $\gamma = 120^\circ$		Кубическая $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$		
Сингония					Тригональная подсингония	Гексагональная подсингония			
C_n	$L_1 C_1$ 	$L_2 C_2$ 		$L_4 C_4$ 	$L_3 C_3$ 	$L_6 C_6$ 	Обозначения Символ Браве Символ Шёнфлиса Стереографическая проекция класса симметрии Международный символ Форма общего положения		
C_{ni} (S_n)	$L_1/C C_1/S_2$ 	$L_2/P C_2/S_2$ 		$L_4/C_4/S_4$ 	$L_3/C_3/S_6$ 	$L_6/C_6/S_6$ 			
C_{nh}		$L_2/PC C_{2h}$ 		$L_4/PC C_{4h}$ 		$L_6/PC C_{6h}$ 			
C_{nv}			$L_2/P C_{2v}$ 	$L_4/P C_{4v}$ 	$L_3/P C_{3v}$ 	$L_6/P C_{6v}$ 			
D_n			$3L_2 D_2$ 	$4L_4 D_4$ 	$L_3 3L_2 D_3$ 	$L_6 6L_2 D_6$ 	$3L_2 4L_3 T$ 	$3L_4 6L_2 O$ 	
D_{nd}				$L_2 2L_2 P D_{2d}$ 	$L_3 3L_2 3PC D_{3d}$ 		$3L_4 4L_2 P T_d$ 		
D_{nh}			$3L_2 PC D_{2h}$ 	$4L_4 3PC D_{4h}$ 		$L_3 3L_2 P D_{3h}$ 	$L_6 6L_2 3PC D_{6h}$ 	$3L_4 4L_2 3PC T_h$ 	$3L_4 6L_2 9PC O_h$

ВЫВОД ГРУПП ТЕТРАГОНАЛЬНОЙ ГЕМИЭДРИИ $4mm$

Вывести все пространственные группы, соответствующие точечному классу $4mm$ (C_{4v}) можно двумя способами:

1. Комбинаторным (классным) методом Н.В. Белова
2. Тетрагонализацией ромбических групп, соответствующих точечному классу $mm2$



А можно ещё и по-другому...