

ПРОСТРАНСТВА РАЗЛИЧНОЙ РАЗМЕРНОСТИ



ЧИСЛО ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КРИСТАЛЛОГРАФИЧЕСКИХ ГРУППЫ СИММЕТРИИ

32 КЛАССА СИММЕТРИИ КРИСТАЛЛОВ

0 1 2 3 Размерность пространства

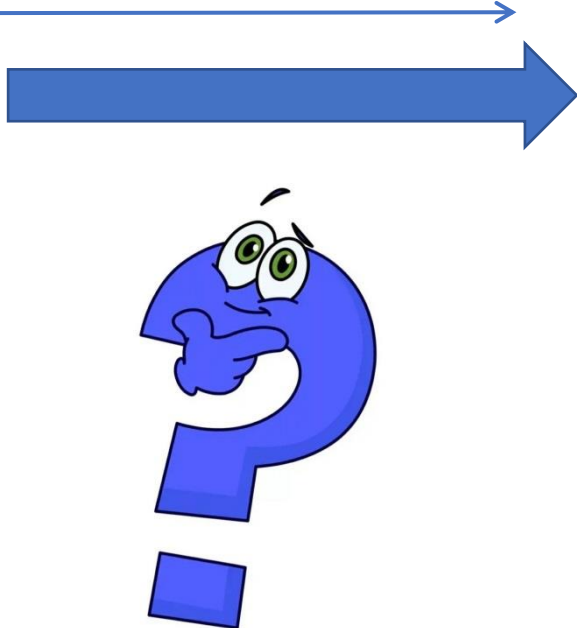
0	1	2	10	32
1		2	7	75
2			17	80
3				230



Периодичность пространства

Категория	НИЗШАЯ $a \neq b \neq c$			СРЕДНЯЯ $a = b \neq c$		ВЫСШАЯ $a = b = c$		
Сингония	Триклинная $\alpha \neq \beta \neq \gamma$	Моноклиная $\alpha = \beta = 90^\circ$ $\gamma \neq 90^\circ$	Ромбическая $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	Тетрагональная $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	Гексагональная $\alpha = \beta = 90^\circ$ $\gamma = 120^\circ$		Кубическая $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	
C_n	$L_1 C_1$ 	$L_2 C_2$ 		$L_4 C_4$ 	$L_3 C_3$ 	$L_6 C_6$ 	Обозначения Символ Брауэ Символ Шенфлиса Стереографическая проекция класса симметрии	
C_{ni} (S_n)	$E_1/C_1/S_1$ 	$E_2/P_2 C_2/S_2$ 		$E_4/C_4/S_4$ 	$E_3/C_3/S_6$ 	$E_6/C_6/S_6$ 		Международный символ Форма общего положения
C_{nh}		$L_2PC C_{2h}$ 		$L_4PC C_{4h}$ 		$L_6PC C_{6h}$ 		
C_{nv}			$L_2PC C_{2v}$ 	$L_4PC C_{4v}$ 	$L_3PC C_{3v}$ 	$L_6PC C_{6v}$ 		
D_n			$3L_2 D_2$ 	$L_4 4L_2 D_4$ 	$L_3 3L_2 D_3$ 	$L_6 6L_2 D_6$ 	$3L_4 4L_3 T$ 	$3L_4 6L_2 O$
D_{nd}				$L_2 2L_2P D_{2d}$ 	$L_3 3L_3PC D_{3d}$ 		$3E 4L_6P T_d$ 	
D_{nh}			$3L_3PC D_{2h}$ 	$L_4 4L_3PC D_{4h}$ 		$L_3 4L_3PC D_{6h}$ 	$3L_4 4L_3PC T_h$ 	$3L_4 6L_2 9PC O_h$

Попробуем разобраться.

	0	1	2	3	Размерность пространства
0	1	2	10	32	
1		2	7	75	
2			17	80	
3				230	

Периодичность пространства

Понятия размерность пространства и бесконечная протяженность – разные вещи.

32 точечных класса описывают трехмерные объекты, не имеющие бесконечной протяженности ни в одном направлении

Пределные группы симметрии Кюри

Группы Кюри являются обобщениями конечных точечных групп при условии, что порядок оси симметрии стремится к бесконечности.



П.Кюри
Nobel Prize
1903 (Physics)

Принцип суперпозиции Кюри - кристалл под внешним воздействием будет обладать теми элементами симметрии, которые являются общими для кристалла при отсутствии воздействия и для воздействия при отсутствии кристалла

	<p>группа ∞ вращающегося конуса правая и левая Описывает симметрию среды с особым полярным направлением</p>
	<p>группа ∞m неподвижного конуса Описывает симметрию однородного электрического поля</p>
	<p>группа ∞/m вращающегося цилиндра правая и левая Описывает симметрию однородного магнитного поля</p>
	<p>группа $\infty 2$ правая и левая Описывает симметрию оптически активной анизотропной среды</p>
	<p>группа $\infty/m m m$ неподвижного цилиндра Описывает симметрию одноосных механических напряжений (сжатие, растяжение)</p>
	<p>группа ∞/∞ правая и левая Описывает симметрию оптически активной изотропной среды</p>
	<p>группа $\infty/\infty m$ Описывает симметрию скалярных воздействий (однородное нагревание, гидростатическое сжатие)</p>



Пьер Кюри
(1859 – 1906)

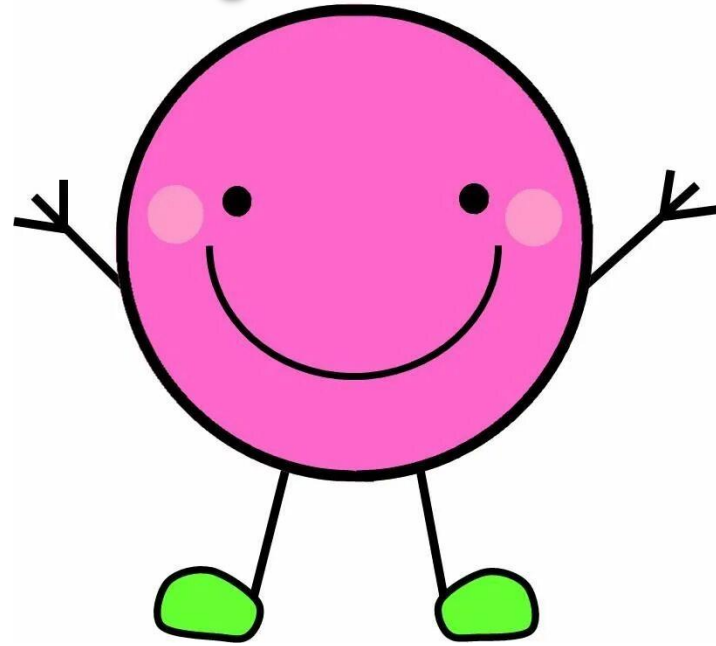
ПРЕДЕЛЬНЫЕ ГРУППЫ симметрии Кюри.

«Кюри охватил значение симметрии в физических явлениях тогда, когда связь симметрии с фактами физики не сознавалась. Он указал его там, где его не видели»

В.И.Вернадский о
П.Кюри



0-мерное пространство



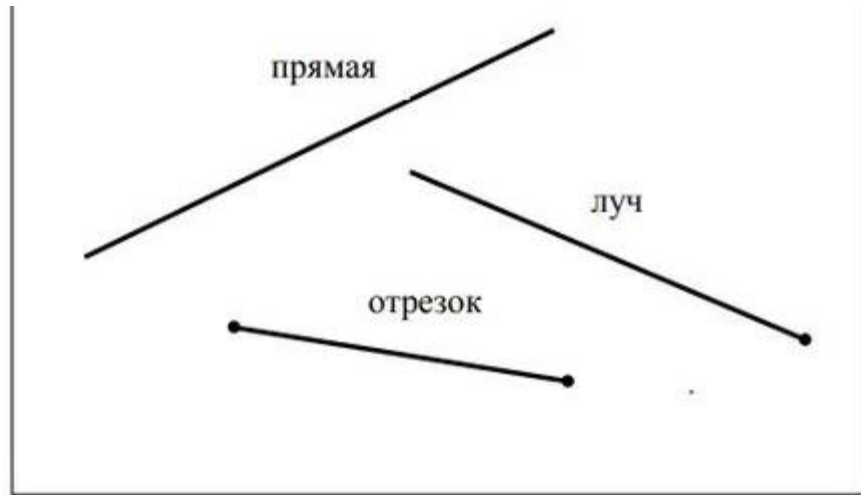
		Размерность пространства			
		0	1	2	3
Периодичность пространства	0	1	2	10	32
	1		2	7	75
	2			17	80
	3				230

В 0-мерном пространстве существует только точка, не имеющая геометрических размеров (высоты, длины, ширины).

Таким образом 0-мерное пространство по сути и является этой точкой.

В ноль-мерном пространстве существует одна группа симметрии 1

1-мерное пространство



Размерность пространства

	0	1	2	3
0	1	2	10	32
1		2	7	75
2			17	80
3				230

Периодичность пространства

В отличие от 0-мерного в 1-мерном пространствах точка имеет координаты, чем и обуславливается наличие счётной характеристики: *длины*.

В одномерном пространстве базисными элементами являются *прямая, отрезок, луч и вектор*.

Можно считать, что отрезок это часть пространства, имеющая длину, а вектор — и длину, и направление.

В одномерном пространстве существует 2 группы симметрии

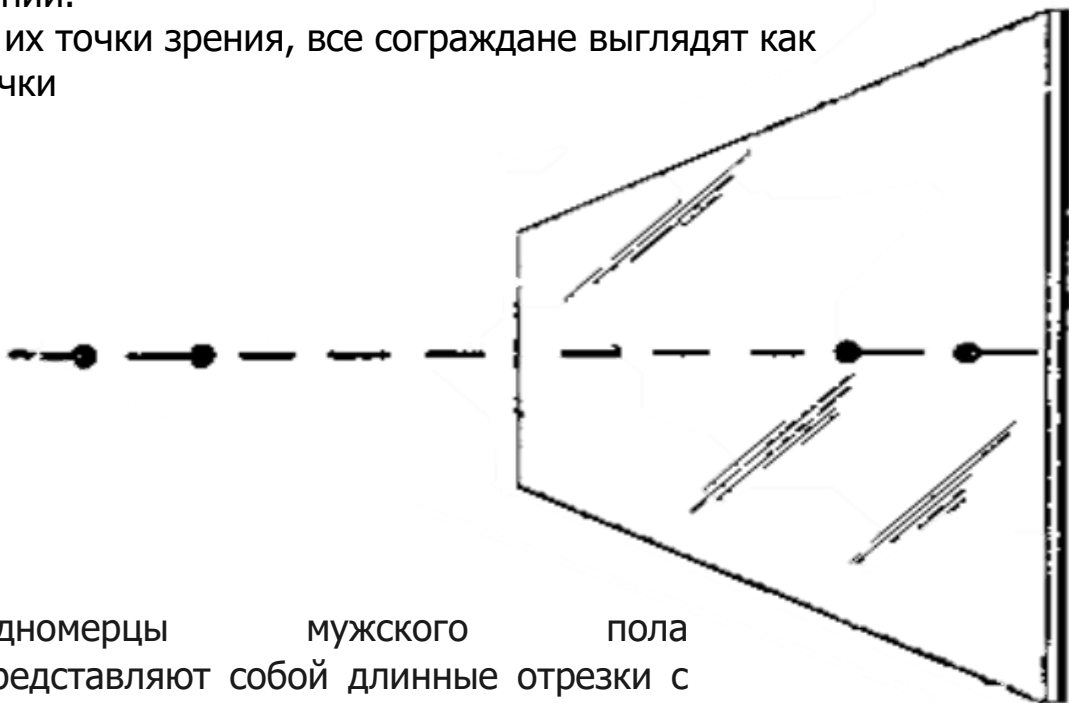


Эдвин Э. Эббот -английский теолог и писатель, 1976г.

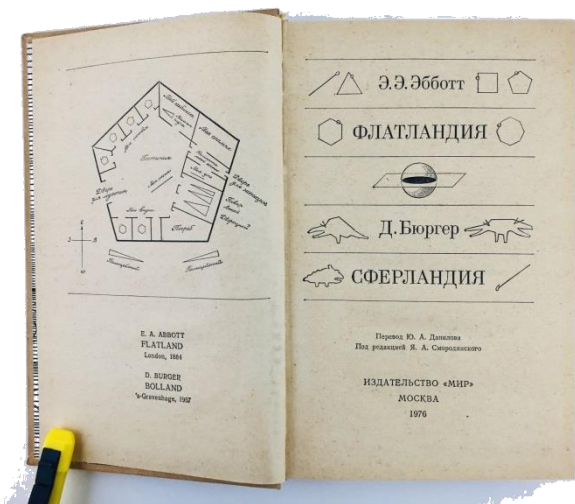
Лайландия

Страну населяют плоские простейшие фигуры и линии.

С их точки зрения, все сограждане выглядят как точки



Одномерцы мужского пола представляют собой длинные отрезки с «глазом» на одном конце.



Глаза есть лишь у взрослых одномерцев. Зрение всех лайландцев (кроме короля) однонаправлено - поэтому если бы мир зеркально отразили, они не увидели бы разницы. Про длину они тоже не знают..



Одномерцы женского пола — более короткие отрезки и тоже с глазом на конце.



В пространстве, имеющем бесконечную протяженность только в одном направлении существуют специфические элементы симметрии, такие как *ось бесконечных переносов* или *бесконечно малая трансляция*. Помимо них, единственное особое направление, совмещенное с направлением бесконечной протяженности, может быть представлено *осями бесконечных порядков*. Такая «бесконечность» возможно только в случае, если пространство имеет только одно направление бесконечной протяженности

Бордюры



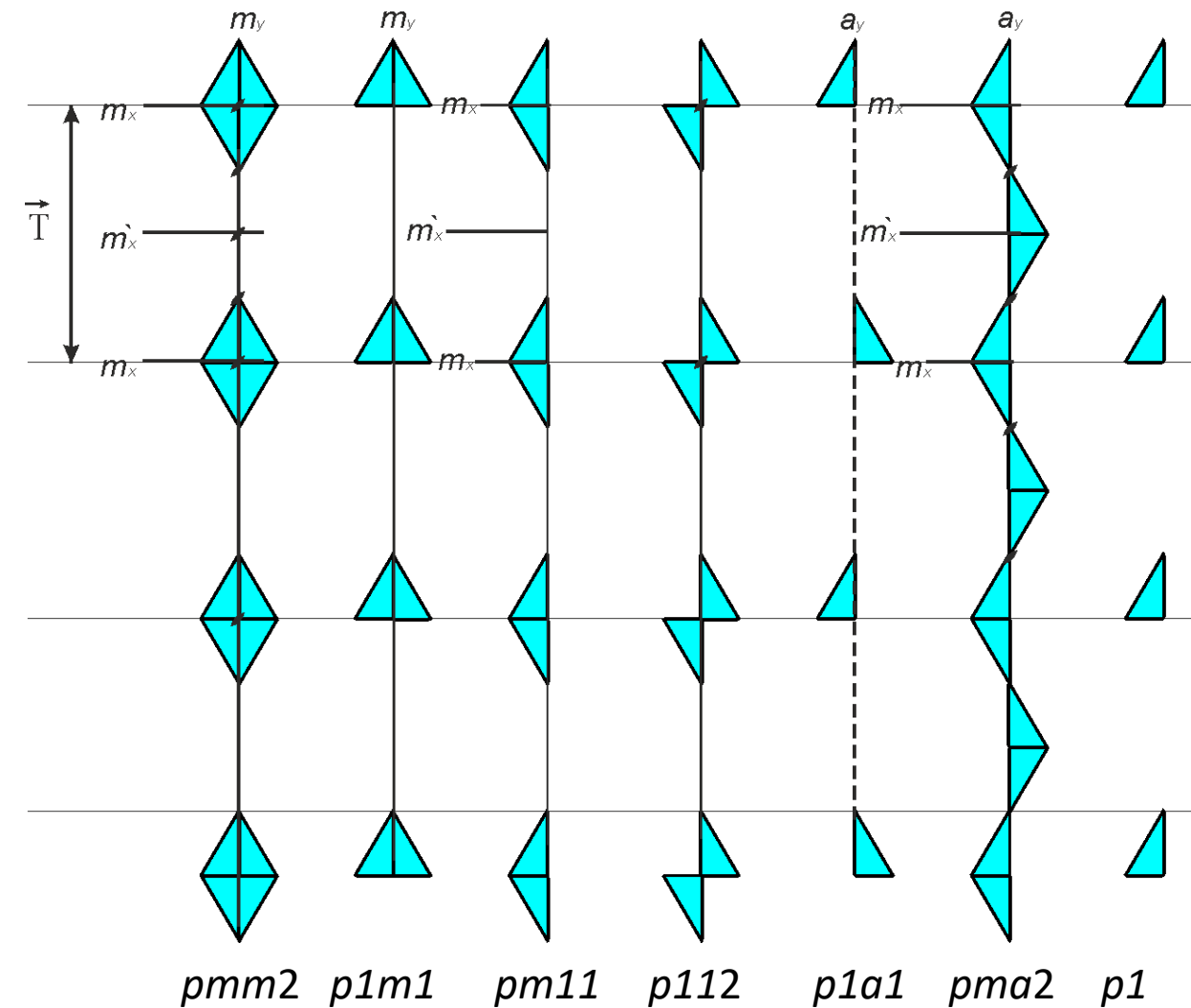
Размерность пространства
0 1 2 3

Периодичность пространства

0	1	2	10	32
1		2	7	75
2			17	80
3				230

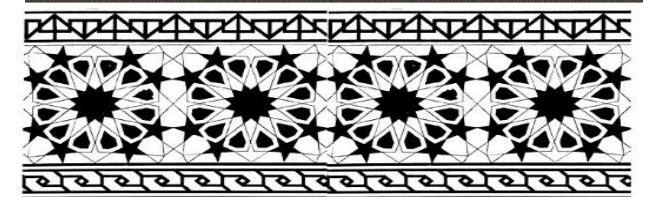
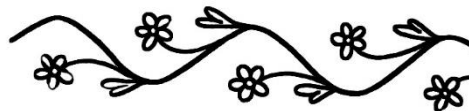
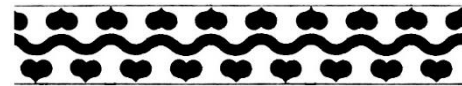
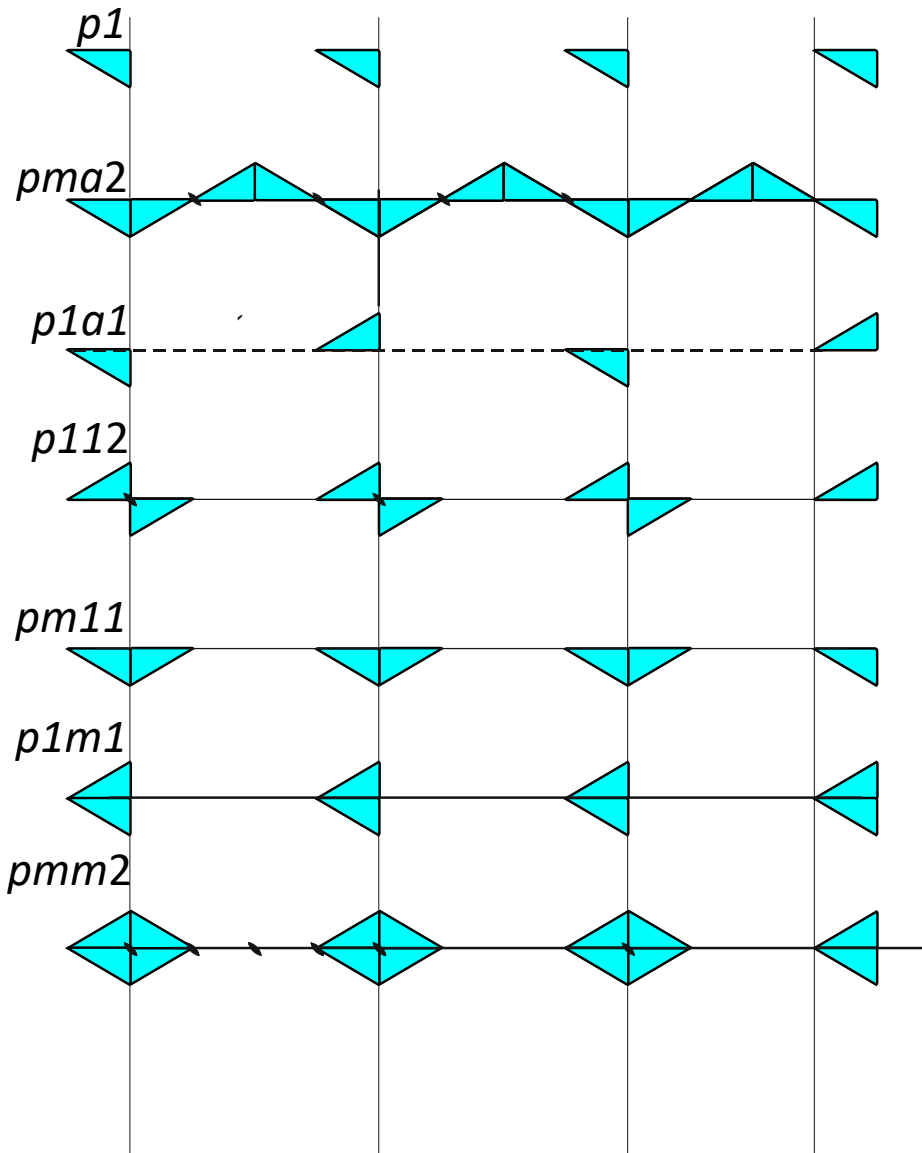
Бордюрами называются условно «плоские» бесконечные в одном направлении постройки, которые вполне могут описывать трехмерные объекты. С точки зрения теории симметрии такие группы всегда содержат специфическую полярную плоскость, совпадающую в иллюстрациях с плоскостью рисунка.

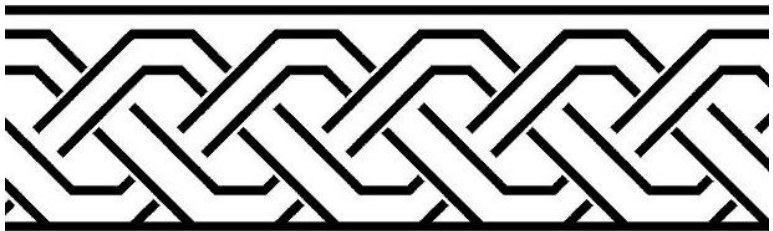
ДИСКРЕТНЫЕ БОРДЮРЫ



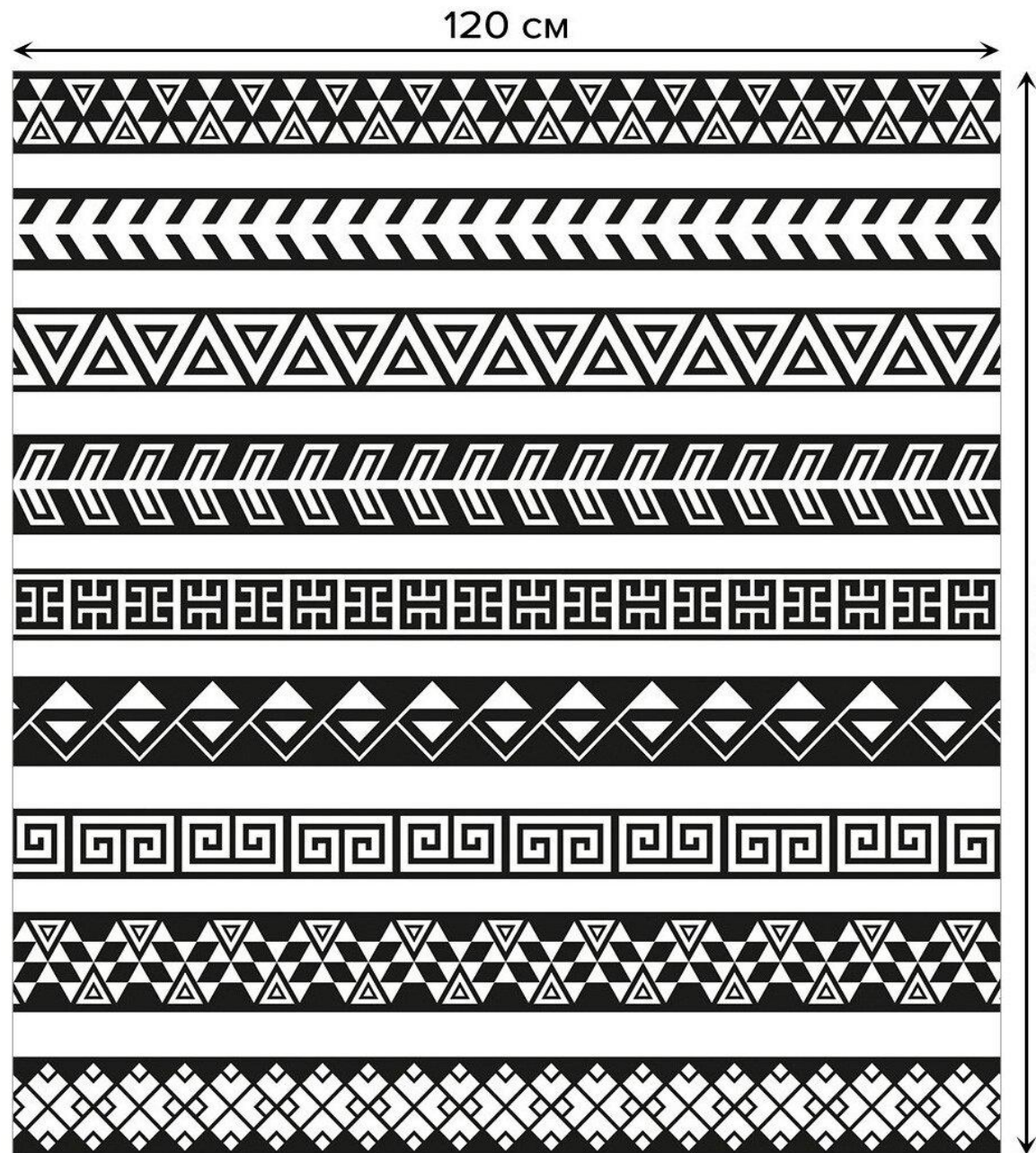
Дискретные бордюры (или односторонние ленты) могут содержать в качестве подрешеточных элементов симметрии только **2** и **m** . Причем плоскость может совпадать с бесконечным направлением или быть ему перпендикулярной. Оси высших порядков не могут участвовать, так как в любой ориентации размножат единственное бесконечное направление.

ДИСКРЕТНЫЕ БОРДЮРЫ





Потренируемся?



ДВУСТОРОННИЕ ЛЕНТЫ



В отличие от бордюров в двусторонних лентах допустимы «переворачивающие элементы» симметрии. Все группы симметрии лент порождены независимыми комбинациями 6 элементов симметрии:

$\vec{T}, 2, 2_1, m, a, \bar{1}$

Всего групп симметрии лент существует 31 (в том числе 7 бордюров)



1	$p1$		17	$p11\frac{2}{m}$	
2	$p121$		18	$pm2$	
3	$p2_122$		19	$pmmm$	
4	$p1m1$		20	$ptaa$	
5	$p1a1$		21	$ptma$	
6	$p2_1ma$		22	$p2_111$	
7	$p\frac{2}{m}11$		23	$p222$	
8	$p11\frac{2}{a}$		24	$p11m$	
9	$pm2m$		25	$p11a$	
10	$pm2a$		26	$p2_1am$	
11	$p211$		27	$p\frac{2}{m}11$	
12	$p112$		28	$p1\frac{2}{m}1$	
13	$p\bar{1}$		29	$ptm2$	
14	$p2mm$		30	$p1\frac{2}{a}1$	
15	$p2aa$		31	$ptat$	
16	$pm11$				

Геометрическая иллюстрация 31 группы симметрии лент (Шубников А.В., Копцик В.А.)

Зеленым цветом отмечены условно
односторонние плоские группы
(бордюры)

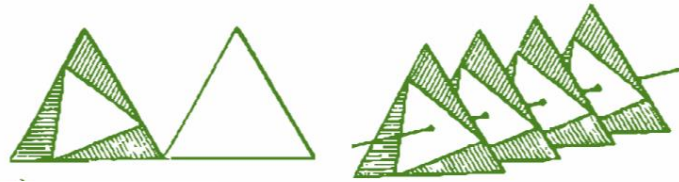
1*	$p1$	27*	$p\frac{2_1}{m}11$	51	$p\bar{6}m2$
2*	$p112$	28*	$p11\frac{2}{a}$	52	$p\bar{6}a2$
3*	$p211$	29	$p4/m$	53	$p4/mmm$
4	$p3$	30	$p4_2/m$	54	$p4/maa$
5	$p4$	31	$p6/m$	55	$p4_2/mma$
6	$p6$	32	$p6_3/m$	56	$p6/mmm$
7*	$p\bar{1}$	33*	$pm\bar{m}2$	57	$p6/maa$
8*	$p2_1$	34*	$p2mm$	58	$p6_3/mma$
9	$p3_1$	35*	$p2aa$	59	$p\bar{3}m$
10	$p3_2$	36*	$p2_1ma$	60	$p\bar{3}a$
11	$p4_1$	37*	$ptma2$	61*	$p222$
12	$p4_2$	38	$p3m$	62*	$p2_122$
13	$p4_3$	39	$p3a$	63	$p32$
14	$p6_1$	40	$p4mm$	64	$p3_12$
15	$p6_2$	41	$p4aa$	65	$p3_22$
16	$p6_3$	42	$p4_2ma$	66	$p422$
17	$p6_4$	43	$p6mm$	67	$p4_122$
18	$p6_5$	44	$p6aa$	68	$p4_222$
19	$p\bar{3}$	45	$p6_3ma$	69	$p4_322$
20	$p\bar{4}$	46*	$pmmm$	70	$p622$
21	$p\bar{6}$	47*	$ptaa$	71	$p6_122$
22*	$p11m$	48*	$ptma$	72	$p6_222$
23*	$pm11$	49	$p\bar{4}2m$	73	$p6_322$
24*	$p11a$	50	$p\bar{4}2a$	74	$p6_422$
25*	$p11\frac{2}{m}$			75	$p6_522$
26*	$p\frac{2}{m}11$				

Группы симметрии кристаллографических стержней и лент (Шубников А.В., Копцик В.А.)

Голубым цветом отмечены группы лент

Зеленым цветом отмечены условно односторонние плоские группы (бордюры)

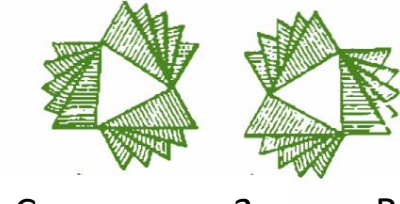
Кристаллографические группы симметрии стержней (лент, бордюров)



Стержень $p3$



Стержень $p6_3$

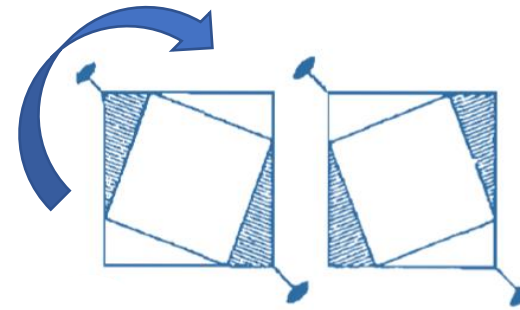


Стержень $p3_n$

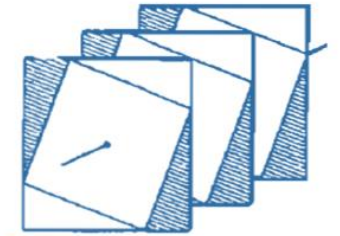
Винтовые оси 3_n с
иррациональным
углом поворота



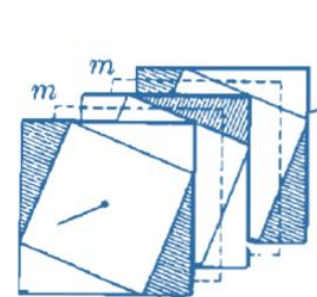
Стержень $p\bar{3}m$



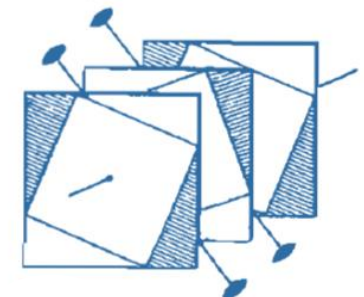
Лицевая и обратная
сторона фигуры
симметрии $\bar{4}$



Симметрия стержня $p\bar{4}$



Симметрия стержня
 $p4_2/m$



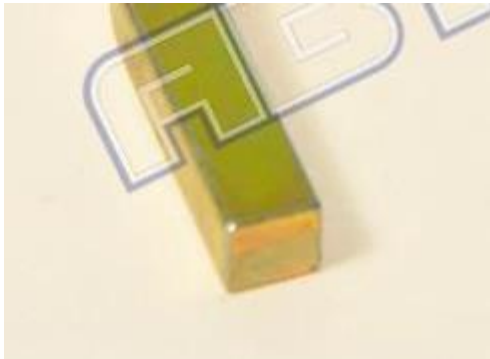
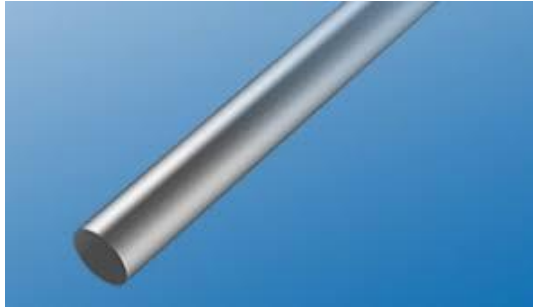
Симметрия стержня $p\bar{4}aa$

СТЕРЖНИ



В пространственных группах, описывающих симметрию объектов с бесконечной протяженностью в одном направлении присутствуют элементы с «бесконечностью». Наибольшее разнообразие таких элементов – в группе стержней, в которых допустимы как оси бесконечных переносов (бесконечно малая трансляция), так и *оси бесконечных порядков*, совмещенные с особым направлением. Количество плоскостей, проходящих через особое направление может быть любым. Таким образом групп симметрии стержней может быть бесконечное количество, но их можно поделить на 6 групп.

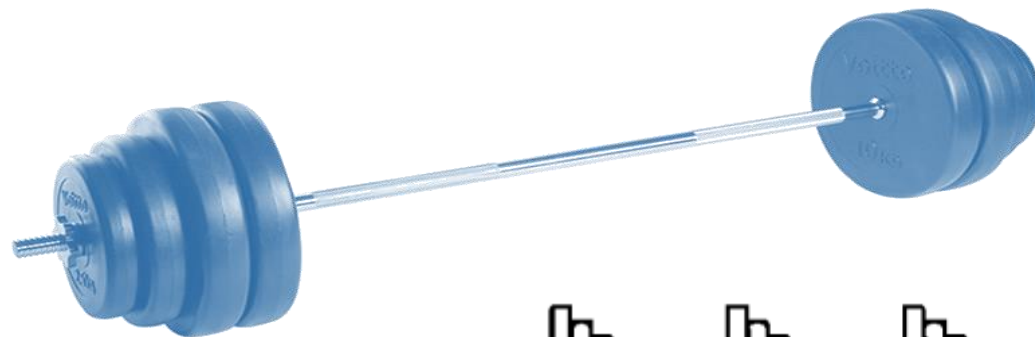
Стержни с предельной симметрией



Стержни с предельной симметрией бывают с как *с осями конечных переносов*, так и с *бесконечно малыми переносами*.



Стержни с предельной симметрией с осями конечных переносов



Ступенчатые шкивы вместе со стержнем покоятся: *ось бесконечного порядка и проходящее через нее бесконечное количество плоскостей*

Ступенчатые шкивы вместе со стержнем равномерно вращаются в одну сторону: *ось бесконечного порядка*

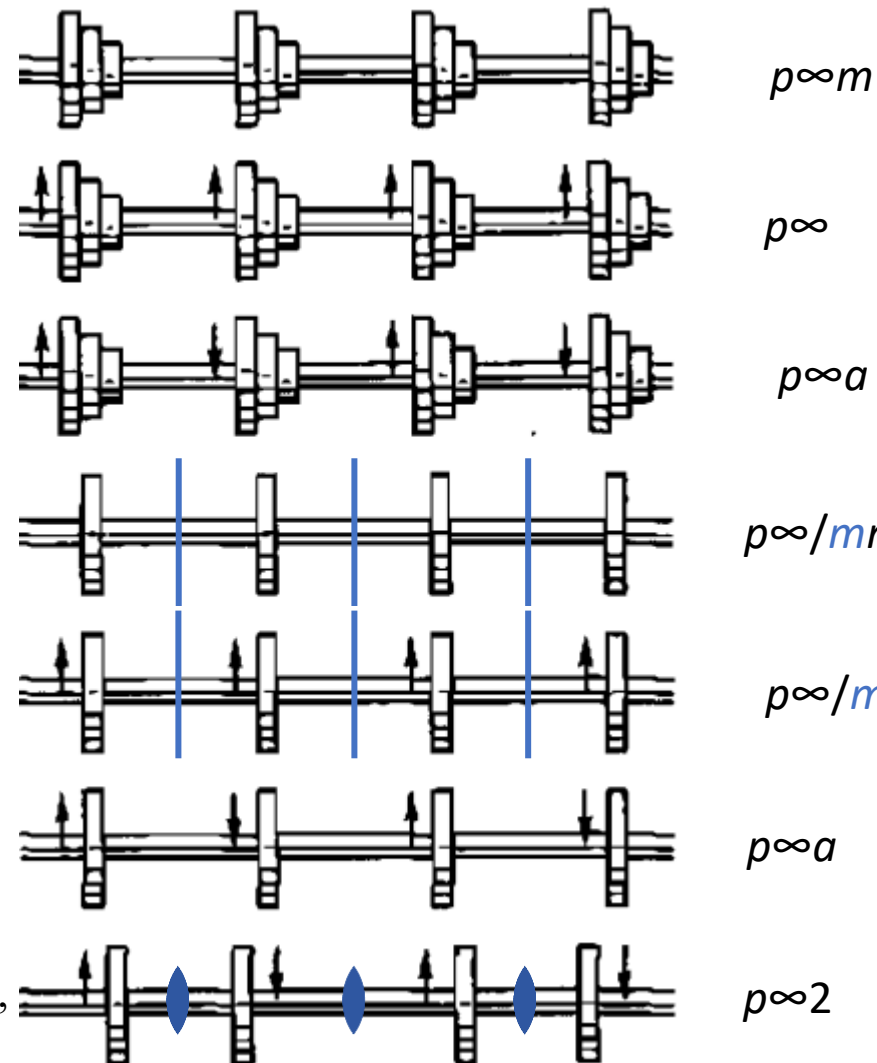
Ступенчатые шкивы вращаются в разные стороны, а стержень покоится: *плоскость скользящего отражения*

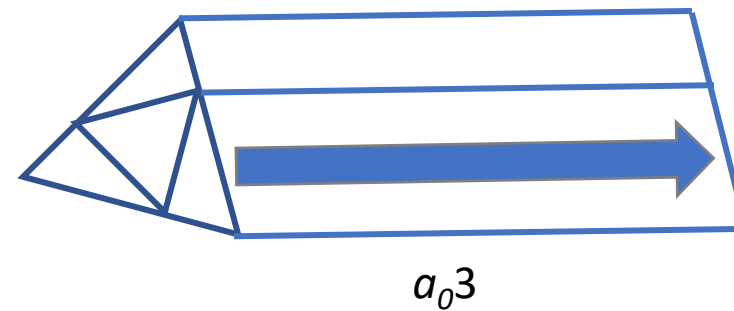
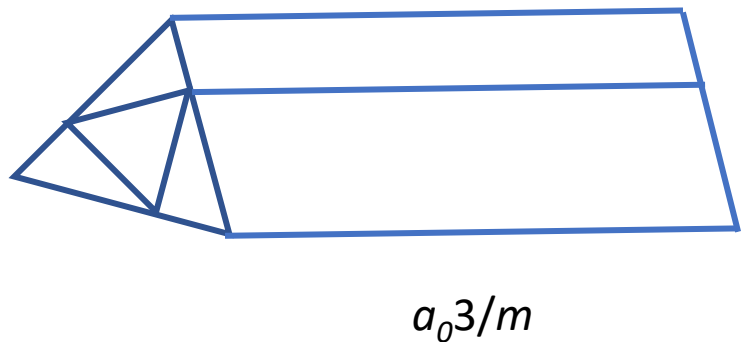
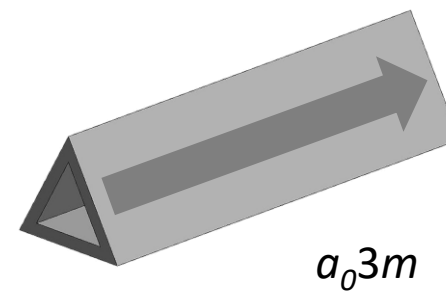
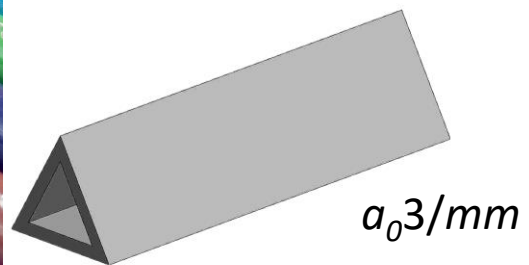
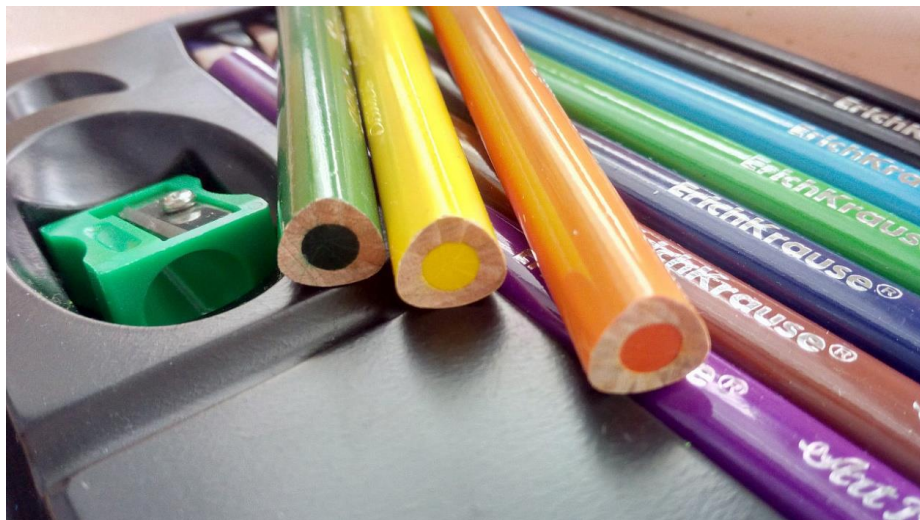
Гладкие шкивы и стержень покоятся: *ось бесконечного порядка, проходящее через нее бесконечное количество плоскостей и плоскость, перпендикулярная оси бесконечного порядка*

Гладкие шкивы и стержень вращаются в одну сторону

Гладкие шкивы поочередно вращаются в разные стороны, а стержень покоится

Гладкие шкивы группируются попарно и вращаются в разные стороны в каждой паре, покоится





Стержни с осями бесконечно малых переносов и предельной симметрией

Стержни с бесконечно малыми переносами (трансляцией) и предельной симметрией



a_0^∞/mm



a_0^∞/m



$a_0^\infty/22$



$a_0^\infty m$



a_0^∞



a_0^∞

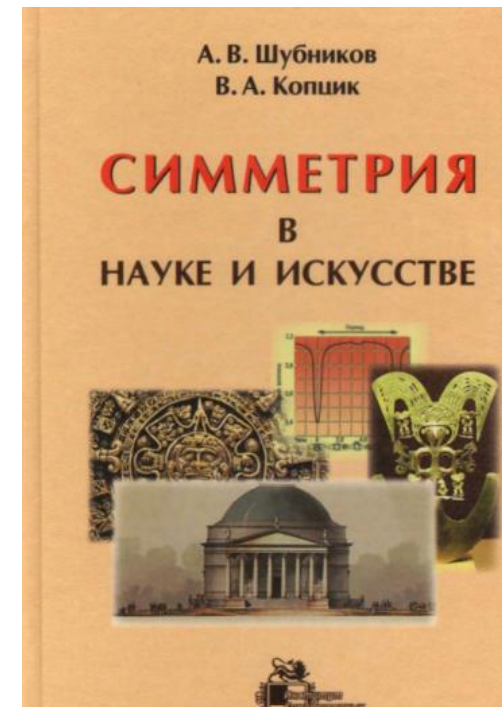
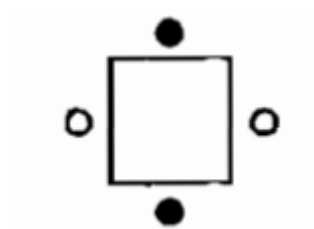
Стержни с дискретными поворотными осями и конечными переносами



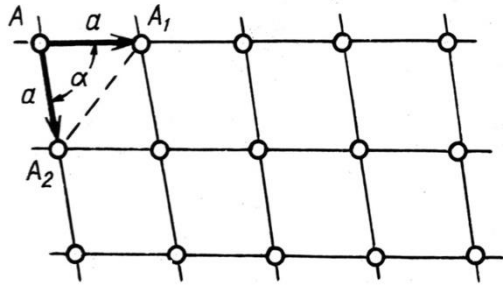
$a_0/422$



$a_0/4$



Пространства бесконечной протяженности в двух направлениях. Двумерные орнаменты



Условно плоские сетки, естественно, не допускают никаких «переворачивающих» элементов симметрии. Помимо этого не допустимы не кристаллографические оси симметрии, перпендикулярные плоскости орнамента. Двумерное периодическое пространство абсолютно кристаллографично

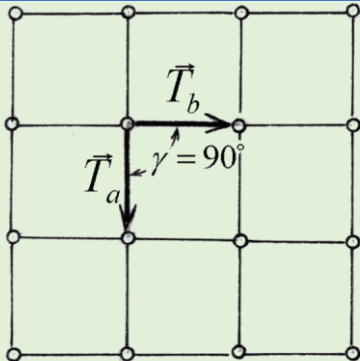
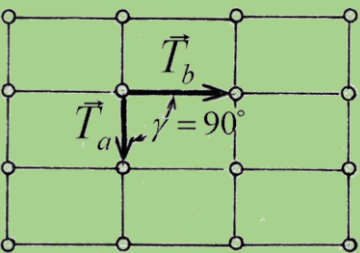
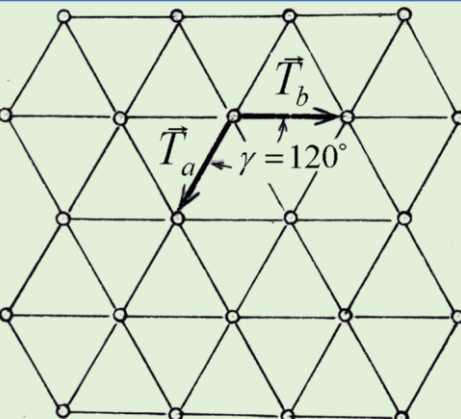
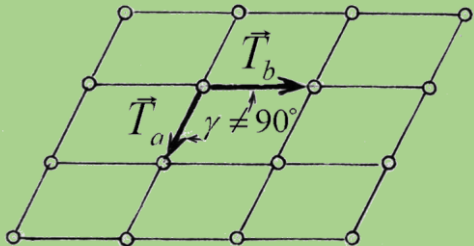
Размерность пространства

	0	1	2	3
0	1	2	10	32
1		2	7	75
2			17	80
3				230

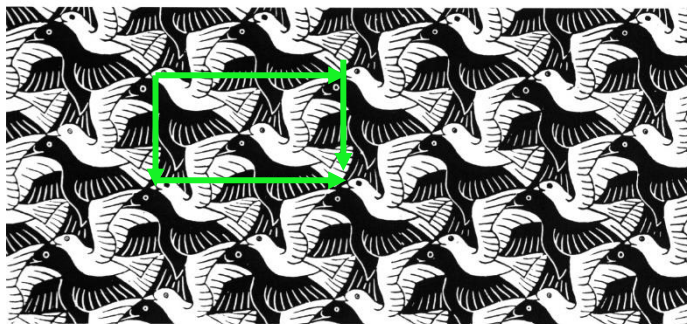
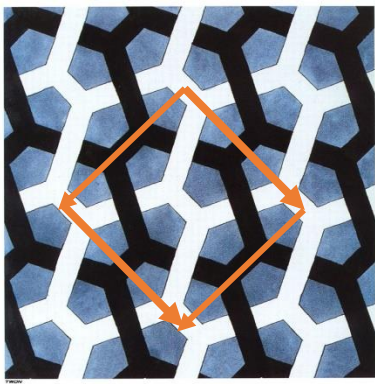
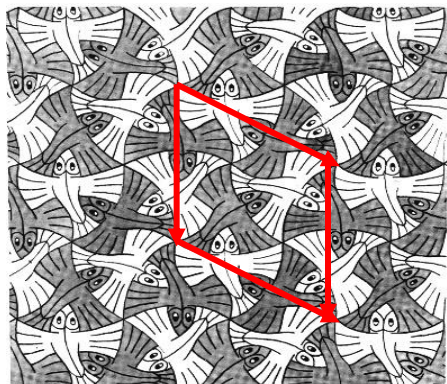
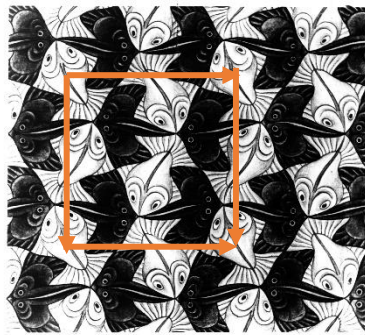
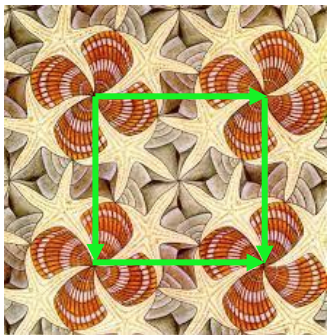
Периодичность пространства

ДВУМЕРНЫЕ РЕШЕТКИ

Необходимо отметить, что все плоские решетки всегда обладают осью 2, а решетки с осями высших порядков – плоскостями симметрии.

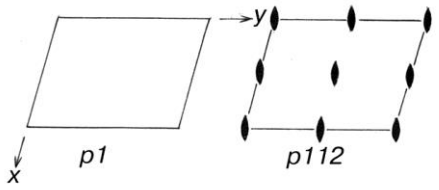
	$a = b$	$a \neq b$
$\alpha = 90^\circ$	 <p>$p4mm$</p>	 <p>$pmm2$</p>
$\alpha = 120^\circ$	 <p>$p6mm$</p>	?
$\alpha \neq 120^\circ, 90^\circ$?	 <p>$p112$</p>

ДВУМЕРНЫЕ РЕШЕТКИ

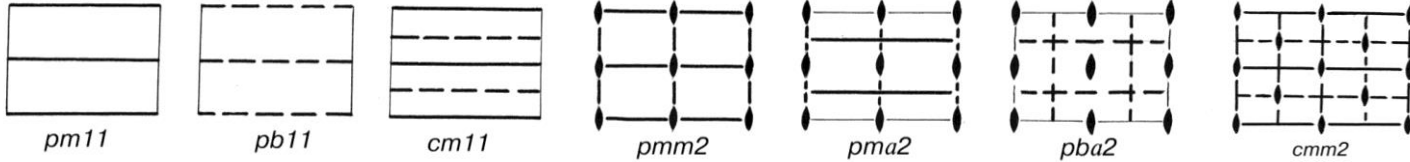


	$a = b$	$a \neq b$
$\alpha = 90^\circ$	<p>\vec{T}_a, \vec{T}_b, $\gamma = 90^\circ$ $p4mm$</p>	<p>\vec{T}_a, \vec{T}_b, $\gamma = 90^\circ$ $pmm2$</p>
$\alpha = 120^\circ$	<p>\vec{T}_a, \vec{T}_b, $\gamma = 120^\circ$ $p6mm$</p>	<p>\vec{T}_a, \vec{T}_b, $\gamma \neq 90^\circ$ $p112$</p>
$\alpha \neq 120^\circ, 90^\circ$	<p>\vec{T}_a, \vec{T}_b, $\gamma = 90^\circ$ $cmm2$</p>	<p>\vec{T}_a, \vec{T}_b, $\gamma \neq 90^\circ$ $p112$</p>

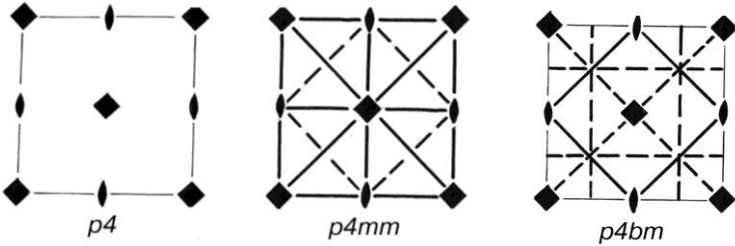
17 пространственных групп бесконечной протяженности в двух направлениях



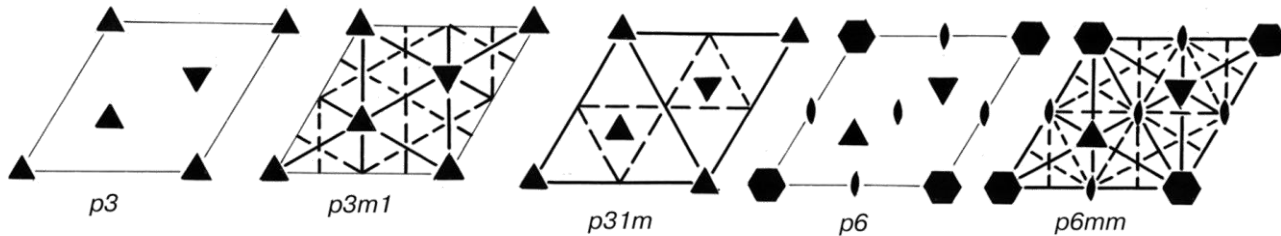
Косоугольная сингония



Прямоугольная сингония

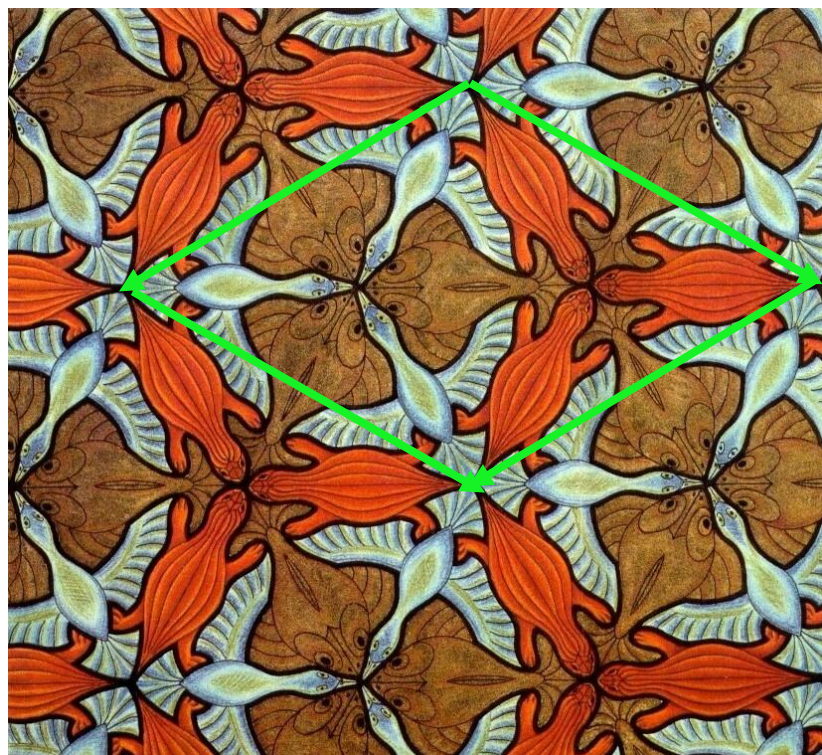
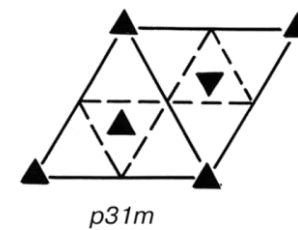
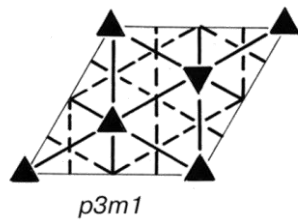


Квадратная сингония

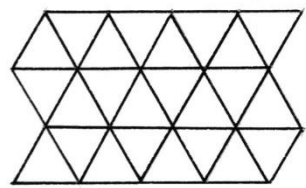


Гексагональная сингония

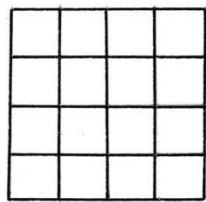
Принципиальное различие координатных и диагональных плоскостей в гексагональной сингонии



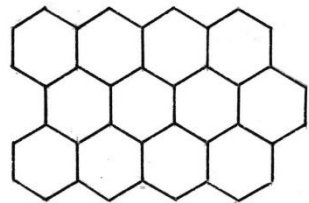
11 плоских правильных сеток Кеплера.



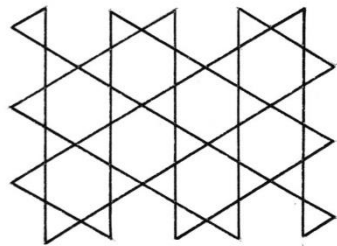
3⁶



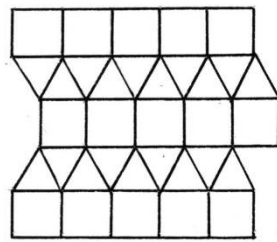
4⁴



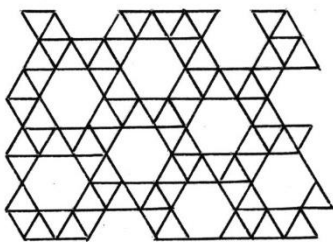
6³



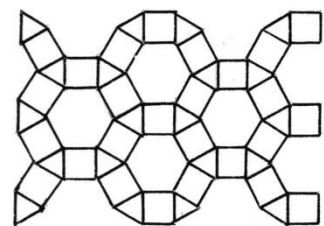
3636



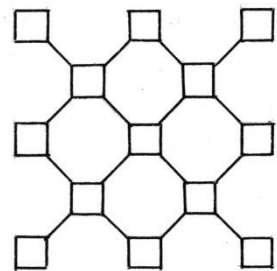
3³4²



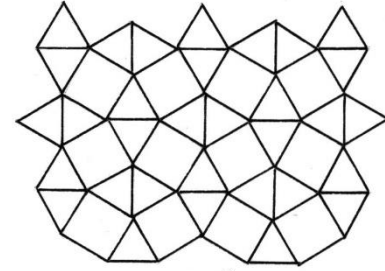
3⁴6



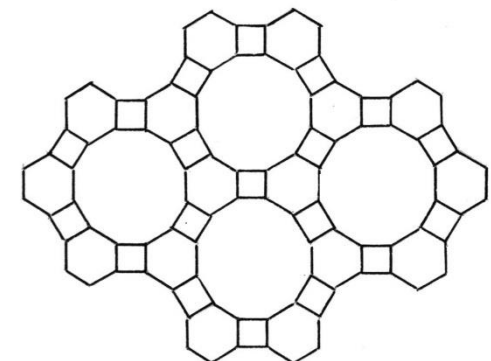
3464



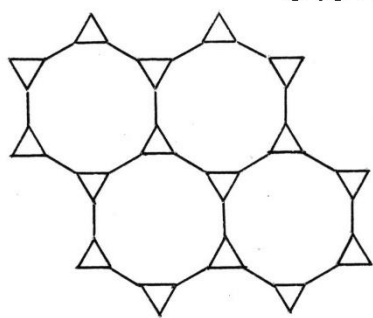
48²



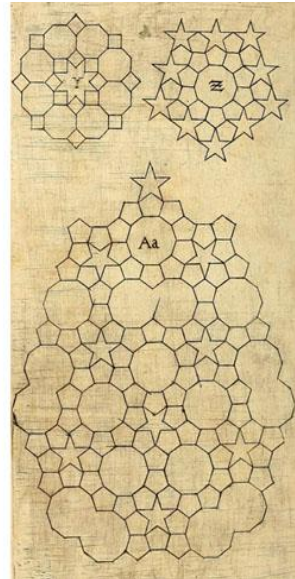
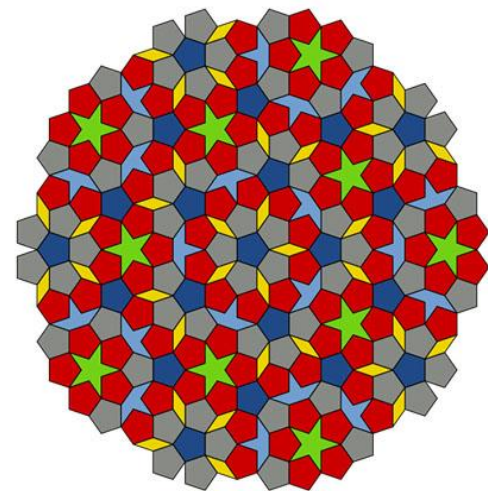
343²4



4612



312²



Сетки Кеплера отражают возможности
выполнения плоскости правильными
многоугольниками.

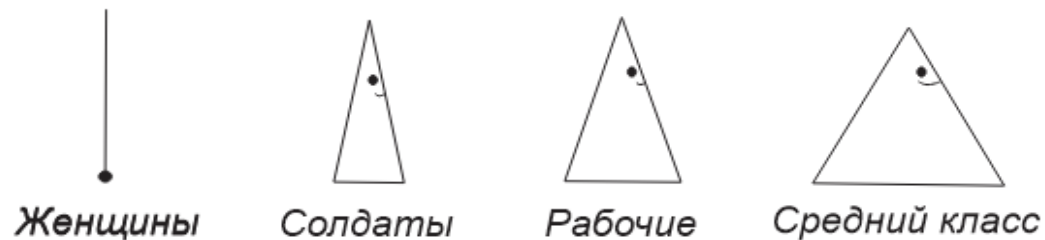
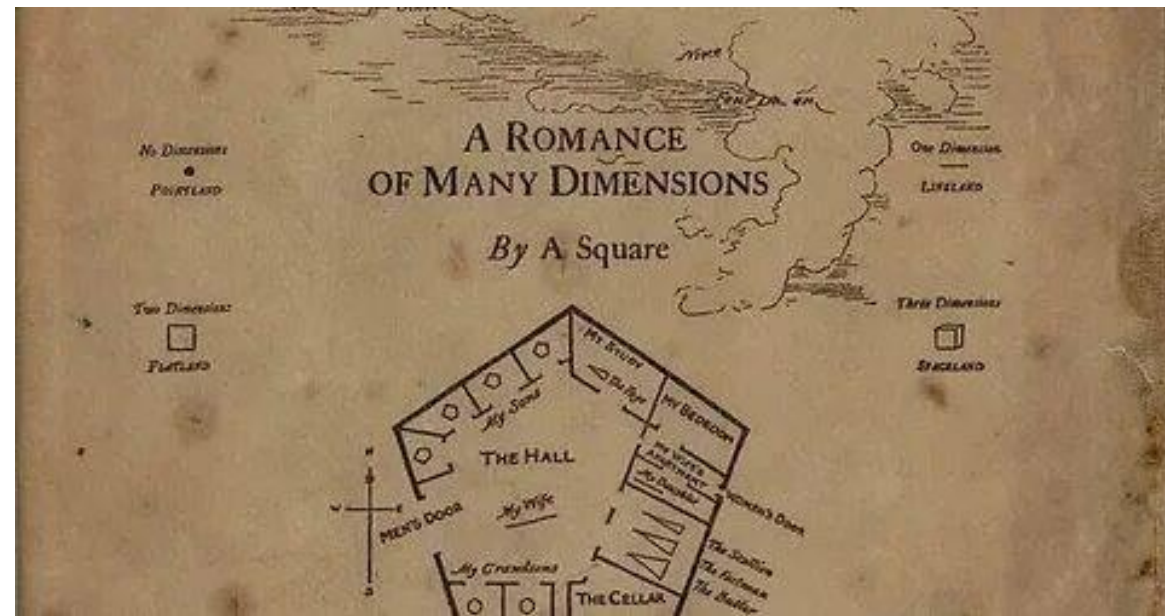
Флатландия

Флатландию населяют плоские простейшие фигуры и линии (флатландские женщины).

Из-за того, что флатландцы не могут посмотреть на себя со стороны (их зрение также находится в двумерном измерении), они не знают, как точно выглядят, не знают что такое площадь. Однако они нашли способы распознавать различные фигуры.

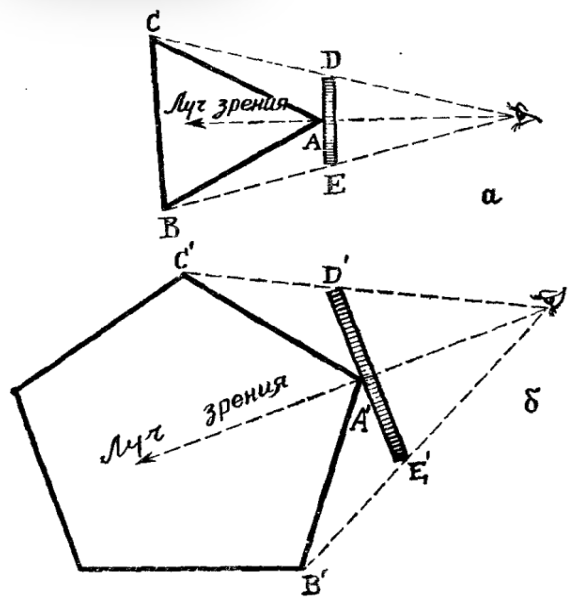
Во Флатландии существует жёсткое классовое деление, которое зависит от формы жителя, а именно от количества граней и правильности фигуры. Так, этим миром правят совершенные круги, далее идут шестиугольники, равносторонние равнобедренные треугольники, и, наконец, остроугольные. Профессия тоже даётся при рождении

Распознавание фигур заключается в сравнении скоростей и формы изменений линии при повороте. Конечно, со стороны необразованного флатладца все остальные выглядят как одинаковые линии. Но представители аристократии способны различать затемнённые участки на отрезках, которые на самом деле являются тенями граней.

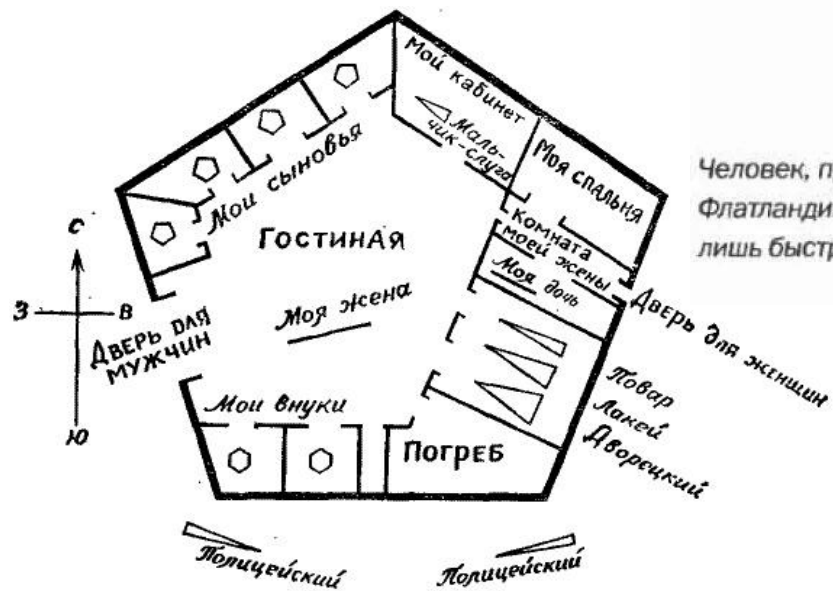




Флатландия



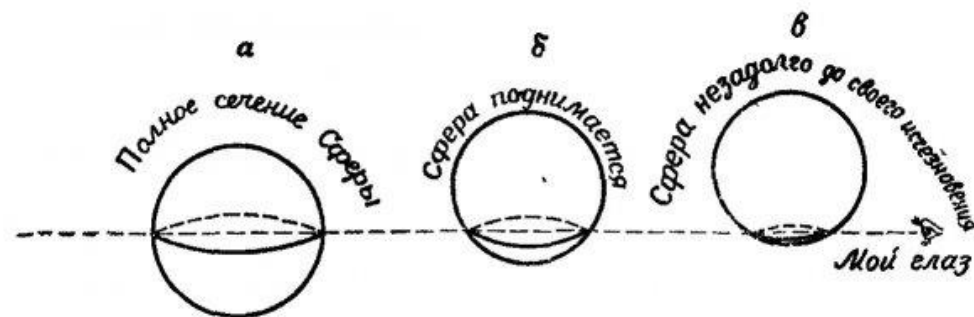
Флатландцы живут на плоскости



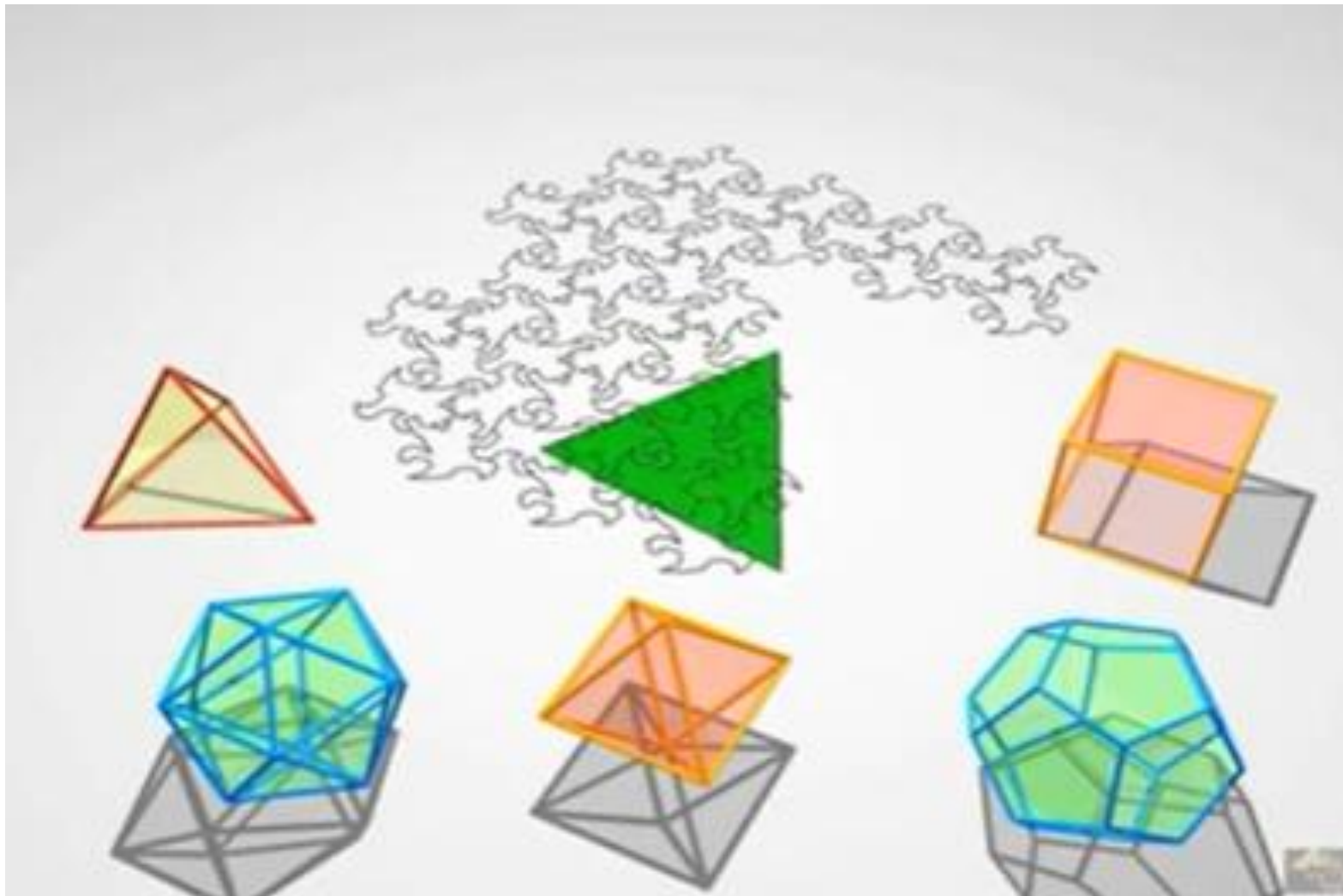
Дом типичного флатладца



Человек, провалившийся сквозь Флатландию. Ее житель Квадрат увидел бы лишь быстро меняющиеся темные области.

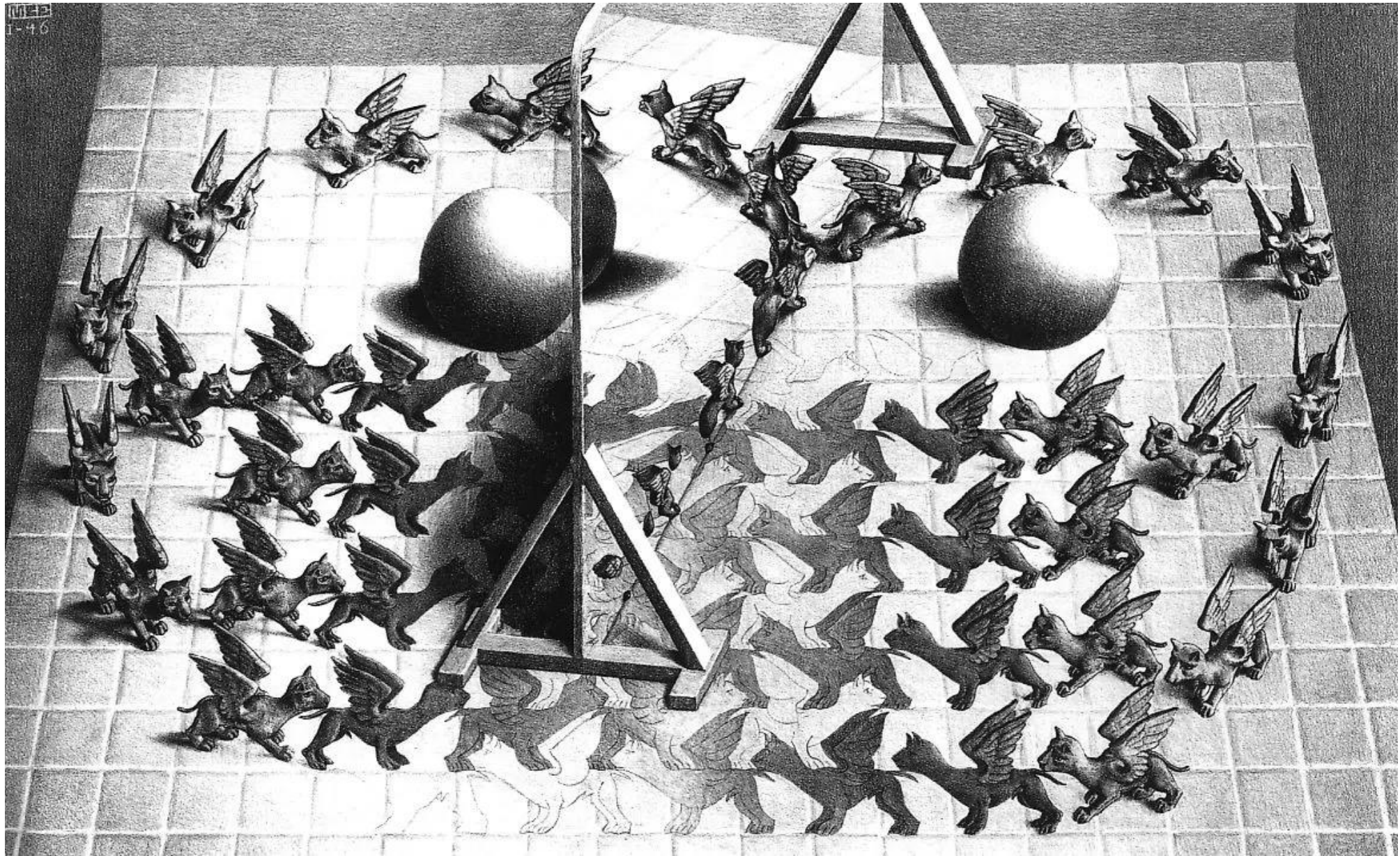


Что увидел Квадрат, наблюдая за подъемом Сферы.



Путешествие между пространствами
Посмотрите поясняющий мультик по переходу 2D в 3D
<http://cryst.geol.msu.ru/courses/crgraf/3dimension.mp4>

MEP
1-46



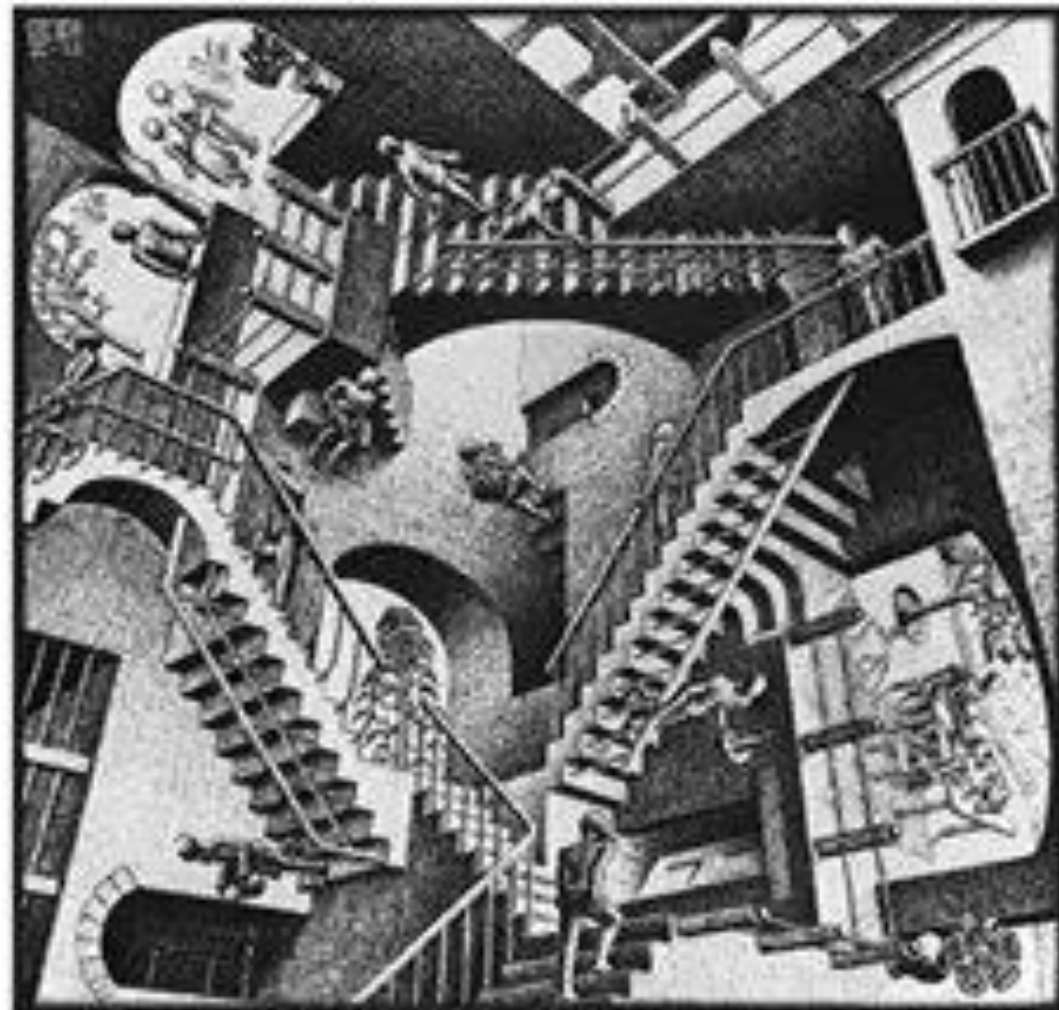


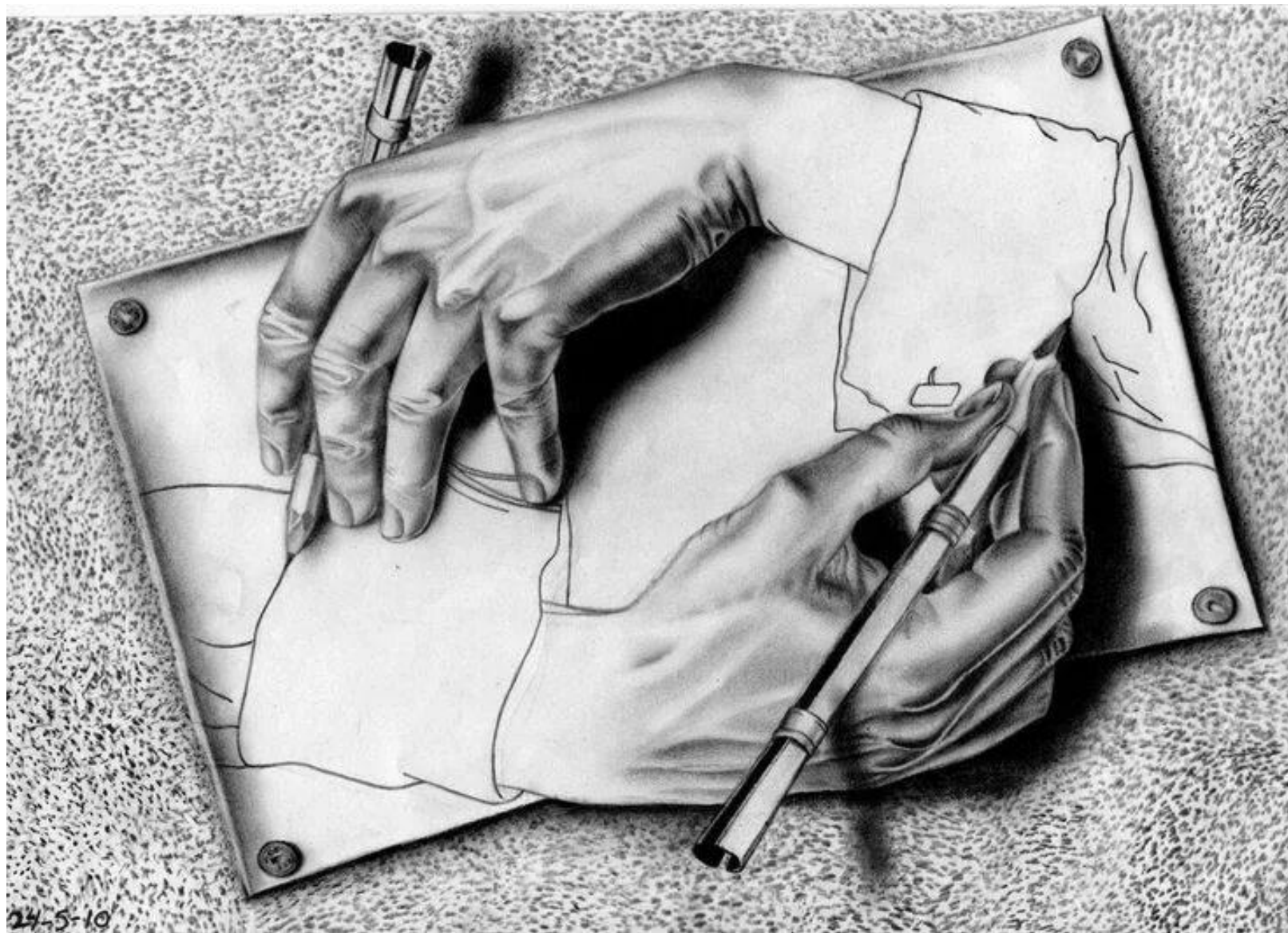
Ма́уриц
Корне́лис Э́шер
Нидерландский
художник-график

«Математики открыли дверь, ведущую в другой мир, но сами войти в этот мир не решились. Их больше интересует путь, на котором стоит дверь, чем сад, лежащий за ней».

(М.К.Эшер)

Известен, в первую очередь, работами, в которых он использовал разные математические концепции -- от предела и ленты Мебиуса до геометрии Лобачевского. Не остались в стороне и кристаллографические плоские группы симметрии

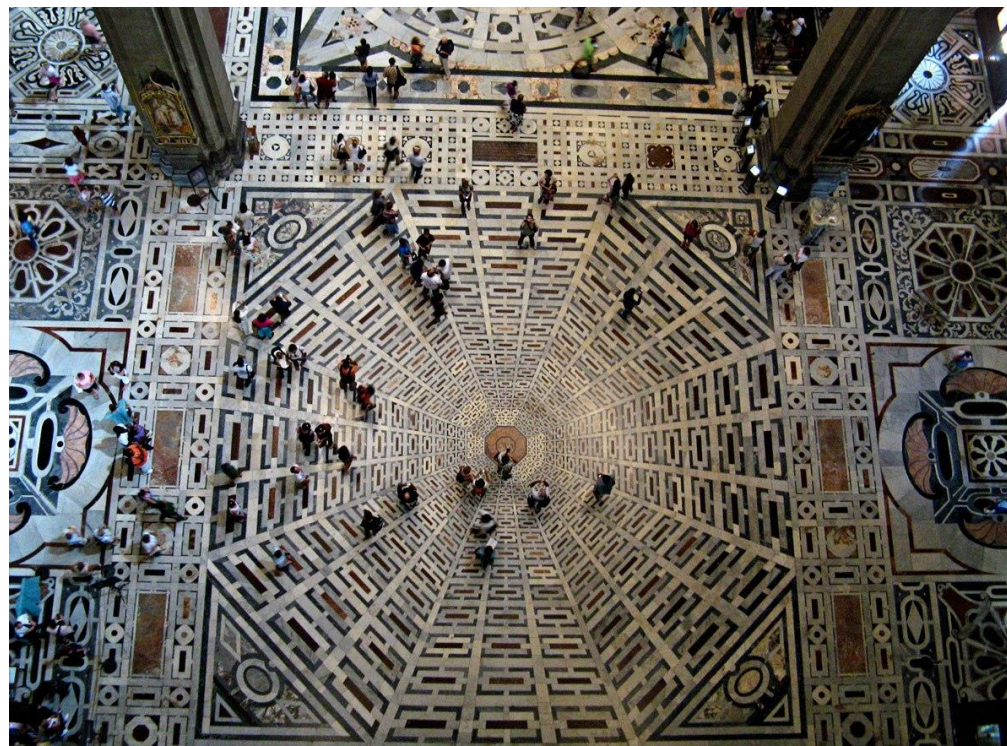




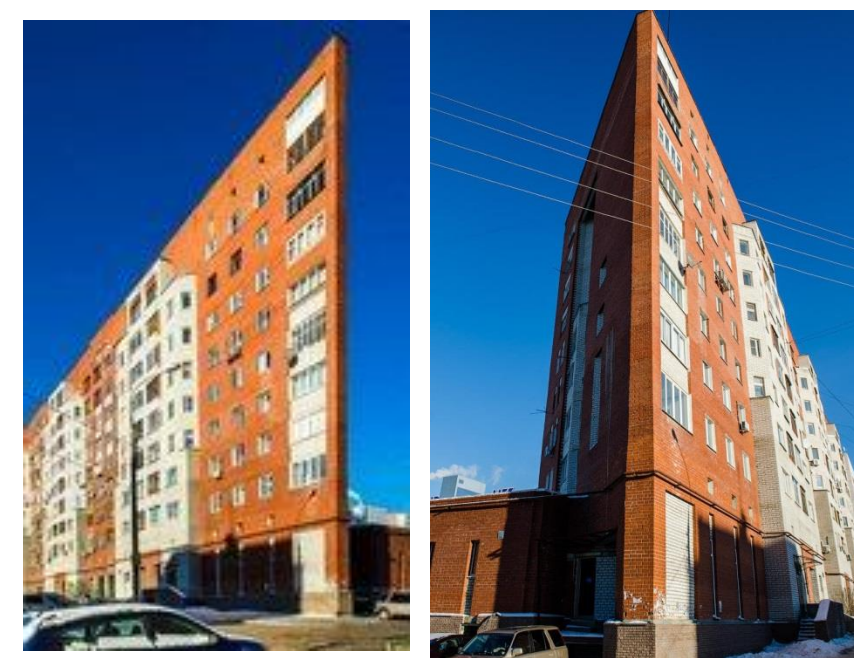
М.К.Эшер Гравюра Рисующие руки 1948 г

Оптические иллюзии

Оптическая иллюзия, — ошибка в зрительном восприятии, вызванная неточностью или неадекватностью процессов неосознаваемой коррекции зрительного образа, а также физическими причинами.



Собор Санта-Мария-Дель-Фьоре во Флоренции



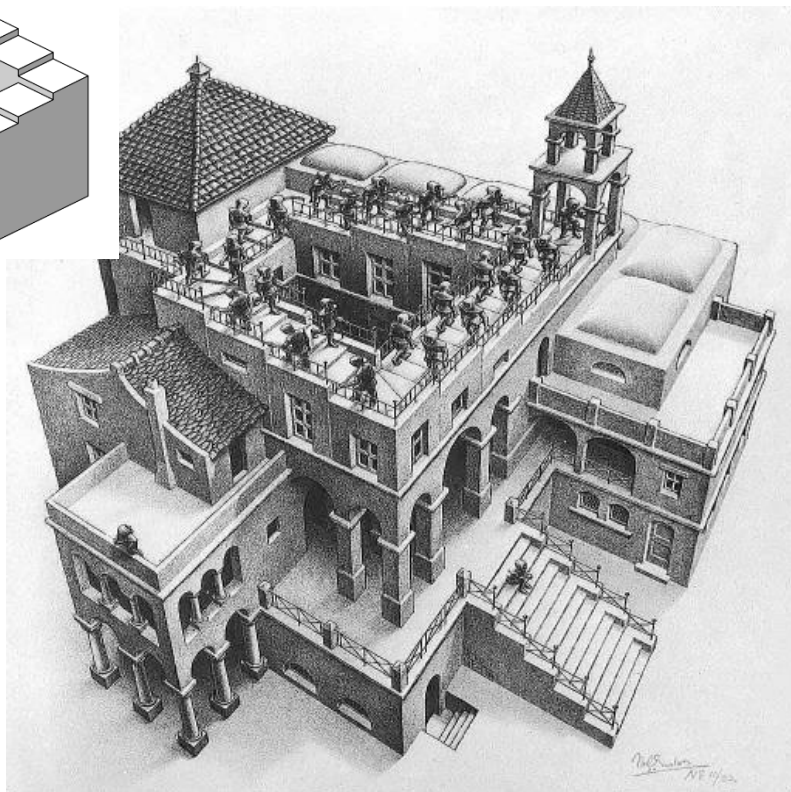
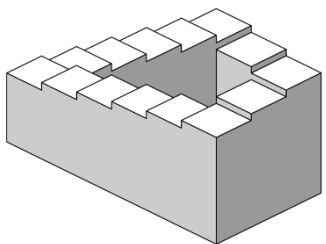
Дом в Нижнем Новгороде

*Наше зрение
двумерно! Поэтому
нас так легко
обмануть.*





Фантазии М.Эшера на тему «невозможного треугольника»



«Невозможный треугольник»

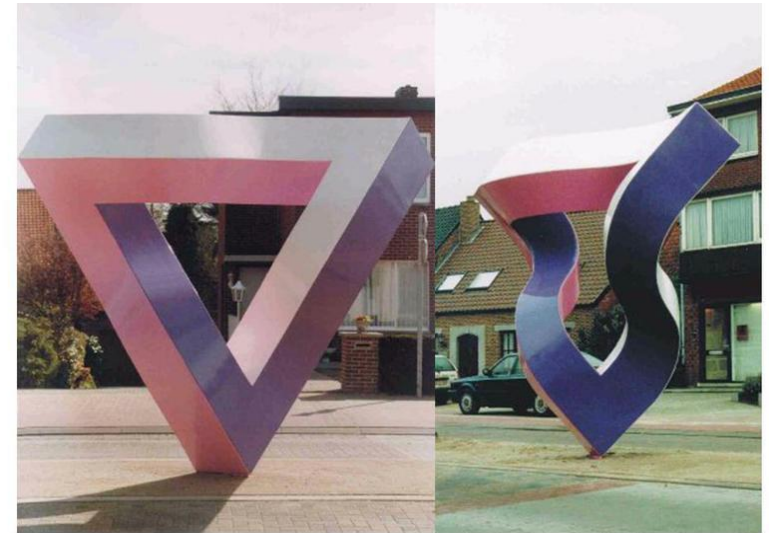
Невозможный треугольник был открыт в 1934 году шведским ученым Оскаром Реутерсвардом, который составил его из кубиков



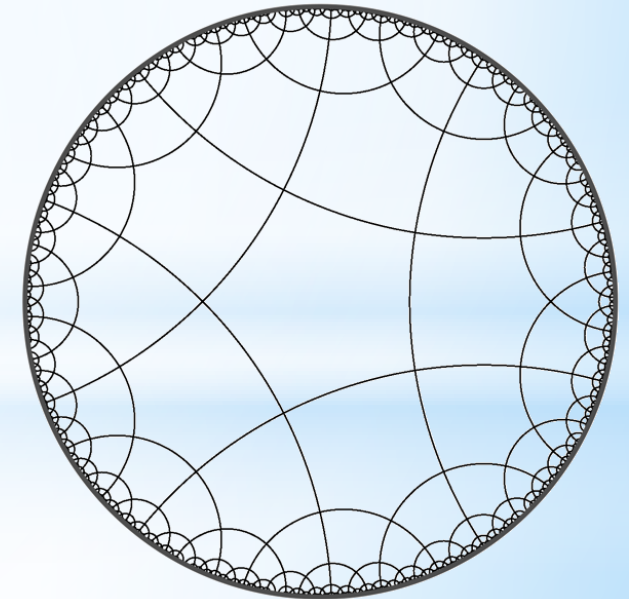
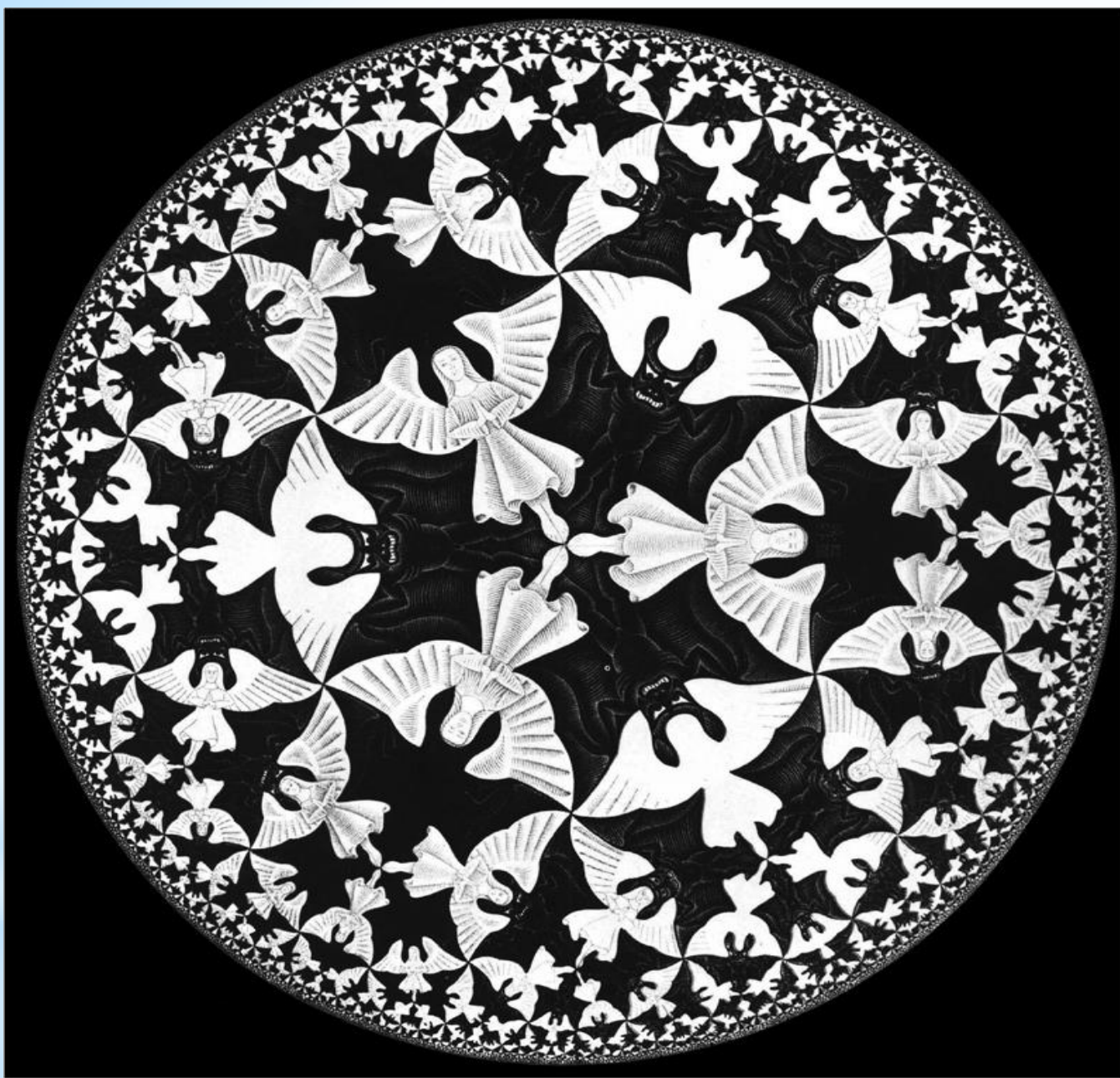
В 1954 году независимо от Реутерсварда английский математик и физик Роджер Пенроуз снова открыл этот же треугольник (трибар)



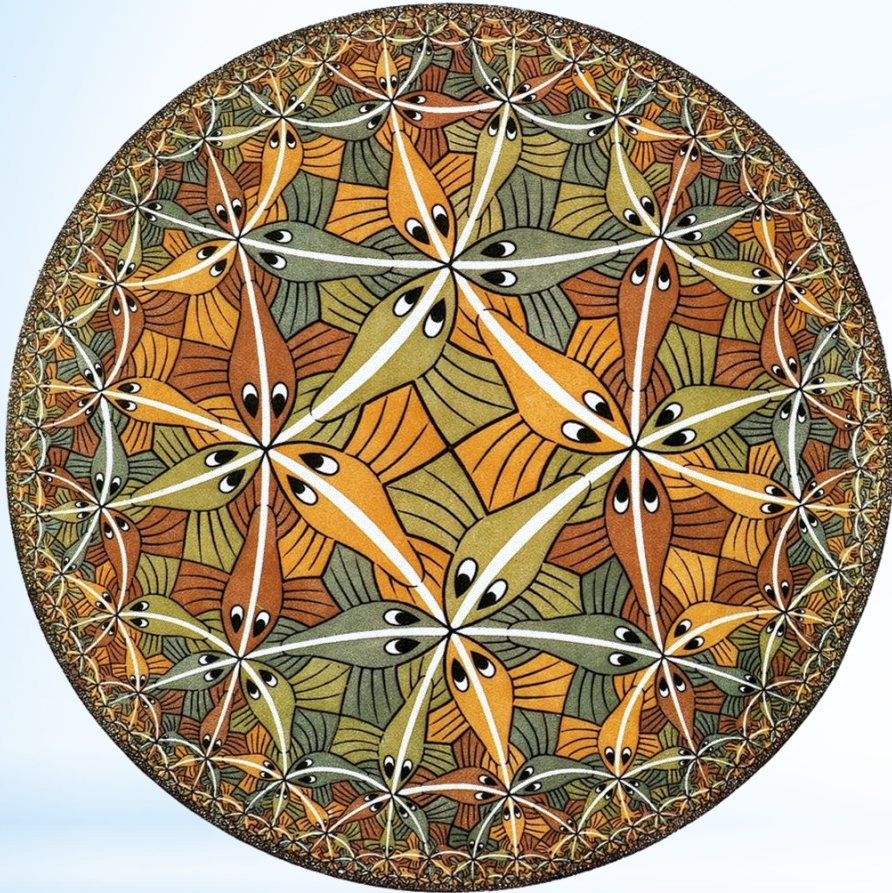
Трибар Реутерсварда из кубиков был напечатан на шведской марке



Скульптура невозможного треугольника, д. Опхувен, Бельгия



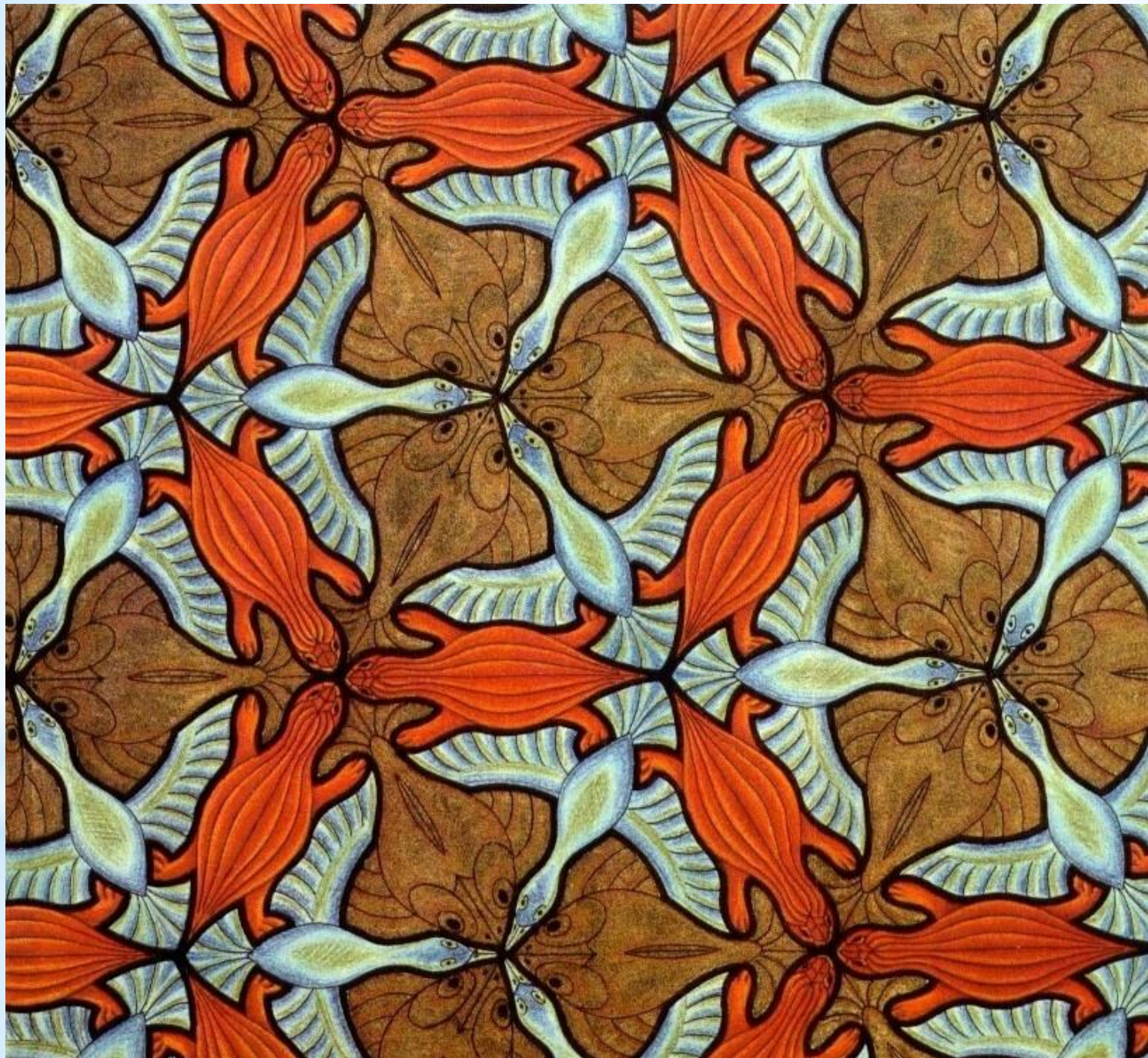
Предел круга IV М.Эшера и гиперболическая модель А. Пуанкаре.

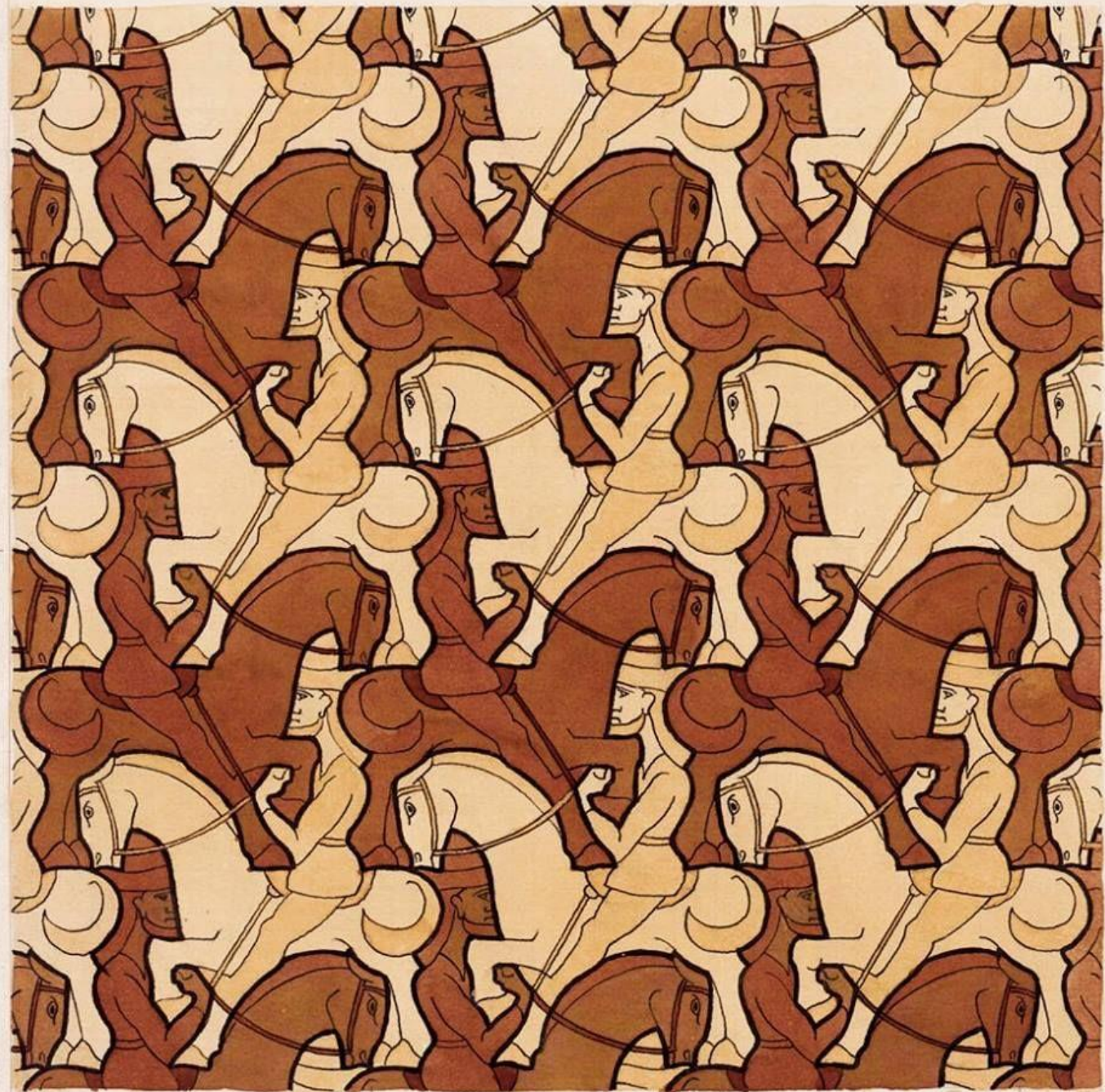


Предел круга III М.Эшера.

А еще М. Эшер
проиллюстрировал все
плоские группы





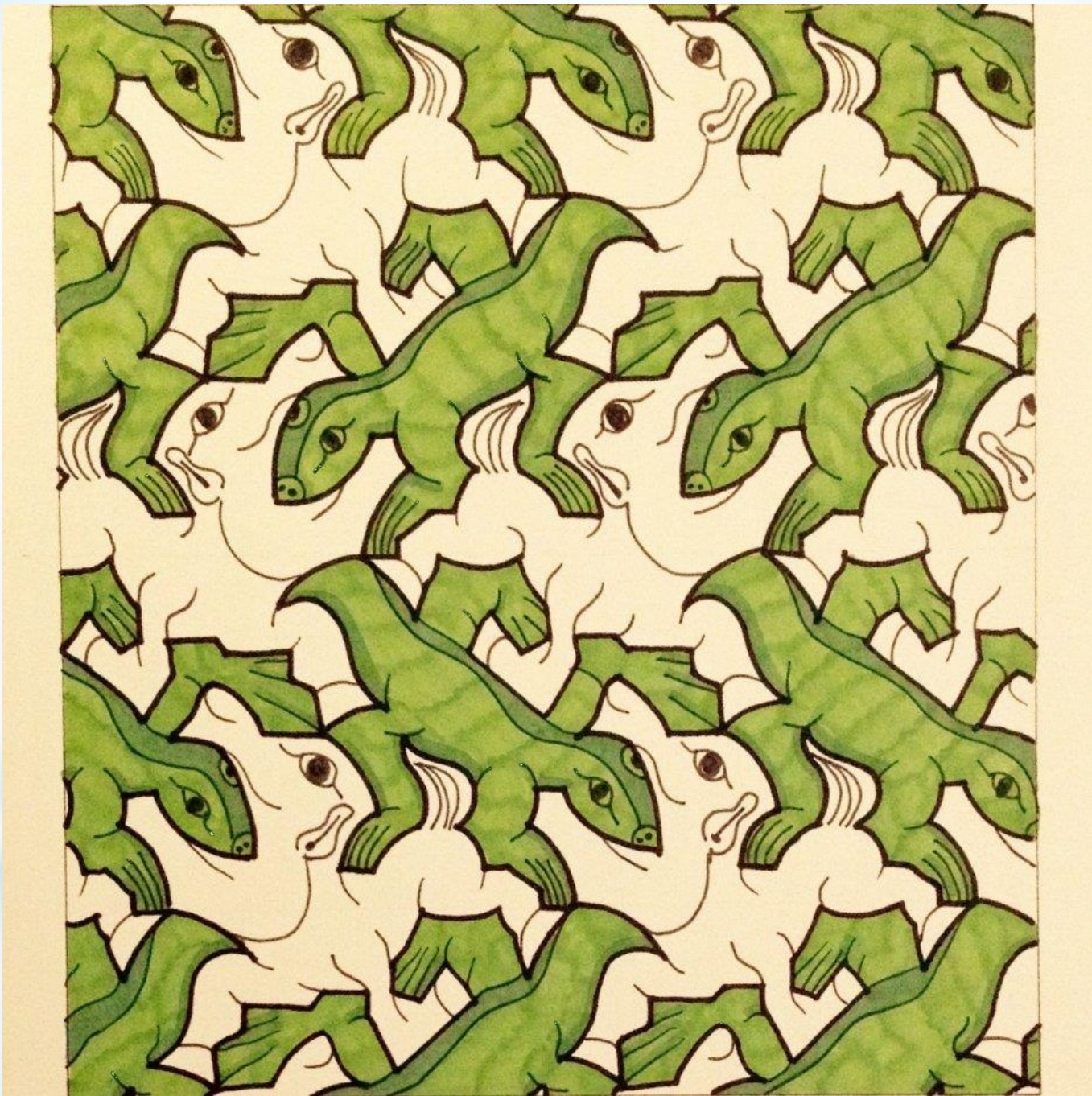


system IV B

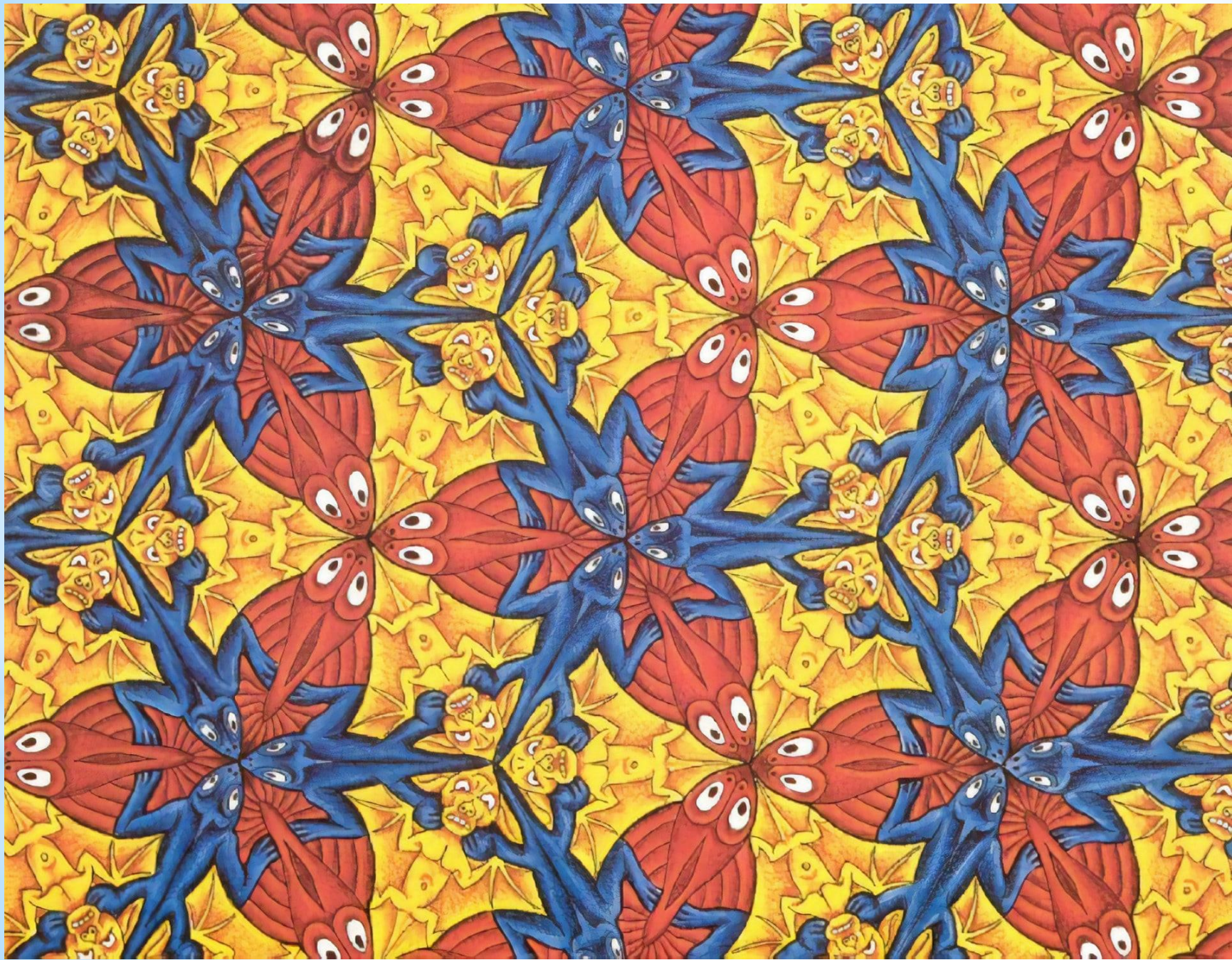
Daam VI-46



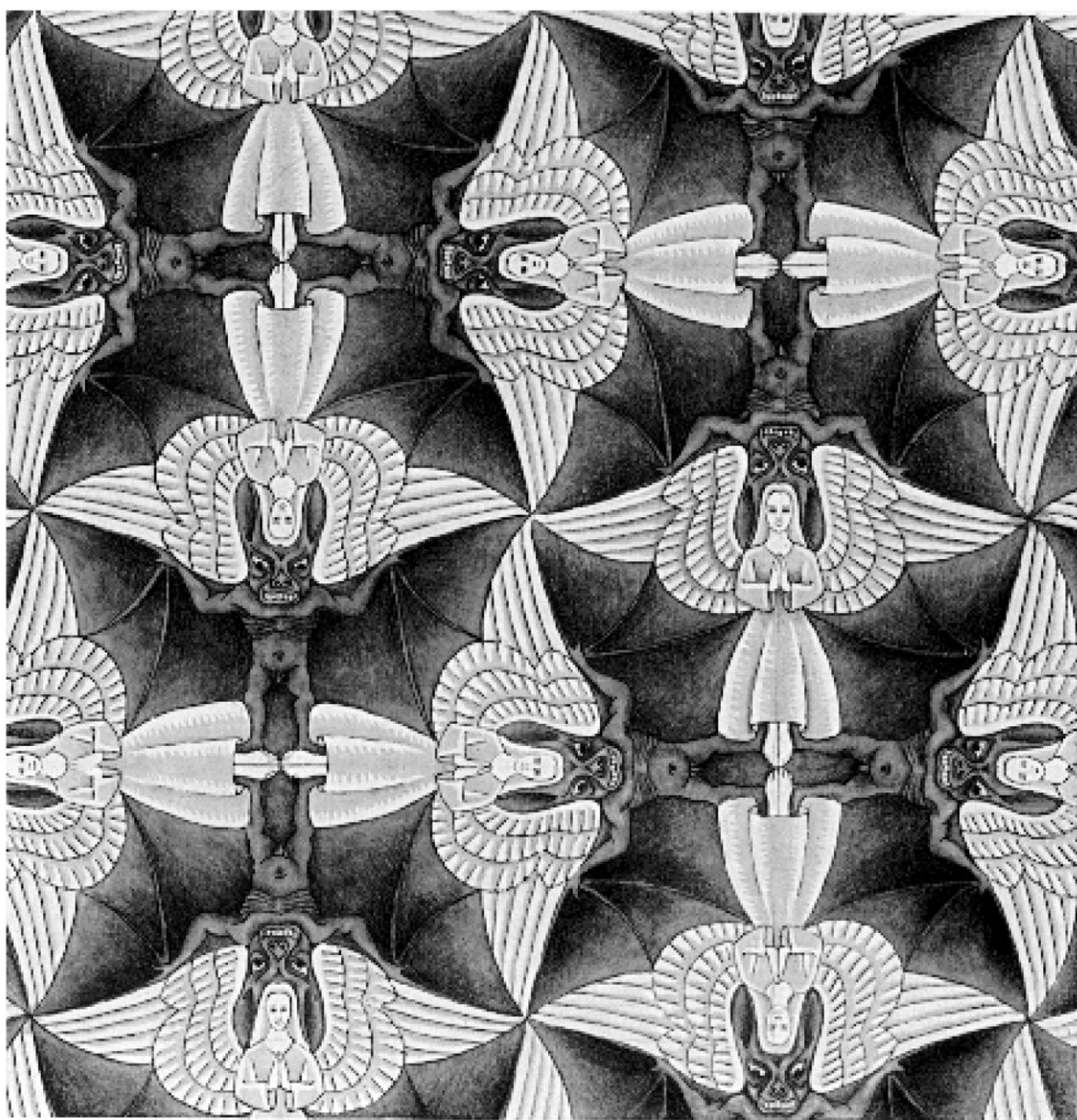
Brown, IV - '64





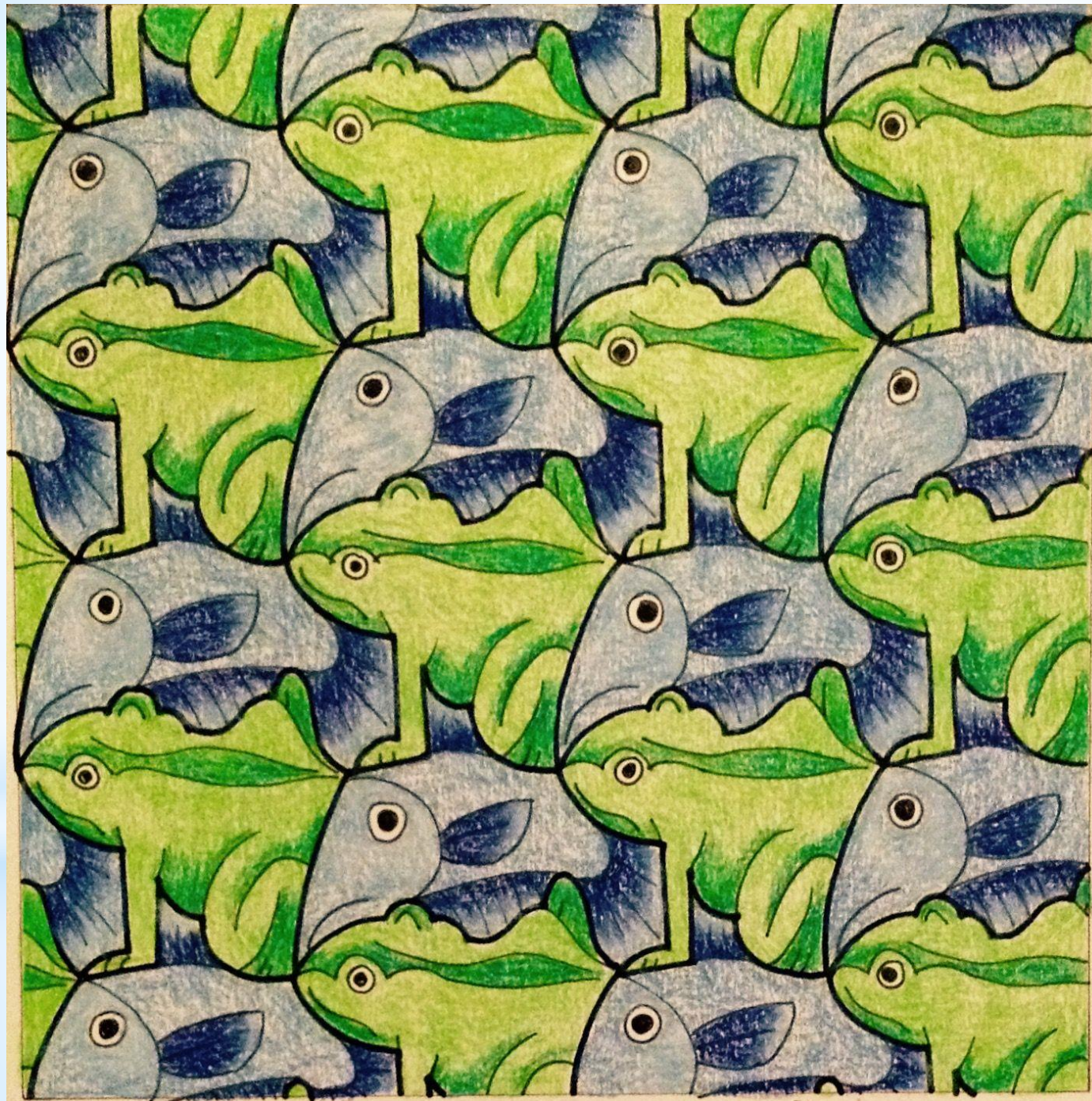


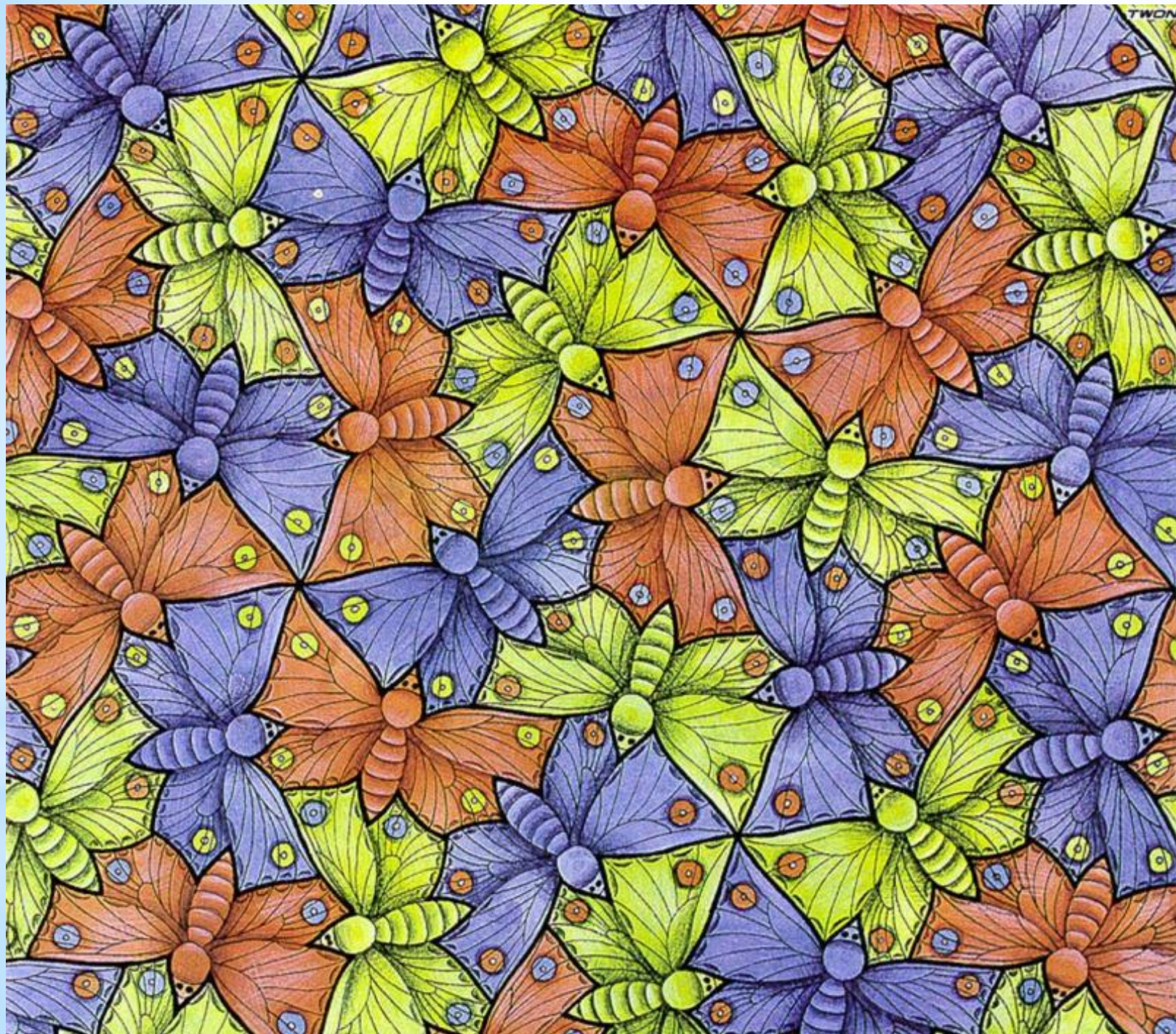


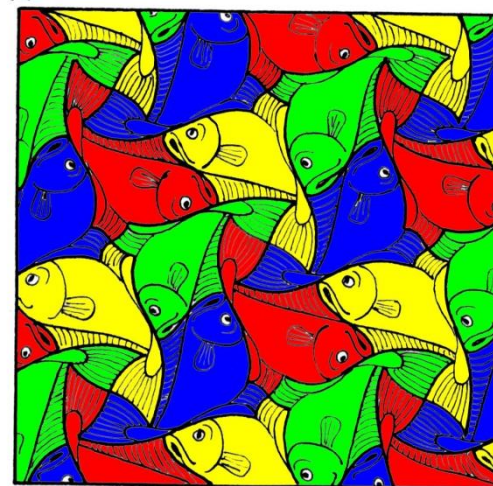
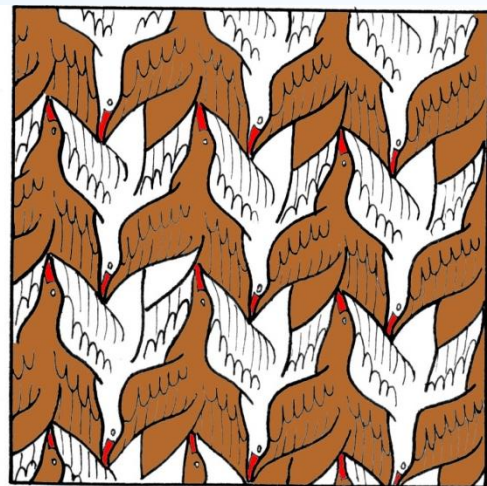
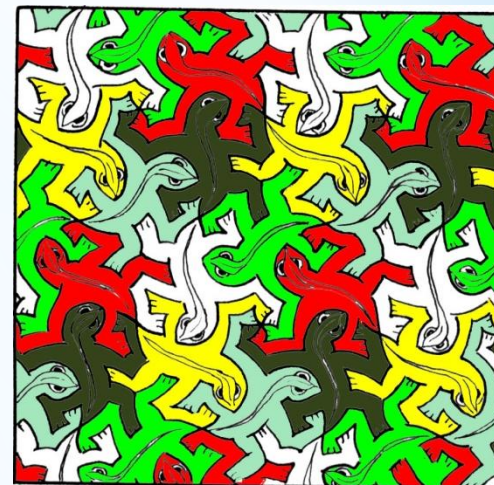
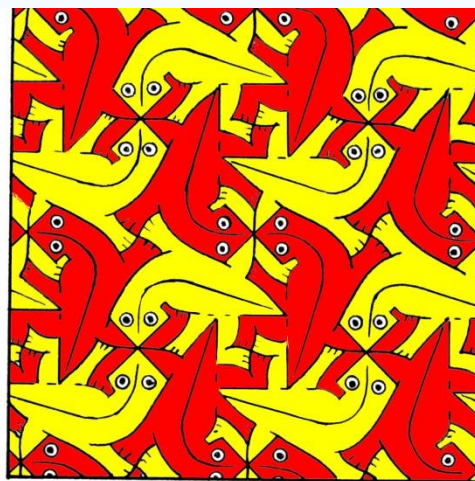
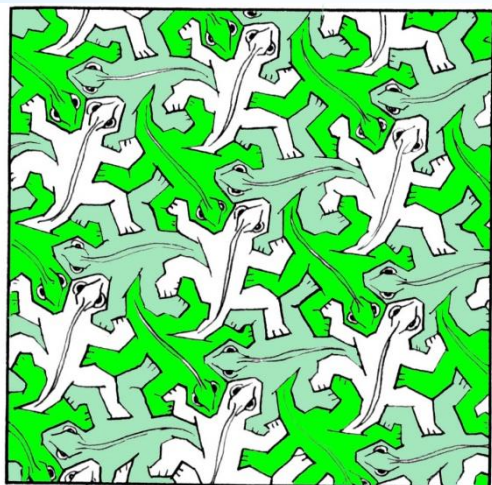




TWON







Рисунки М. Эшера, иллюстрирующие группы цветной и антисимметрии.

Куры Пенроуза

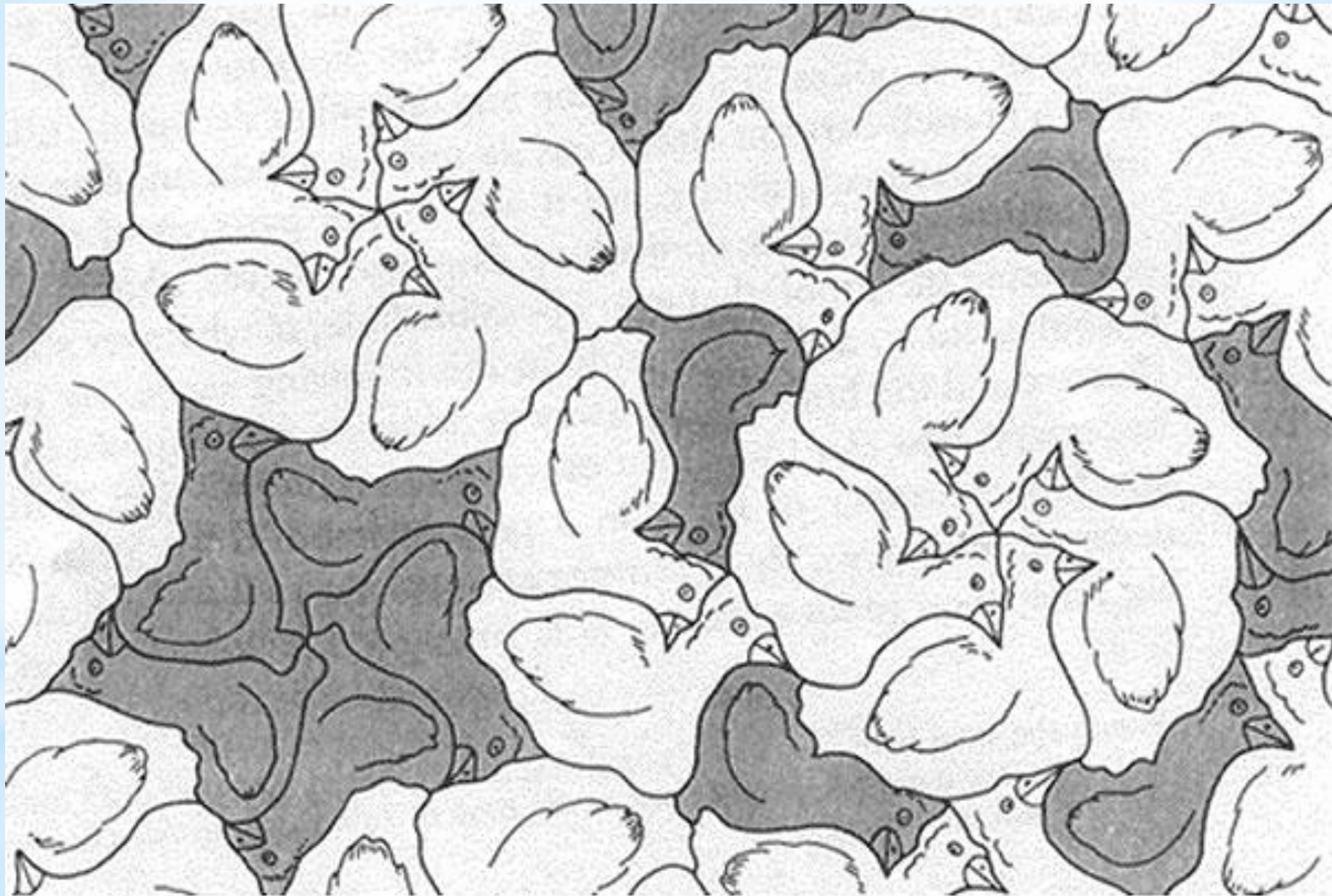
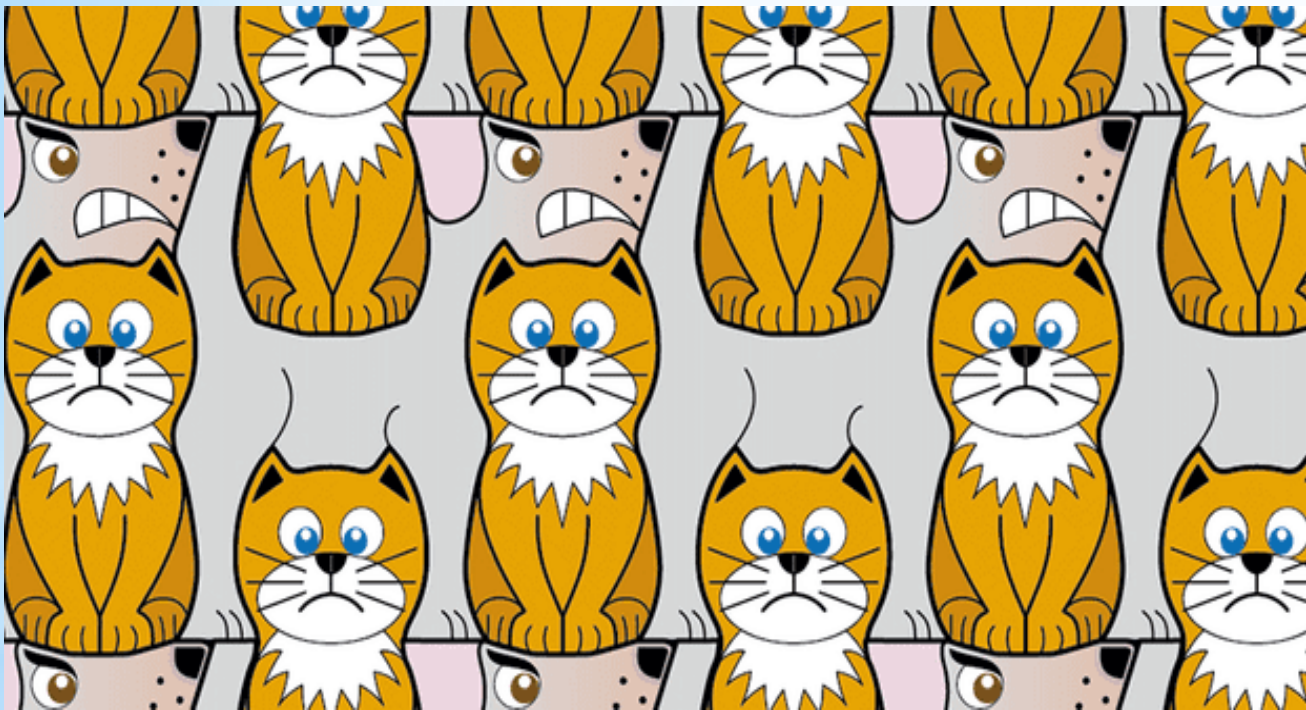
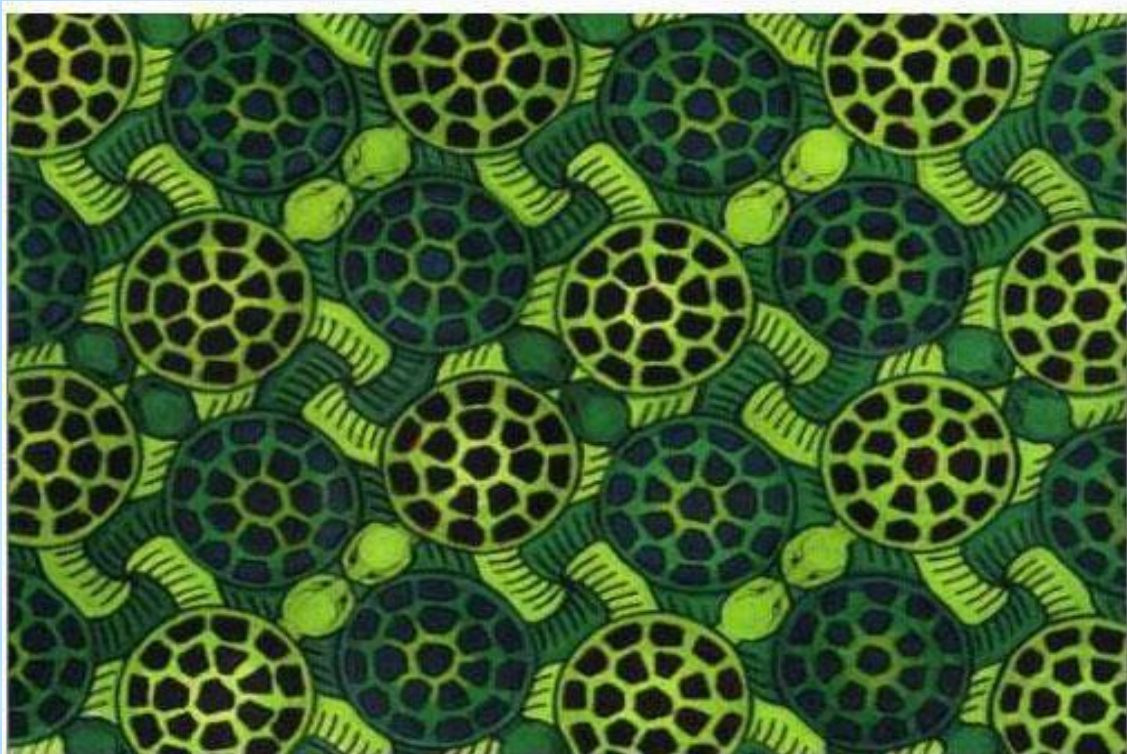


Figure 12. Penrose's non-periodic chickens

У М.Эшера много последователей. Например мозаики французского художника Алена Николя



Мозаика Д. Саливана

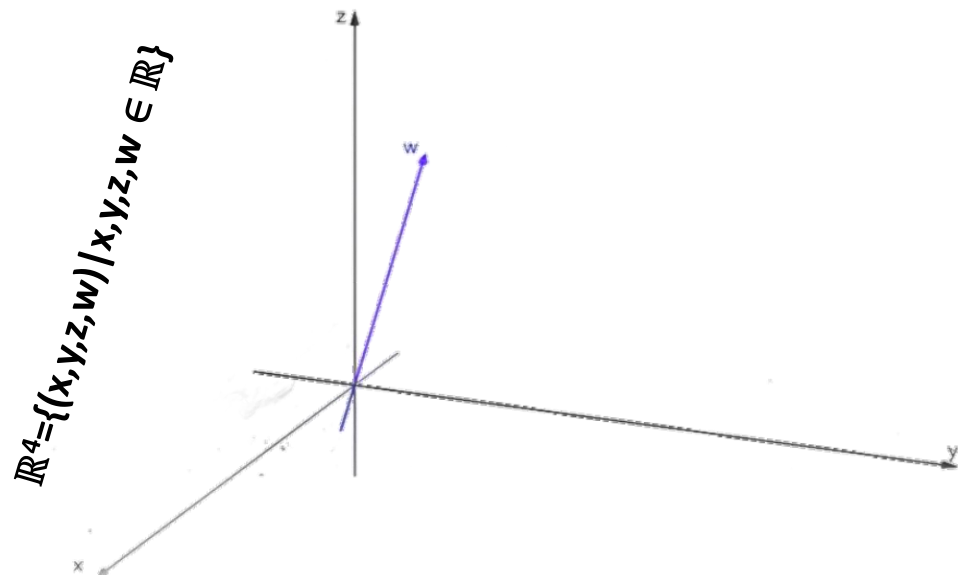


Мозаики М.Эшера находят широкое применение в дизайне

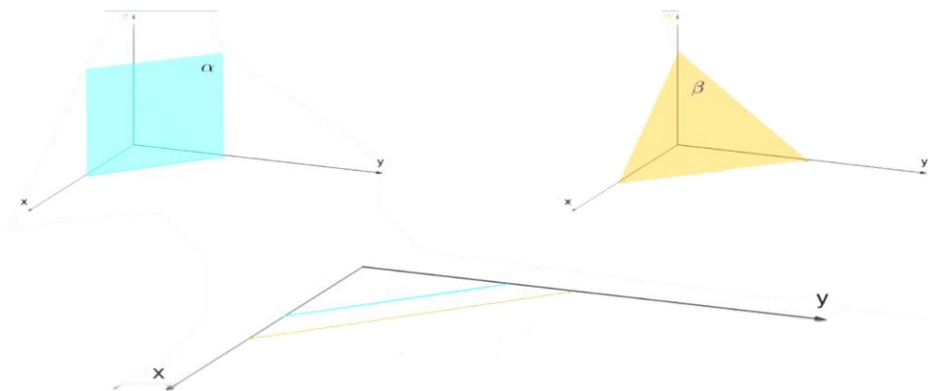


4-мерное пространство

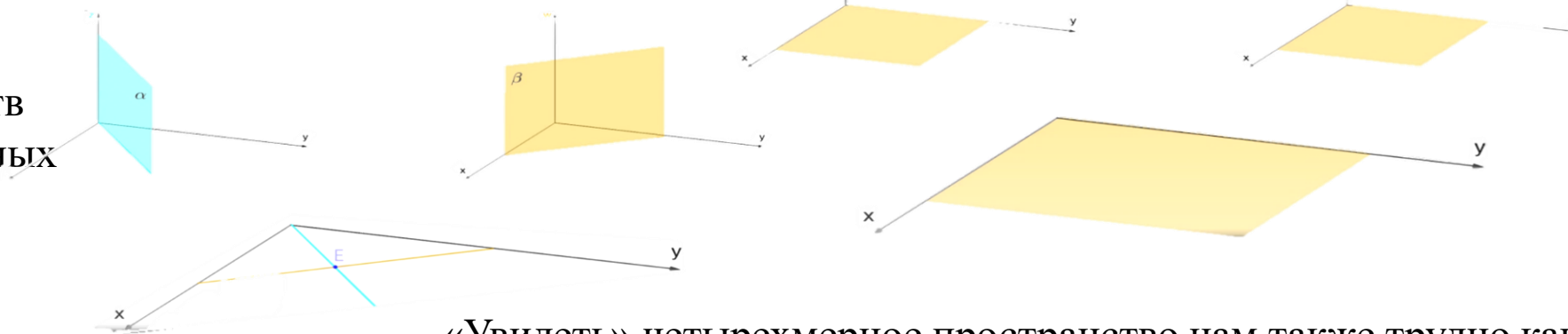
Четвёртую координату такого пространства принято называть **W**.



Новые взаимные положения для двух плоскостей: могут пересекаться в одной точке и скрещиваться. Вложенные пространства могут пересекаться по плоскости и быть параллельными.

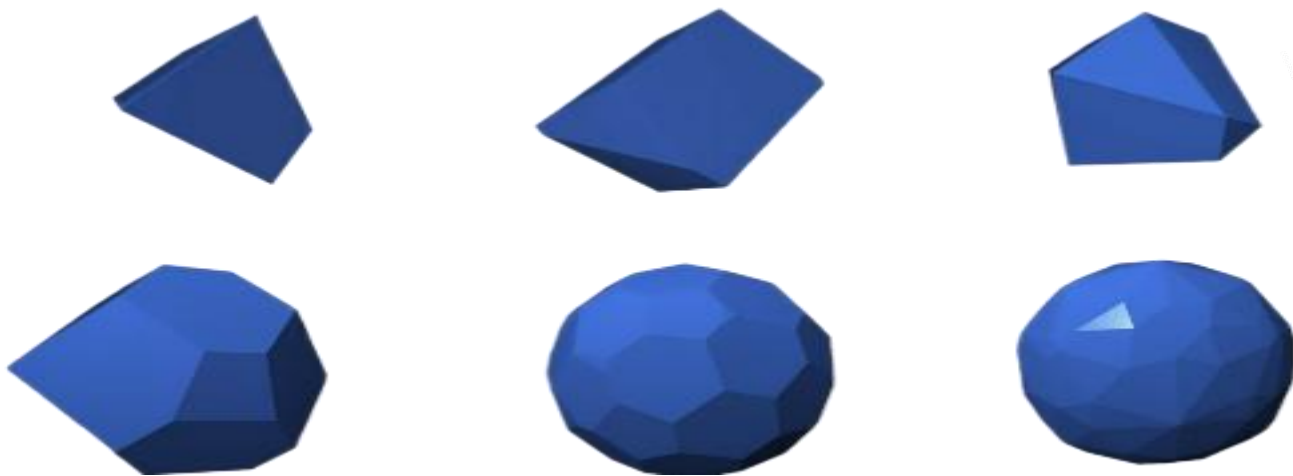


4D можно представить, как некоторое количество трёхкоординатных подмножеств (подпространств), расположенных по четвёртой оси координат.

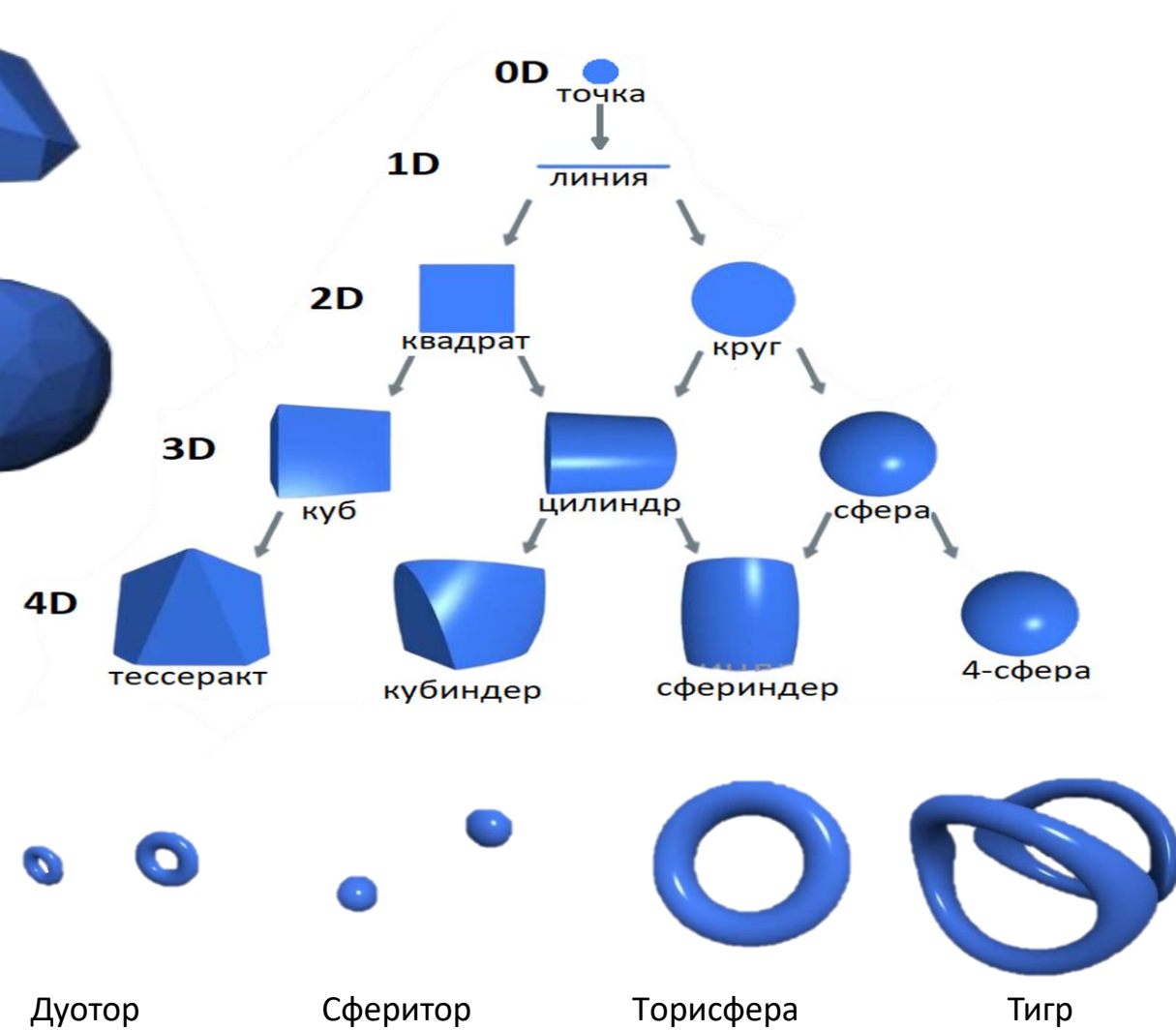
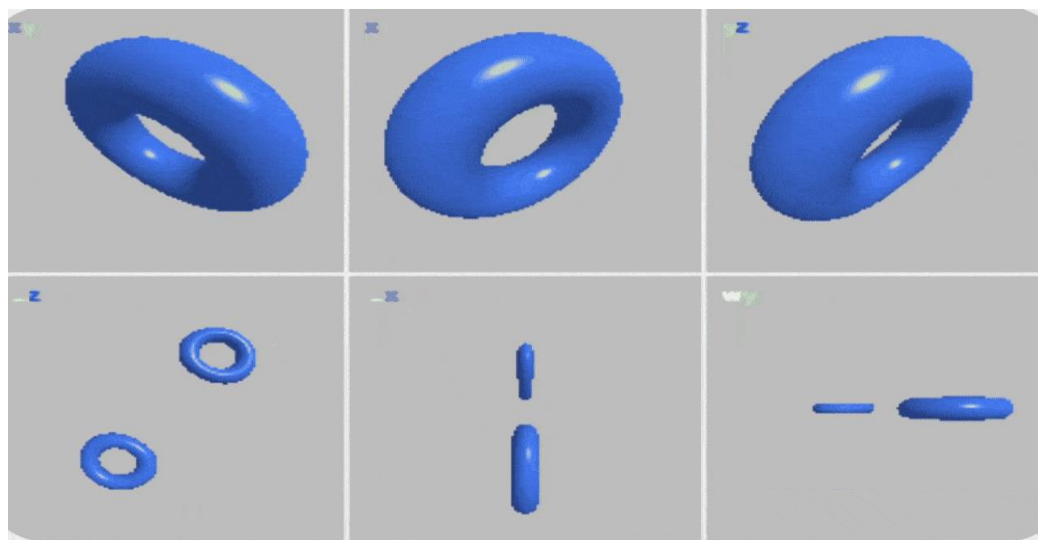


«Увидеть» четырехмерное пространство нам также трудно как двумерцам представить третье измерение.

Фигуры четырёхмерного пространства

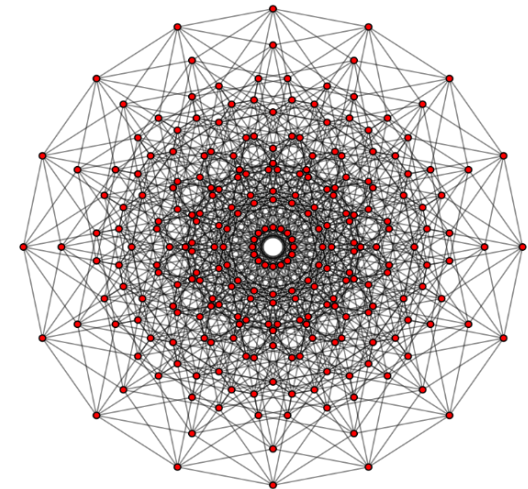
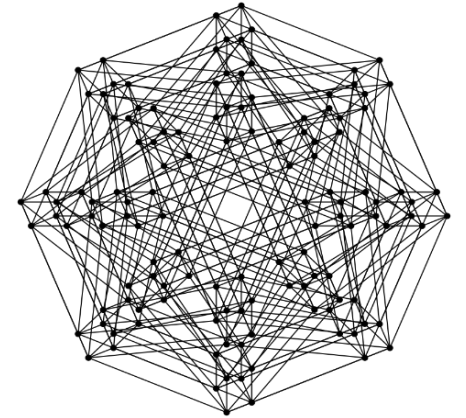
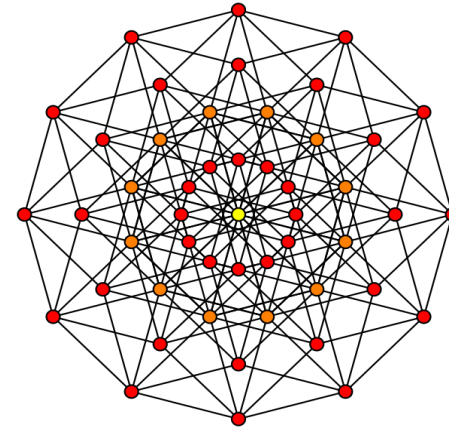
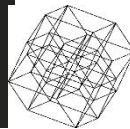
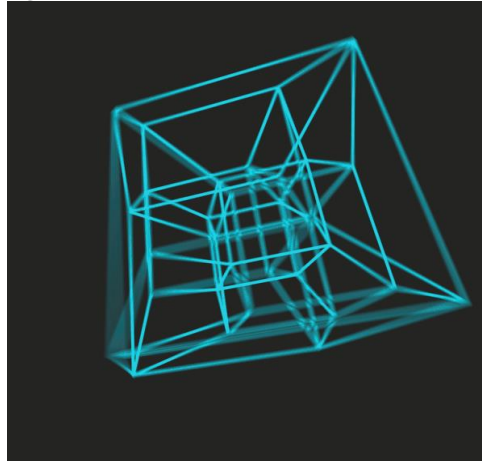
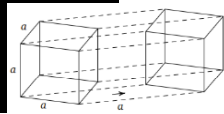
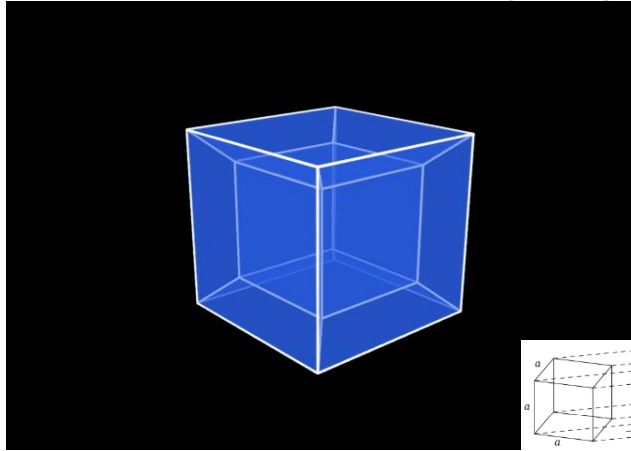
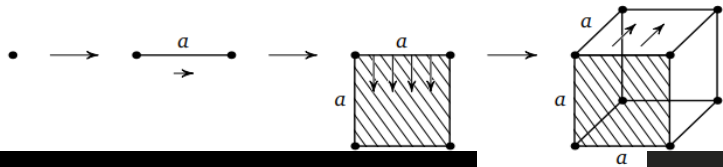
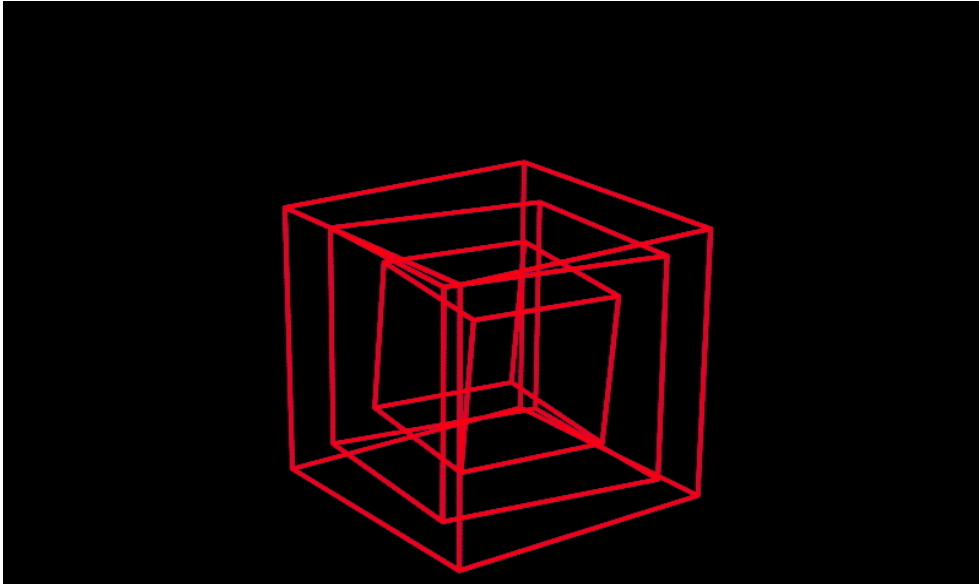


Аналоги платоновых тел



Гиперкубы

Куб — простейшая фигура, являющаяся сутью трёхмерного пространства. Изучение гиперкубов помогло бы разобраться в более мерных пространствах.





Кафедра кристаллографии и кристаллохимии геологического факультета МГУ : шаг в 4-ое измерение.

Трехмерная сферическая проекция четырехмерного додекаэдра