

# Семинар

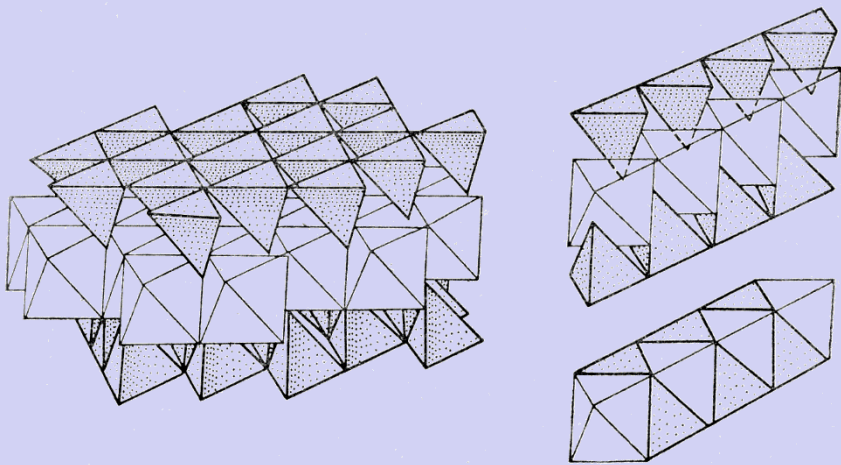
## Виды выполнения пространства.

- плотнейшие упаковки
- параллелоэдры Федорова
- Разбиение Делоне
- полиэдры Вороного-Дирихле
- разбиение Андреини
  - фазы Лавеса
  - перовскит
  - кристобалит

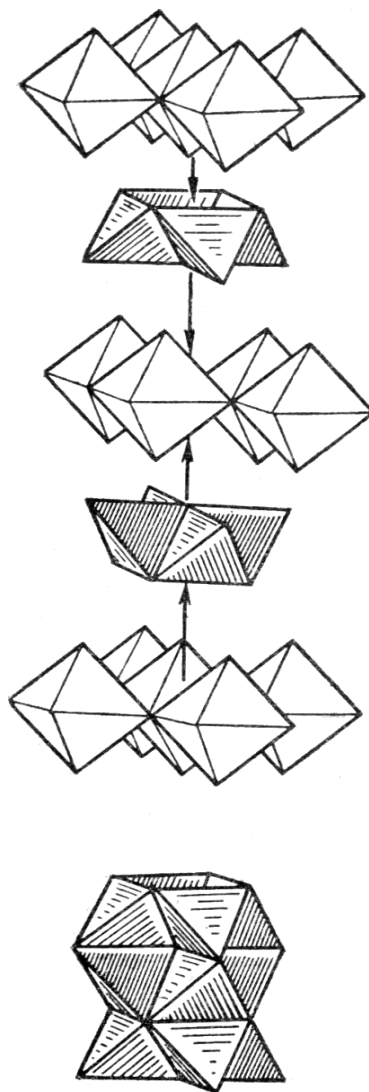


# Полиэдрический метод Полинга

В 1929 г. Лайнус Полинг предложил удобный и наглядный метод изображения кристаллических структур на основе плотнейших упаковок, основанный на разбиении пространства на правильные октаэдры и тетраэдры. Такое разбиение можно получить, соединяя прямыми линиями центры анионов, причем первых будет вдвое больше, чем вторых

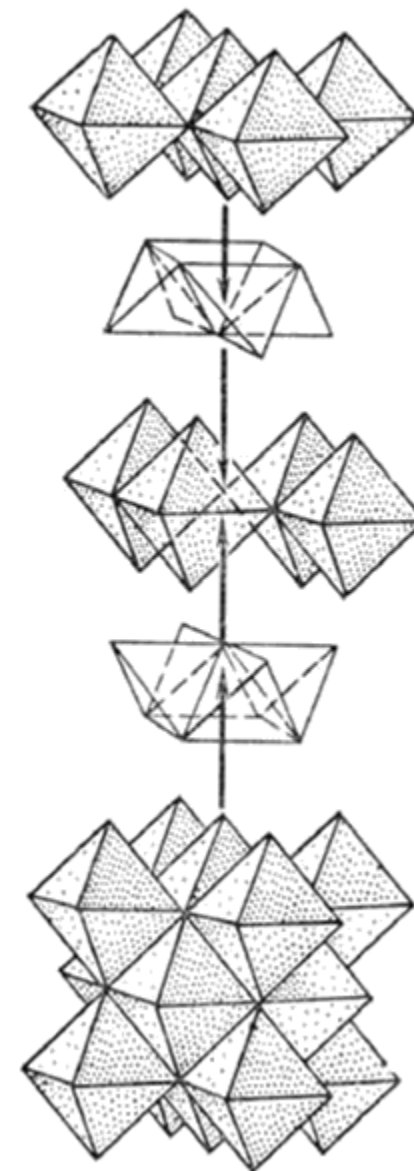


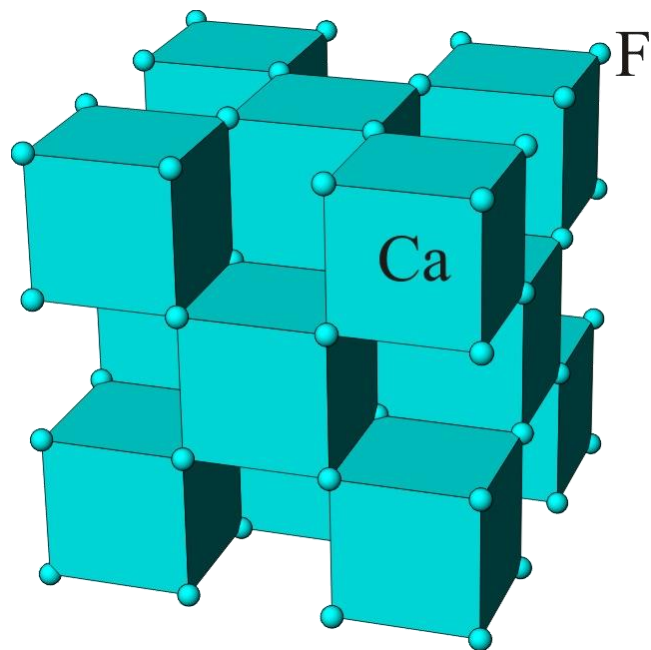
Расчлененный монослой из октаэдров и тетраэдров в соотношении 1:2. Справа показано построение отдельного стержня из октаэдров и тетраэдров (Егоров-Тисменко, 2005).



Этим простым методом может быть изображено большое число важнейших структурных типов.

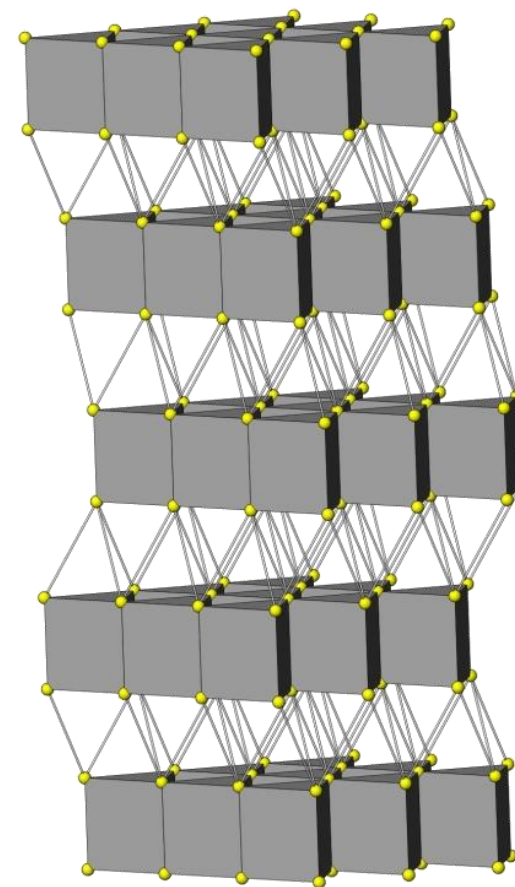
Например, структура  $\text{Li}_2\text{O}$ , в которой мелкие катионы  $\text{Li}^+$  заполняют все тетраэдрические пустоты плотноупакованных ионов кислорода, представляется укладкой непрозрачных (заштрихованных) тетраэдров, переложенных прозрачными (пустыми) октаэдрам В случае структуры  $\text{NaCl}$  ситуация обратная: пустыми оказываются тетраэдры, а все октаэдры - заполнены.



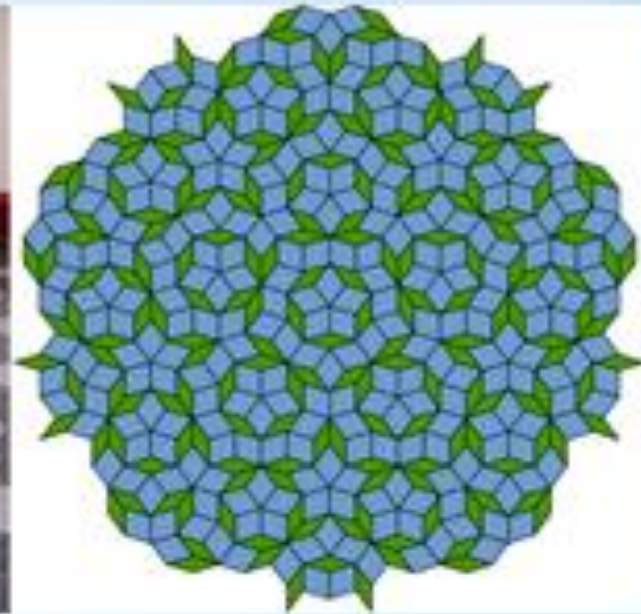


Причем таким образом можно  
изображать структуры и без  
плотнейших упаковок.

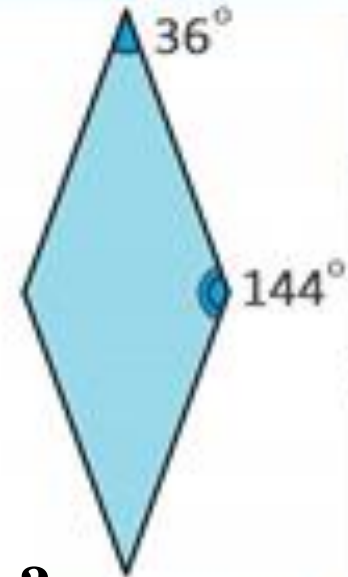
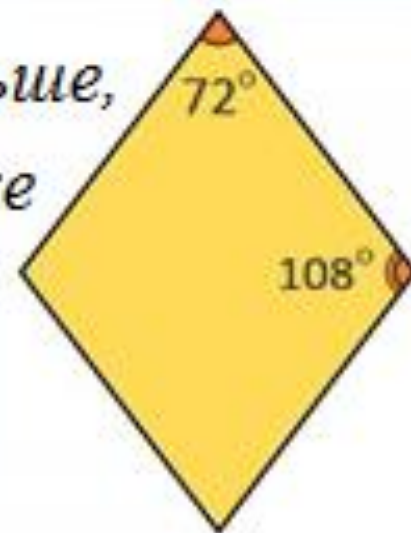
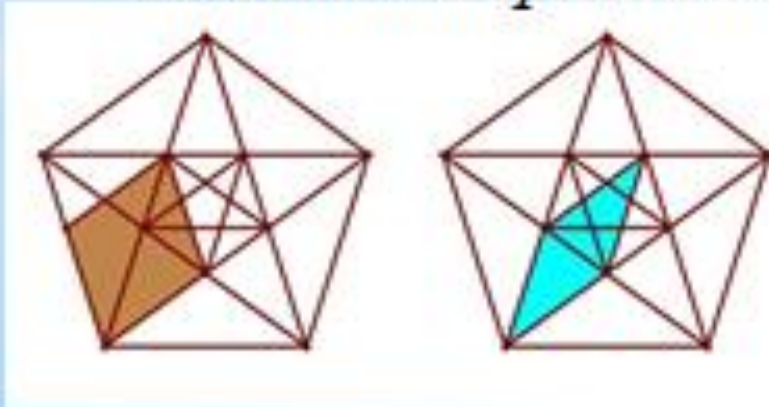
Например, флюорит  $\text{CaF}_2$ , молибденит  
 $\text{MoS}_2$ , пирит  $\text{FeS}_2$ , углекислый газ  
 $\text{CO}_2$ .



*Мозаика Пенроуза  
состоит  
из ромбов двух типов:  
тонкого и толстого*

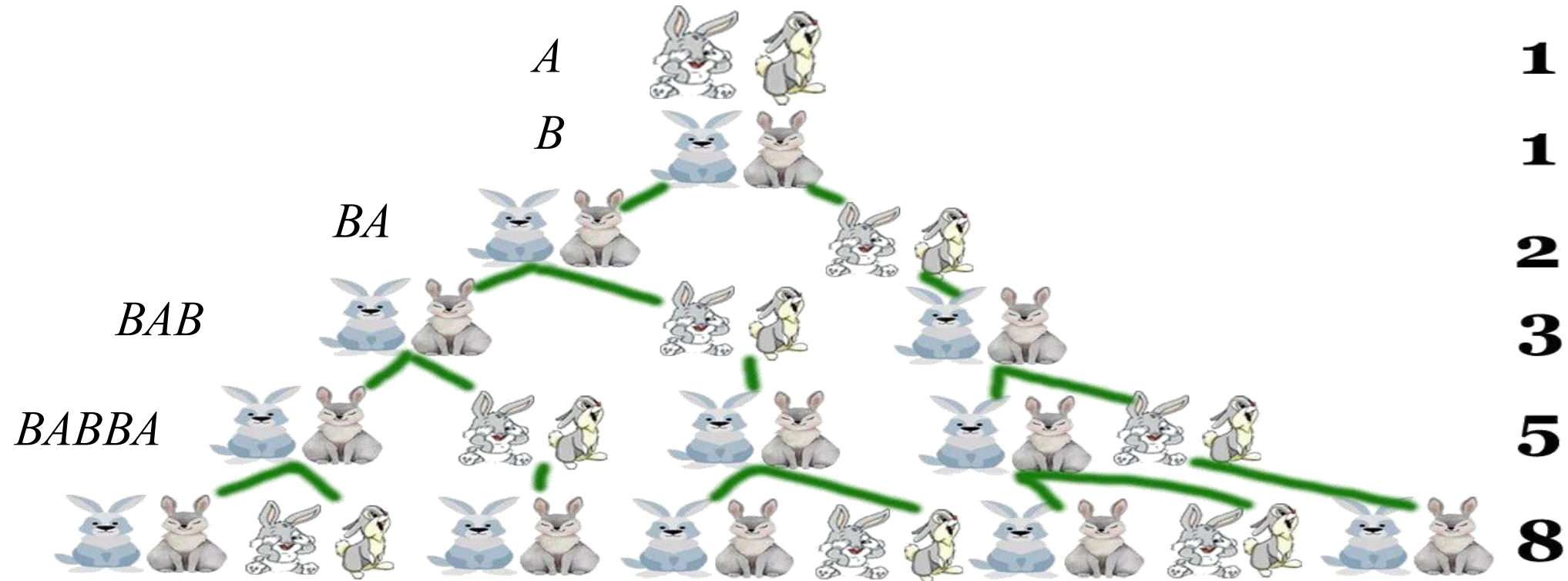


*«Толстых» ромбов в  $\tau$  раз больше,  
чем тонких ромбов в мозаике*



*Что же такое число  $\tau$ ?*

# Последовательность Фибоначчи



**1**  
**1**  
**2**  
**3**  
**5**  
**8**

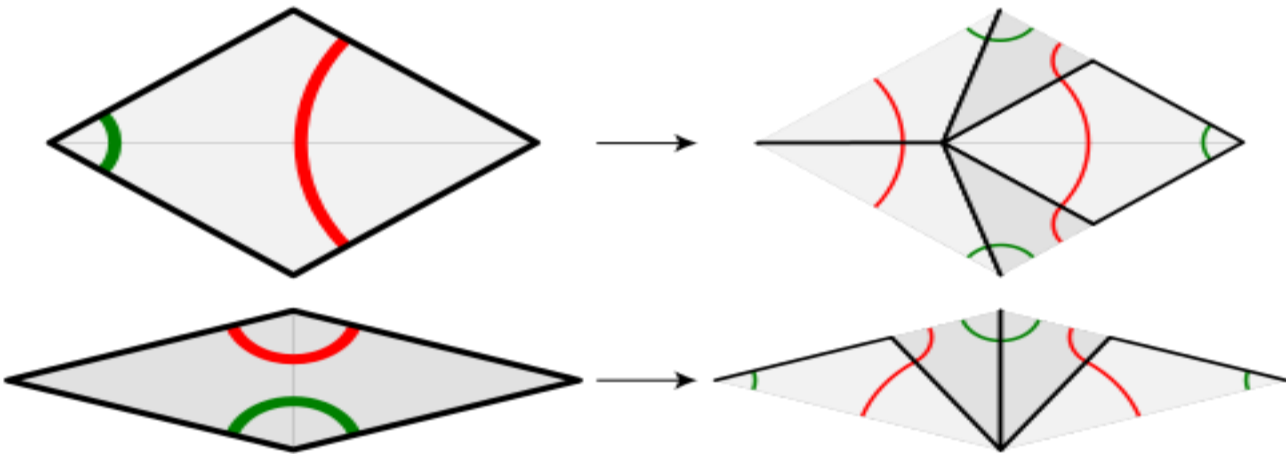
Леонардо Фибоначчи  
(Леонардо Пизанский)  
1170

*A B BA BAB BABBA BABBABAB BABBABABBA*

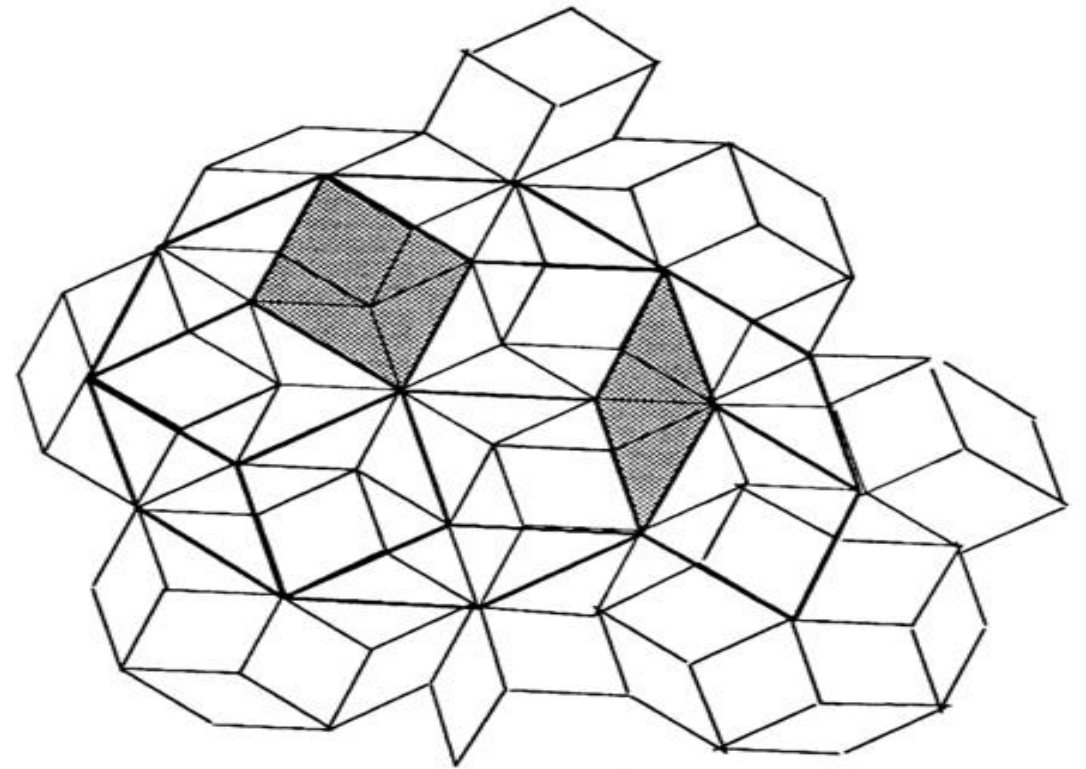
*Саше подарили пару новорожденных кроликов, через месяц они дали первый приплод – новую пару кроликов, а затем давали приплод каждый месяц по паре кроликов. Каждая новая пара кроликов, достигнув месячного возраста также будет давать приплод по паре кроликов каждый месяц. Сколько будет у Саши кроликов через пол-года?*



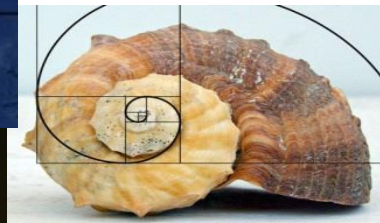
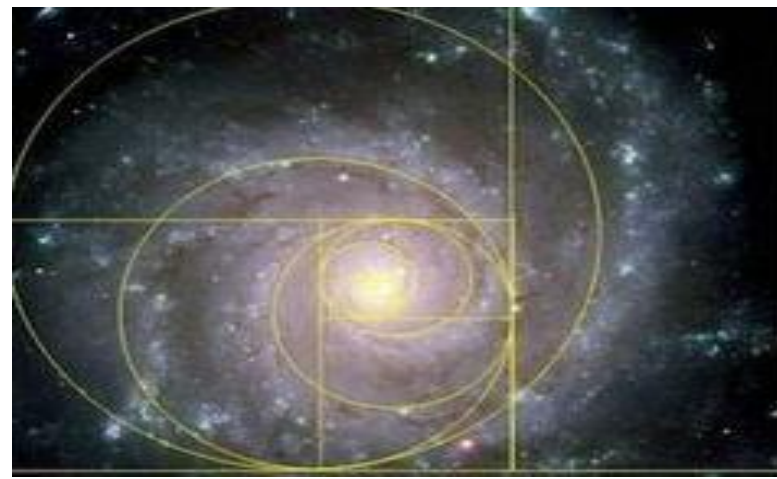
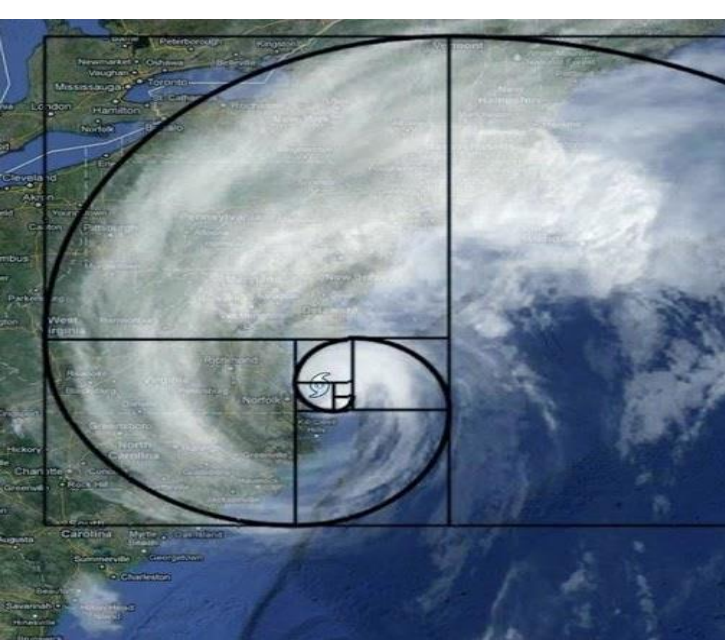
## Свойства мозаик Пенроуза (самоподобие)



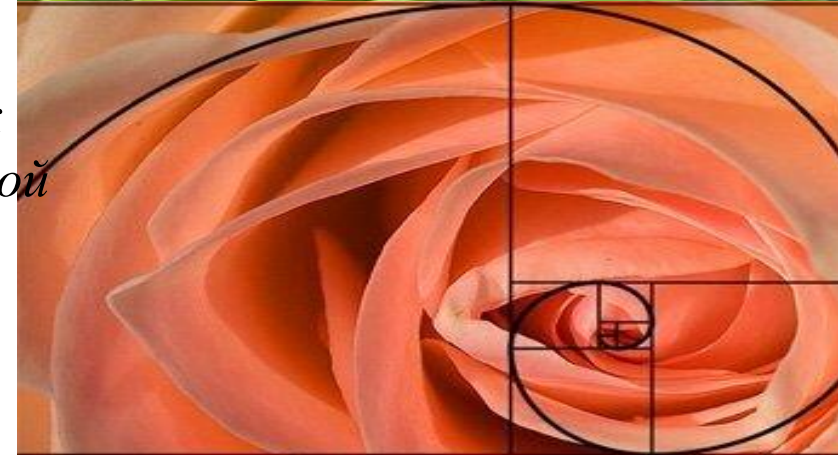
Правила разбиения ромбов для наблюдения  
**дефляции** мозаики Пенроуза

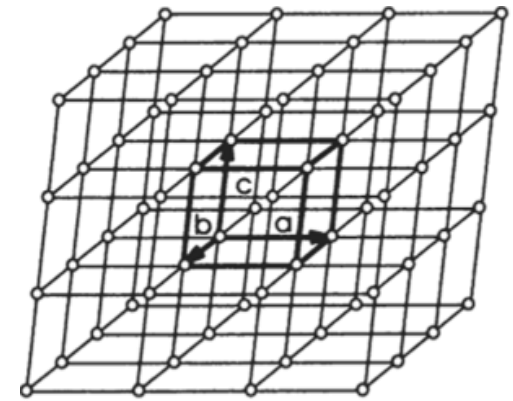


**Инфляция** (расширение) мозаики Пенроуза

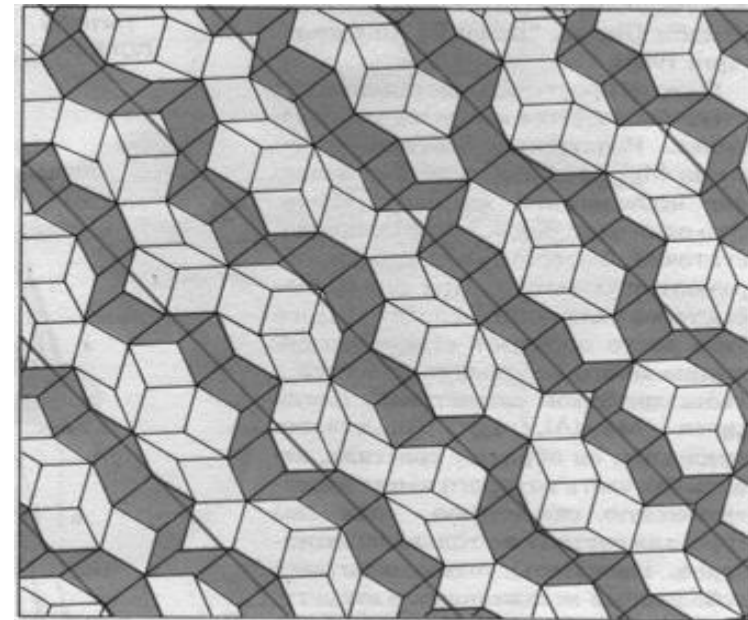
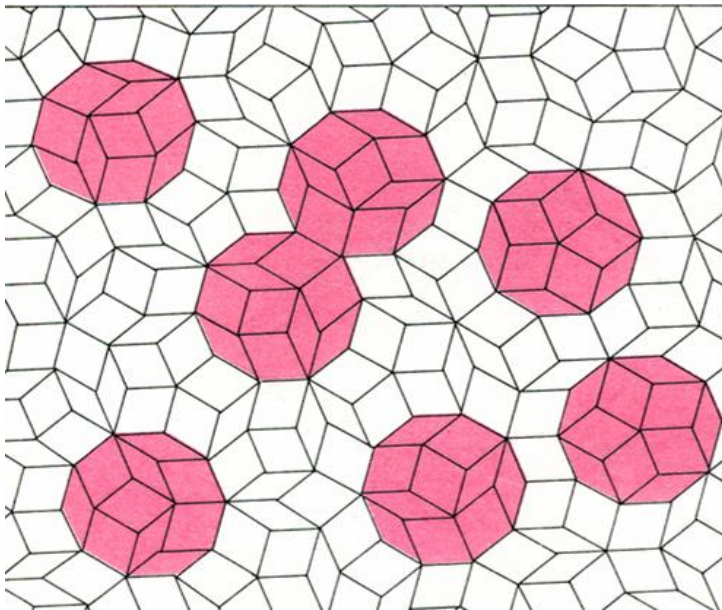


*Ряд Фибоначчи – это попытка живой природы адаптироваться к более совершенной фундаментальной логарифмической последовательности*





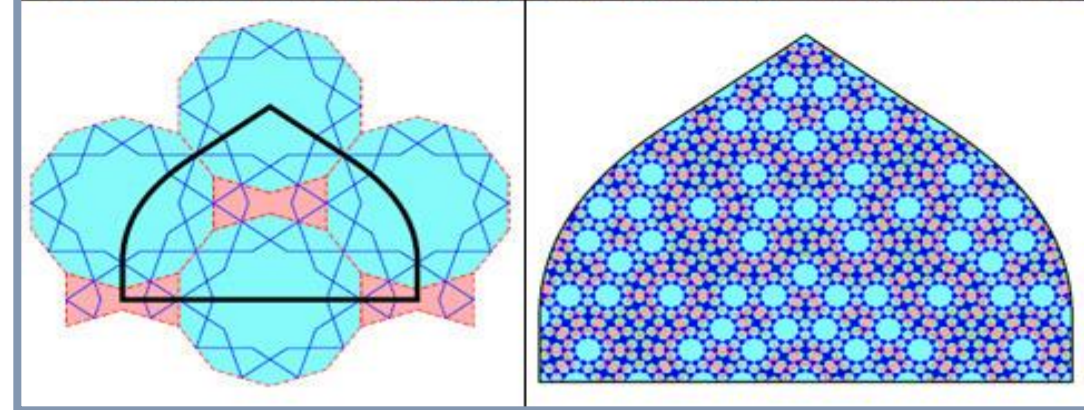
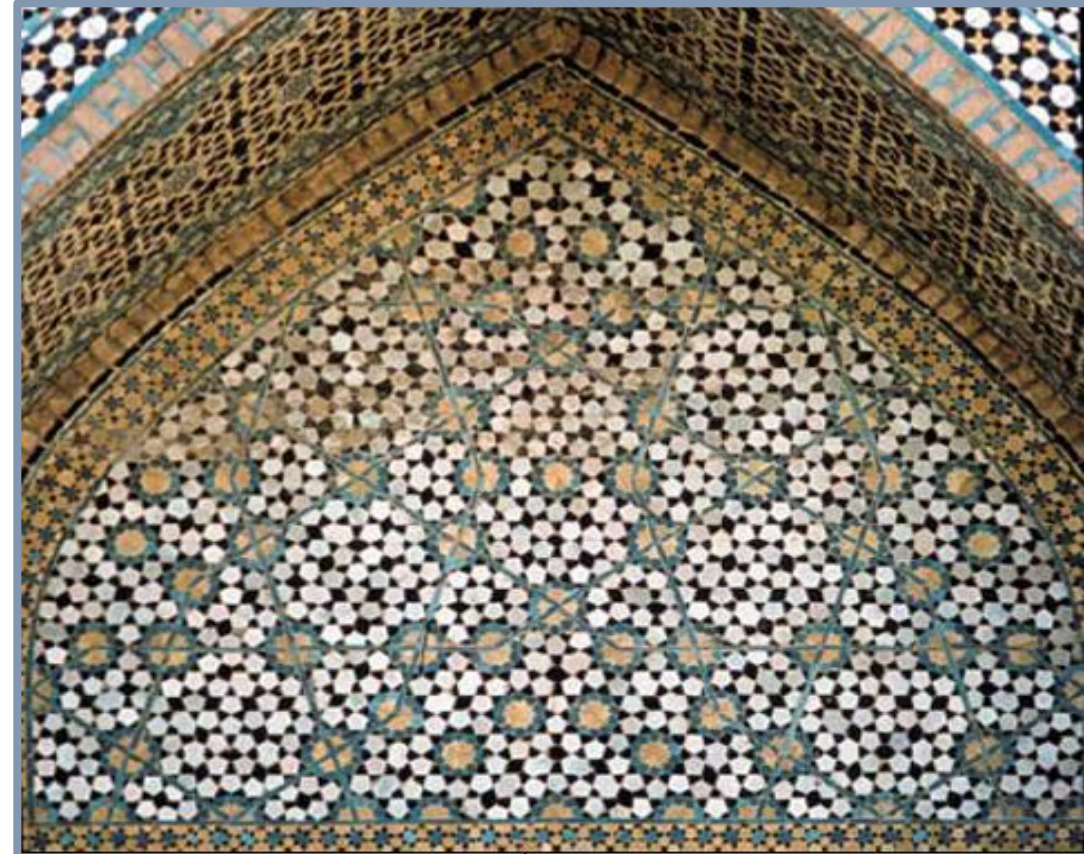
## Мозаики Пенроуза как модель двумерного квазикристалла

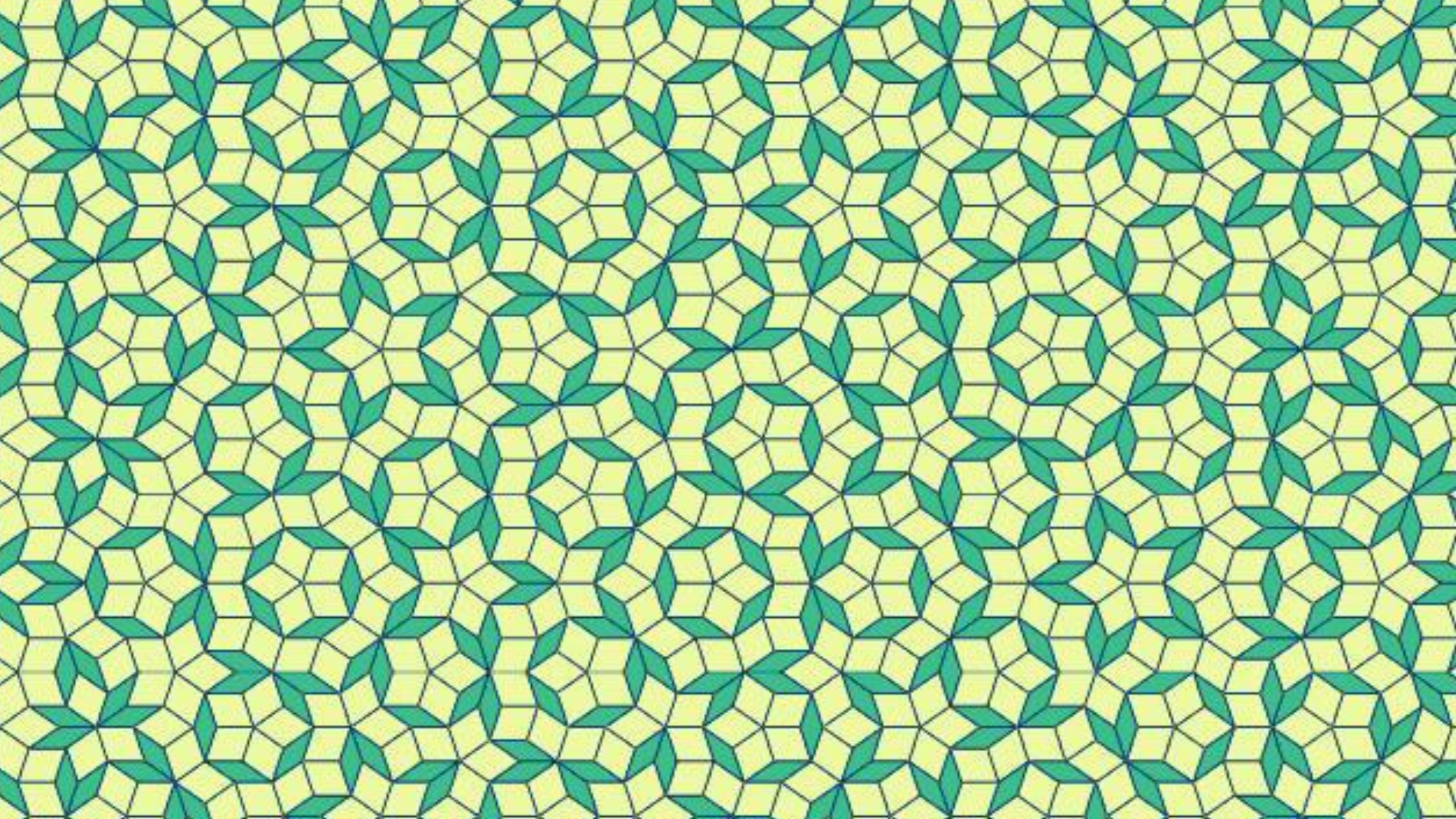


«Ориентационный» порядок и «Трансляционный» порядок  
в периодических и квазипериодических структурах

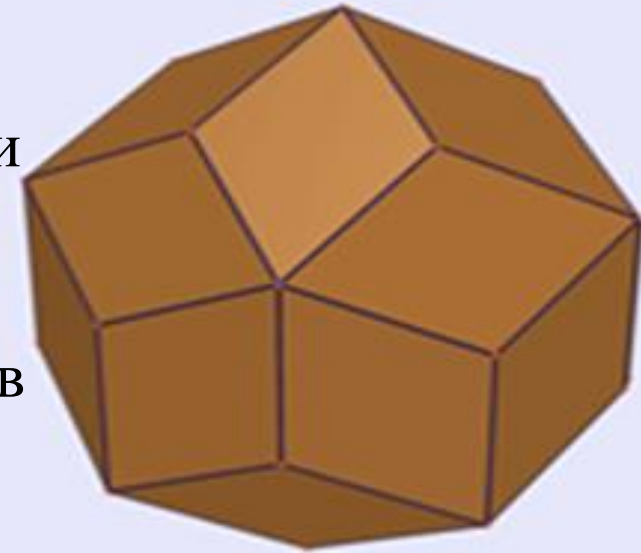
## Портал мечети в Иране

*Апериодические плоские узоры часто использовались в росписи древних арабских храмов, так как создают эффект «разбегающегося пространства».*

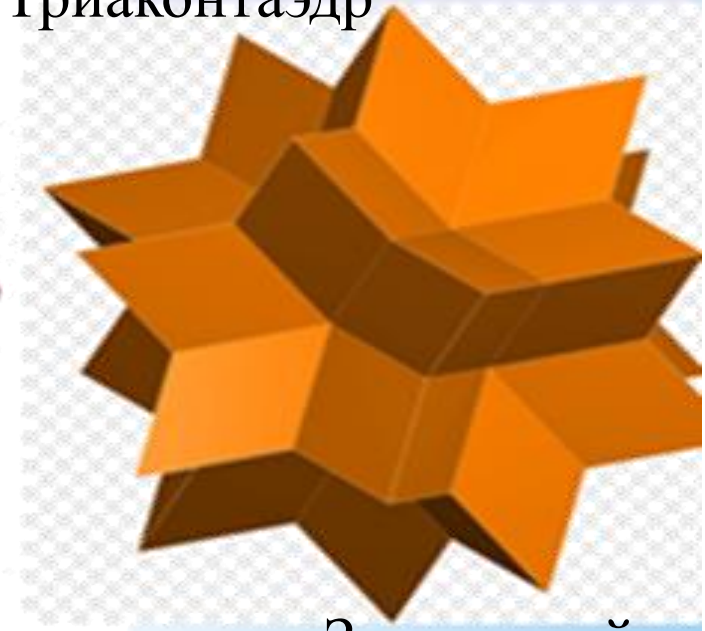
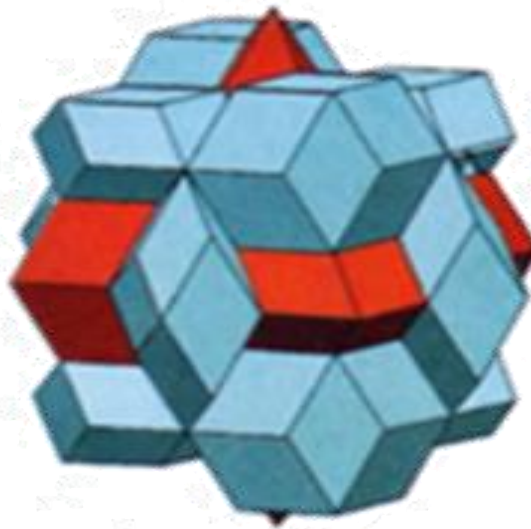
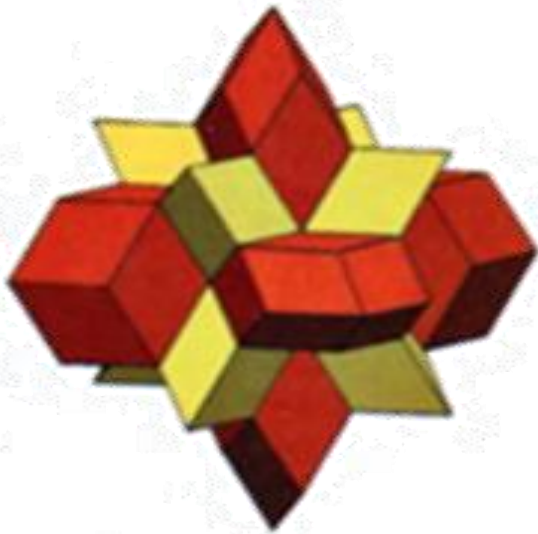




В трехмерном варианте ромбы мозаики Пенроуза превращаются в ромбоэдры (ромбоэдры Аммана или Ковалевского), грани которых - ромбы Пенроуза. Структуру квазикристаллов можно представить их совокупностью, в которой атомы занимают позиции в вершинах, на ребрах или внутри таких ромбов.



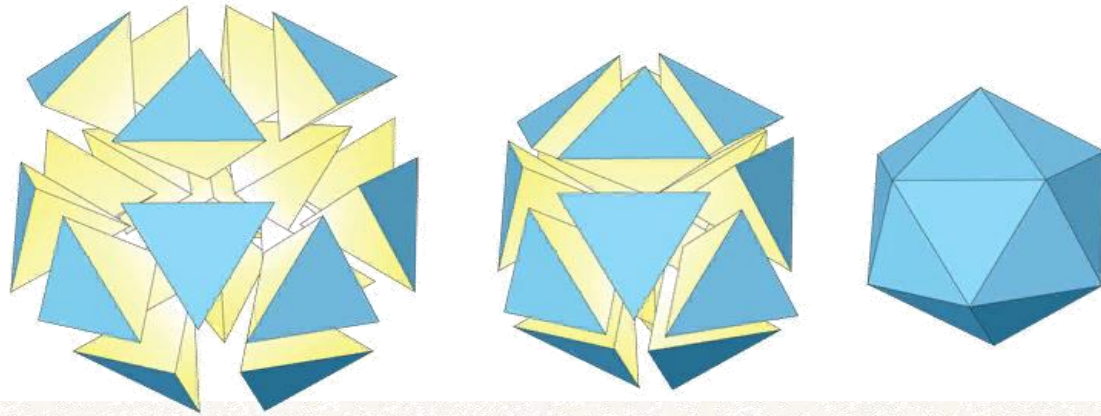
Триаконтаэдр



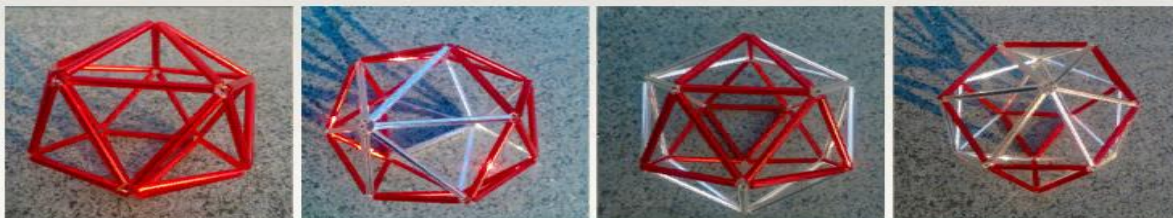
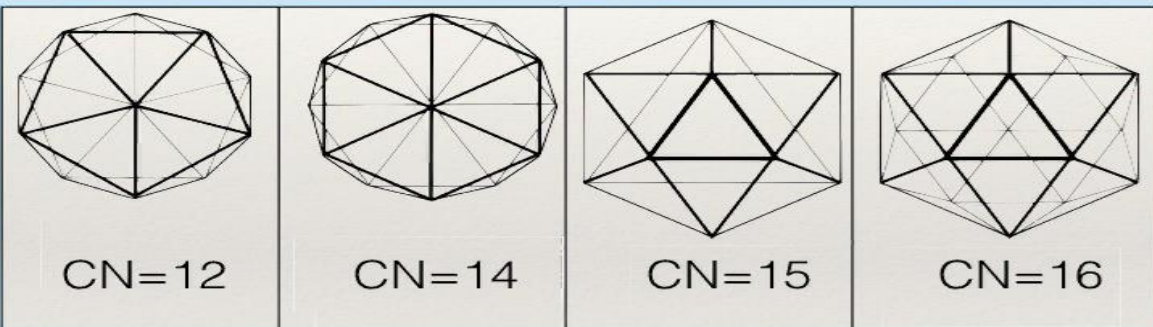
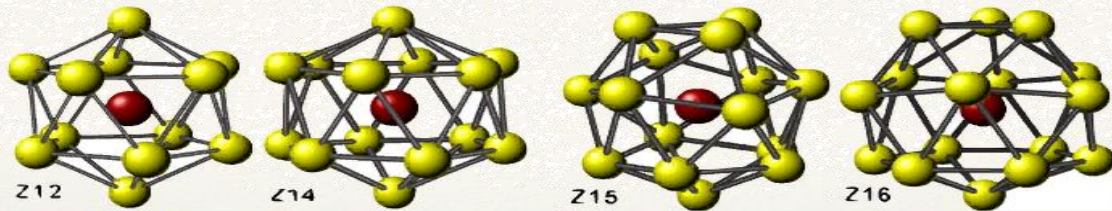
Периодическая упаковка «вытянутых» ромбоэдров и ромбических додекаэдров

Звездчатый многогранник

# Кластерный подход к квазикристаллам.



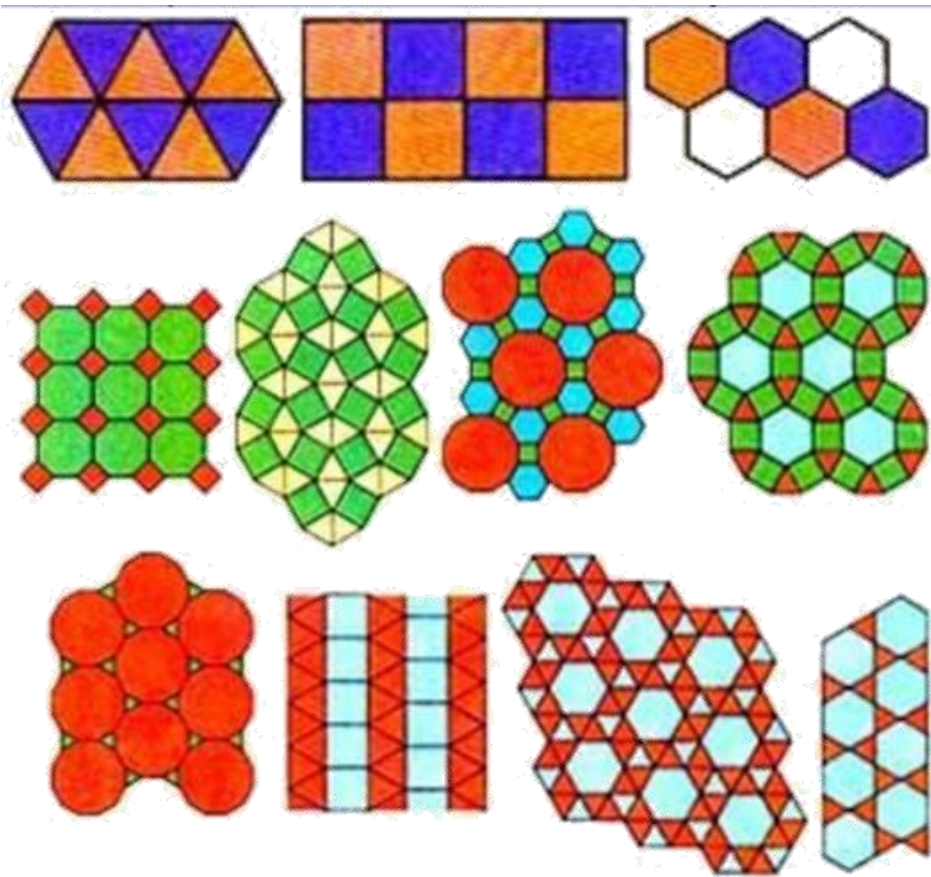
Frank-Kasper 多面體



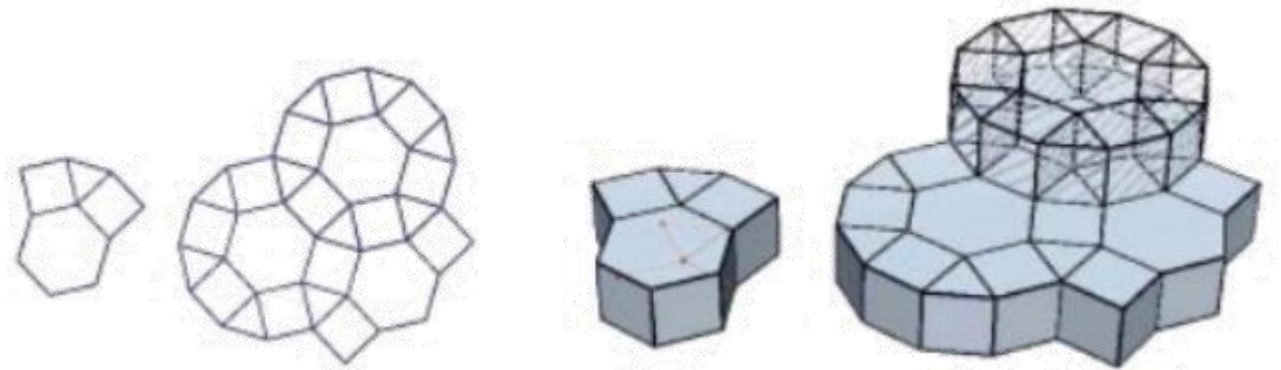
Фазы Франка –Каспера  
как промежуточные  
структуры между кристаллическим  
квазикристаллическим состоянием  
вещества.

# Разбиение Андреини

Разбиение Андреини предусматривает разбиение пространства на правильные и полуправильные многогранники



Первая группа таких многогранников, полностью выполняющих трехмерное пространство, состоит из слоев призм в соответствии с мозаиками Кеплера. Таких комбинаций 11.



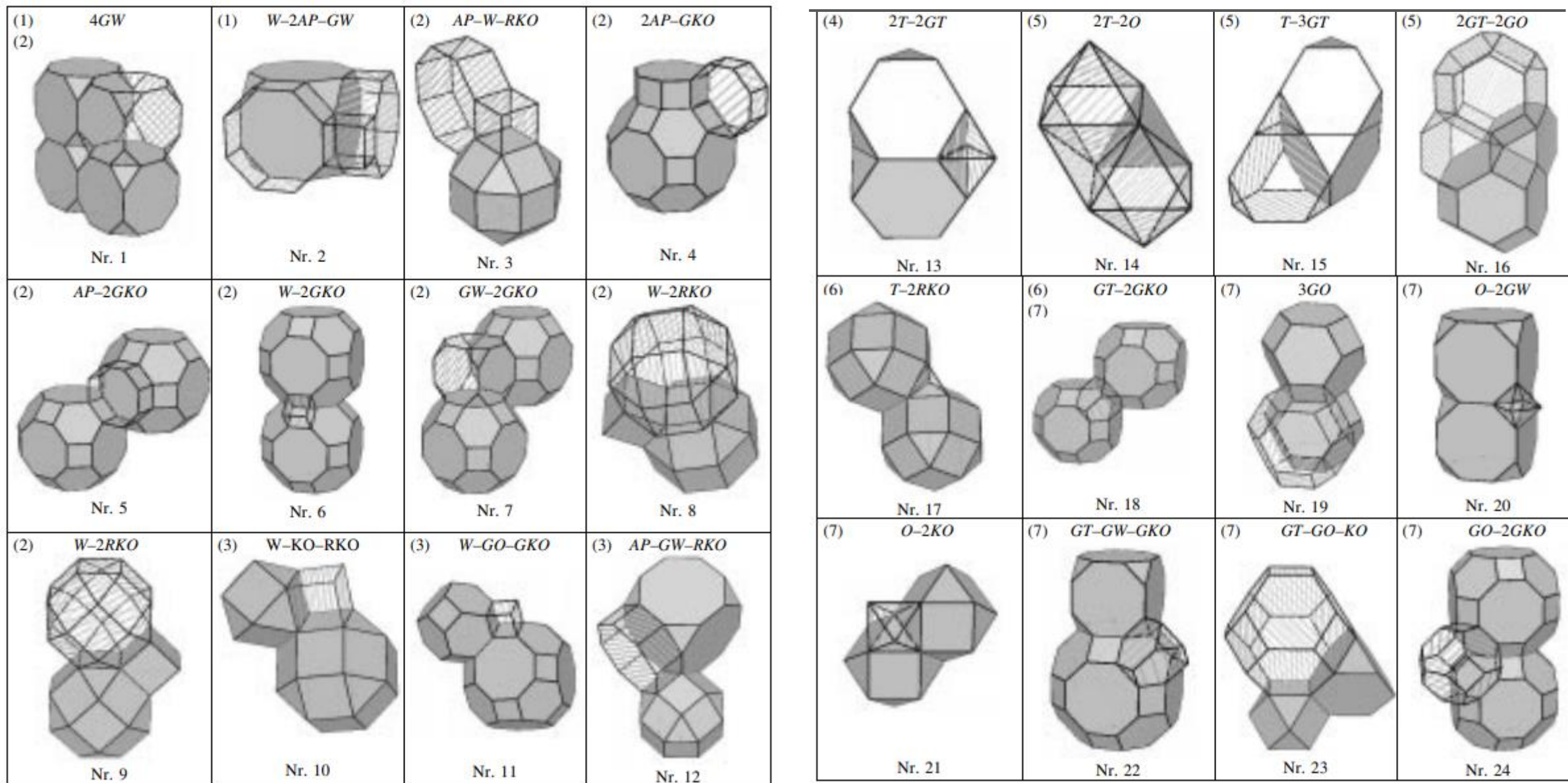
## Разбиение Андреевского

Особый интерес представляют комбинации правильных и полуправильных многогранников высшей категории

Помимо призм (тетрагональная, тригональная, гексагональная), и антипризм, которые формально тоже являются полуправильными многогранниками, единственным полуправильным многогранником кубической сингонии полностью выполняющим пространство является усеченный октаэдр (федоровский кубооктаэдр или многогранник Кеплера)



# Разбиение Андреей



# Разбиение Андреевского

## 3.6. Усеченный тетраэдр – усеченный куб – 2 усеченных кубоктаэдра ( $GT-GW-GKO$ )

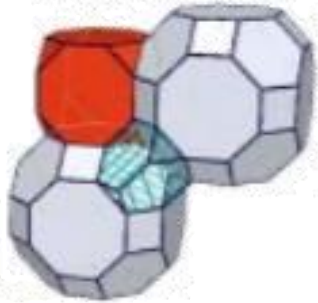


Рис. 3.6.1. Угловое замыкание

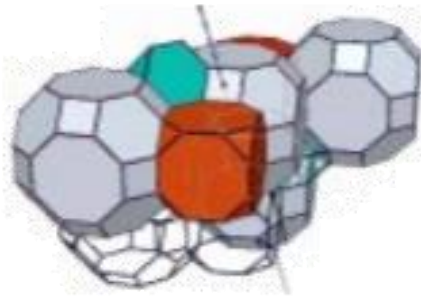


Рис. 3.6.2. Параллельный перенос / симметрия относительно прямой

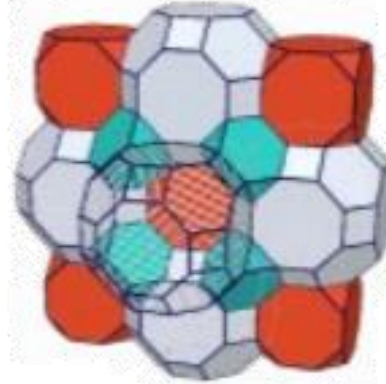


Рис. 3.6.3. Фрагмент заполнения

- Андреевский нашел 12 разбиений из правильных и полуправильных многогранников высшей категории

## 3.7. 2 куба – кубоктаэдр – 2 ромбокубиктаэдра ( $W-KO-RKO$ )

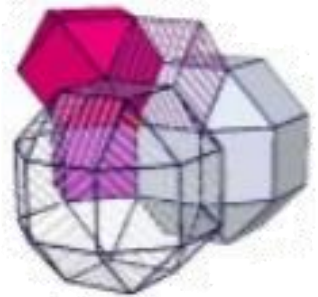


Рис. 3.7.1. Угловое замыкание

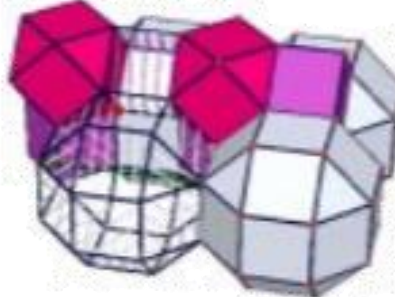


Рис. 3.7.2. Параллельный перенос



Рис. 3.7.3. Фрагмент заполнения

## 3.8. Тетраэдр – куб – 3 ромбокубиктаэдра ( $T-W-RKO$ )

# Разбиение Андреевского

## 3.8. Тетраэдр – куб – 3 ромбокубктаэдра (*T-W-RKO*)

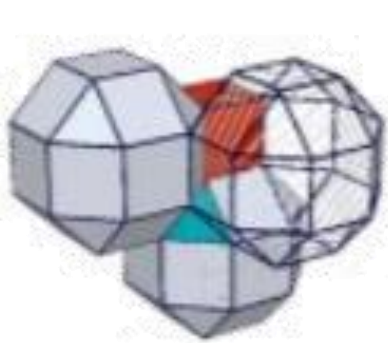


Рис. 3.8.1. Угловое замыкание

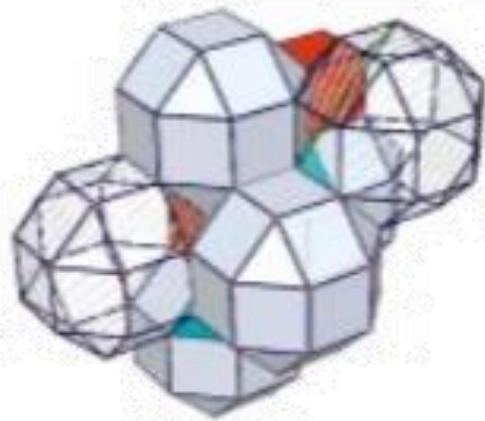


Рис. 3.8.2. Параллельный перенос

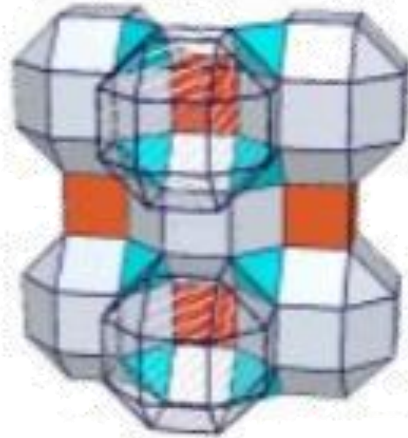


Рис. 3.8.3. Фрагмент заполнения

## 3.9. 2 тетраэдра – 6 усеченных тетраэдра (*T-GT*)

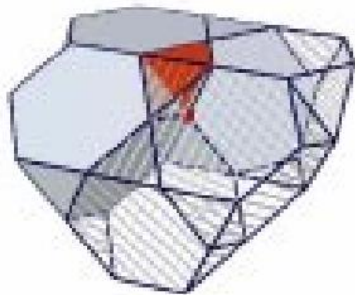


Рис. 3.9.1. Угловое замыкание

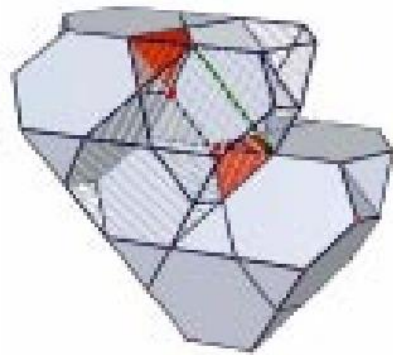


Рис. 3.9.2. Параллельный перенос

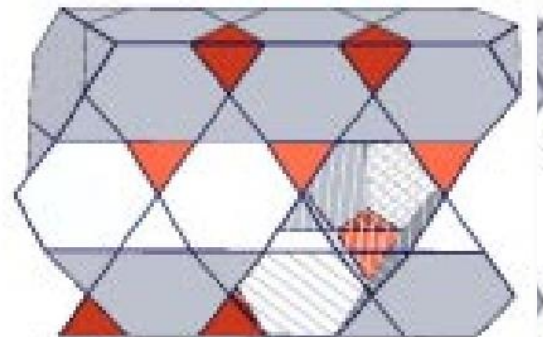


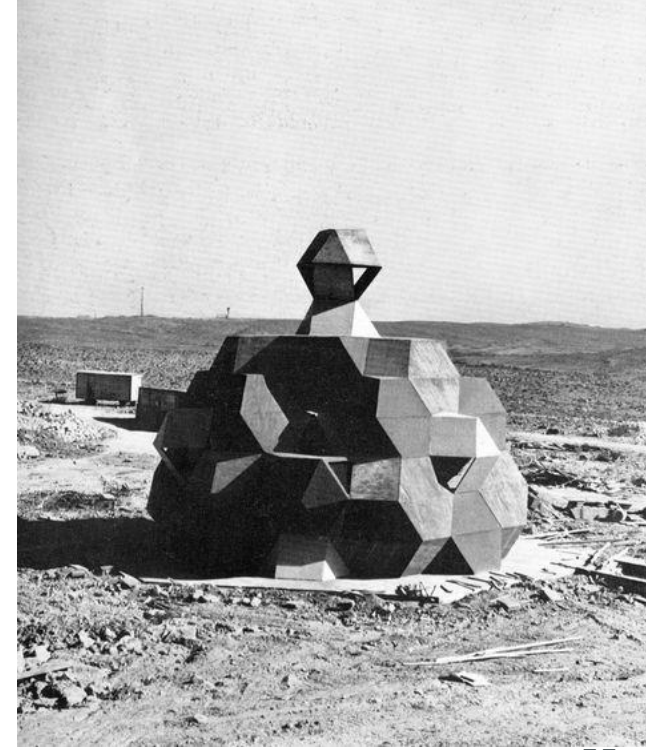
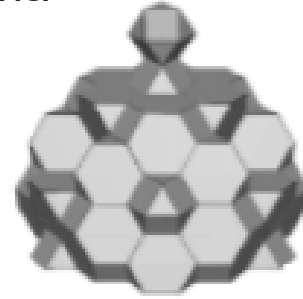
Рис. 3.9.3. Фрагмент заполнения

- Много структур можно описать в рамках этого разбиения: перовскит, кристобалит, фазы Лавеса и др.

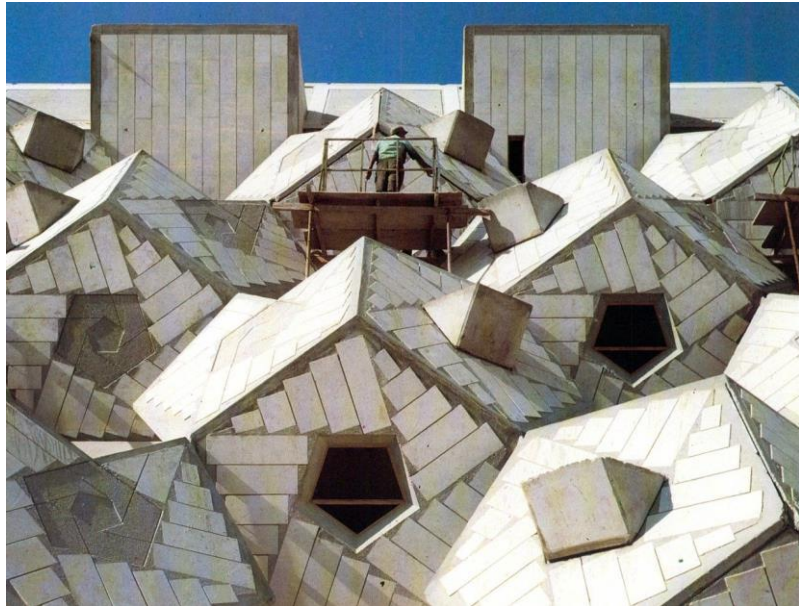
# Разбиение Андреини в архитектуре



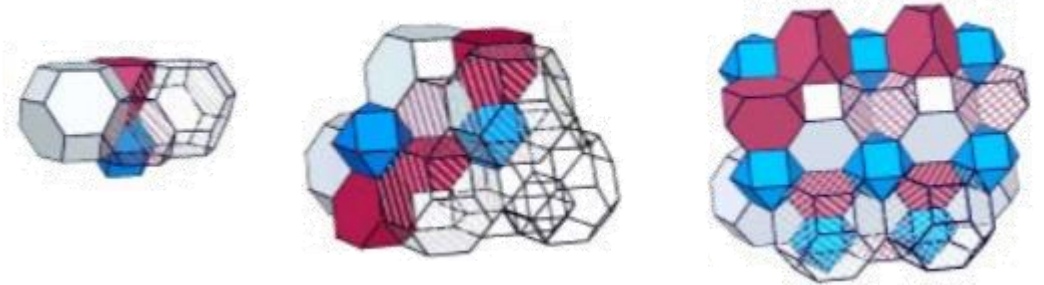
**Цви Хеккер** ( 1931 — 2023) — израильский архитектор польского происхождения. Его работы известны своим акцентом на геометрию и асимметрию.



Синагога была спроектирована архитекторами и Цви Хэкером совместно с Авраамом Нойманном . Представляет собой комбинацию полиэдра Лавеса, кубооктаэдра и и усеченного октаэдра



3.10. 2 Усеченных тетраэдра – 2 усеченных октаэдра – кубоктаэдр (GT-GO-KO)



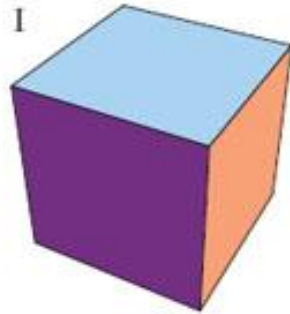
Жилой дом в Рамот Полин

# Параллелоэдры Федорова

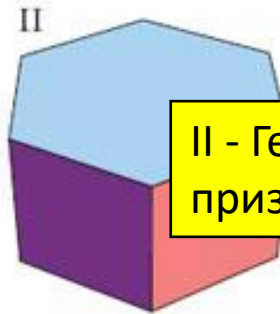
Федоров Е.С. В 1890 году показал, что только 5 топологических типов выпуклых многогранников могут в параллельном положении (трансляционно) выполнять пространство без зазоров и наложений.

Параллелоэдрами Федорова являются прежде всего ячейки Браве, их области Вороного-Дирихле (ячейки Делоне), ячейки Вигнера-Зейца.

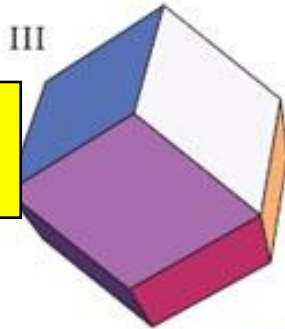
I гексаэдр



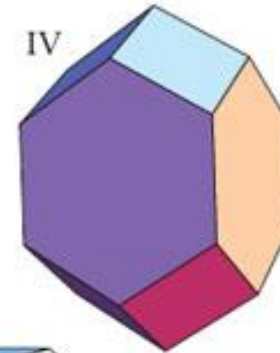
II - Гексагональная призма



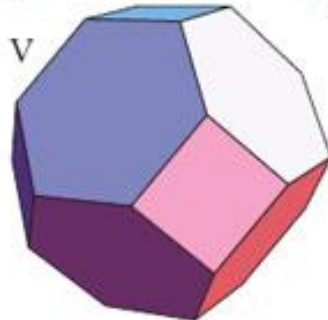
III- ромбододекаэдр



IV – ромбический додекаэдр



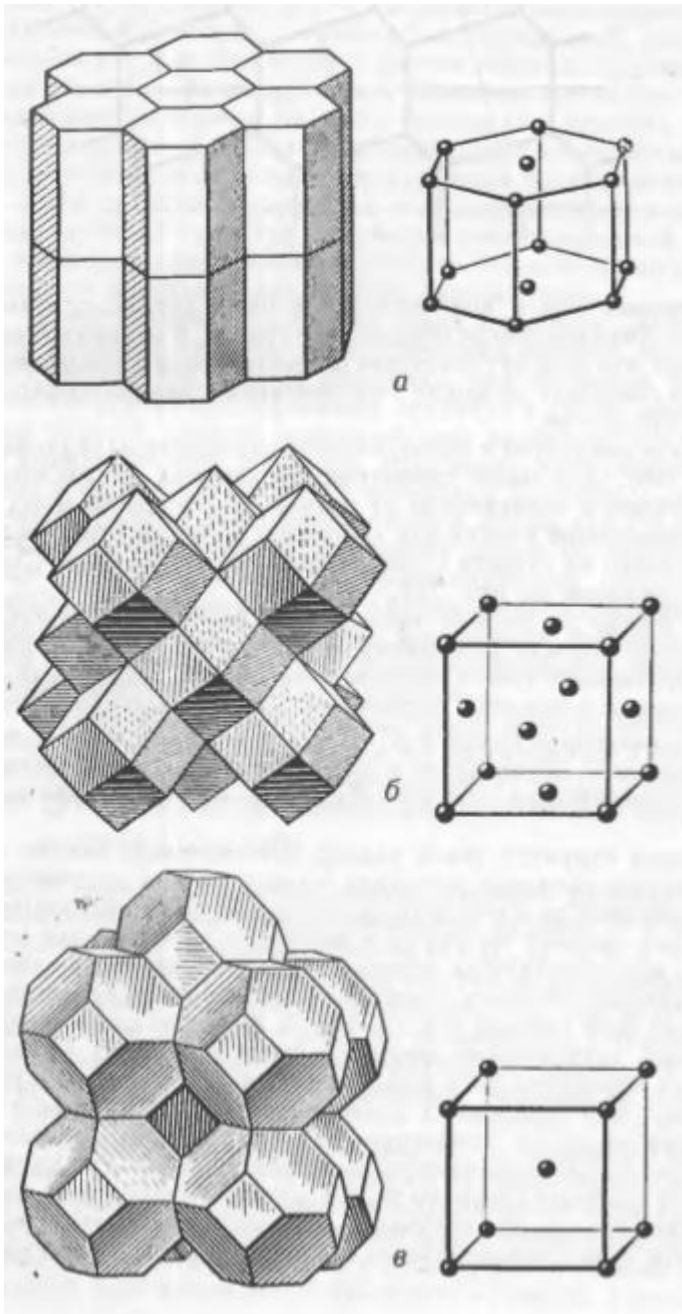
V – усеченный октаэдр (федоровский кубооктаэдр)



## Параллелоэдры Федорова

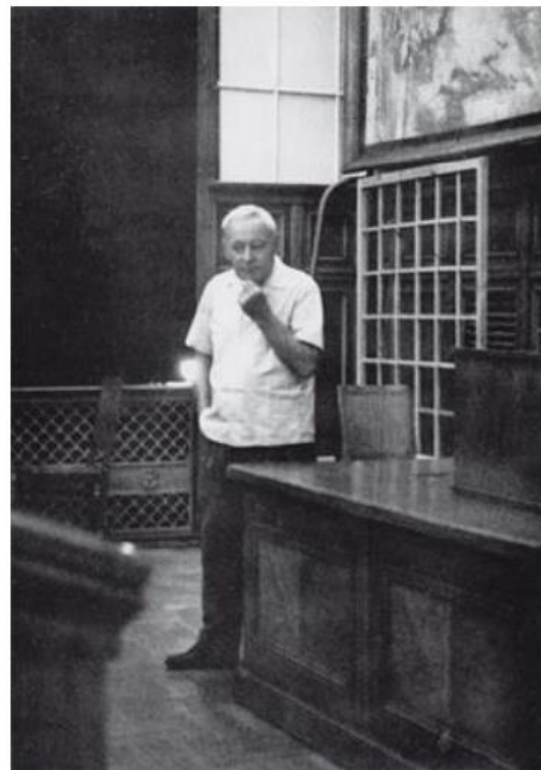
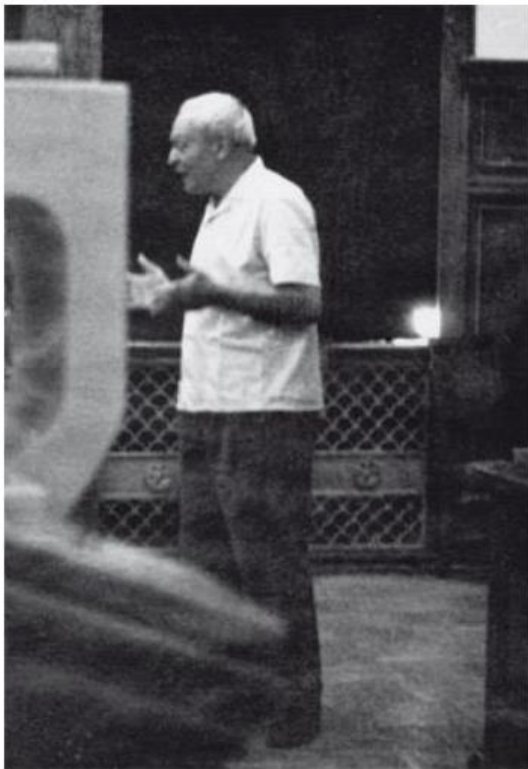
Федоров Е.С. В 1890 году показал, что только 5 топологических типов выпуклых многогранников могут в параллельном положении (трансляционно) выполнять пространство без зазоров и наложений.

Это открытие позволило ему вывести 230 пространственных групп.



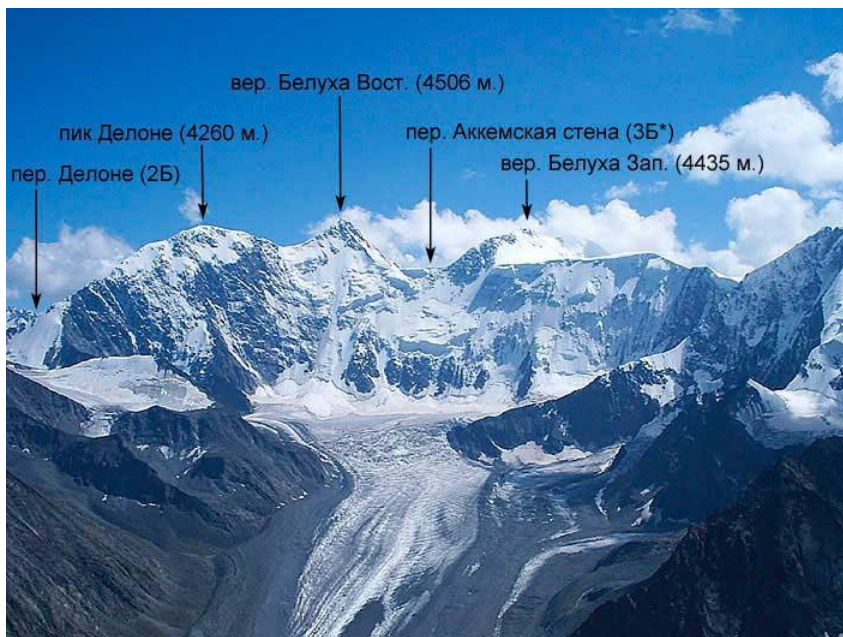
Параллелоэдрами Федорова являются прежде всего ячейки Браве, их области Вороного-Дирихле (ячейки Делоне), ячейки Вигнера-Зейца.

Еще один способ разбиения пространства, тесно связанный с разбиением Федорова, предложил Борис Николаевич Делоне



Делоне Борис  
Николаевич (1890-1980)

Б.Н.Делоне читает лекцию в 611 аудитории



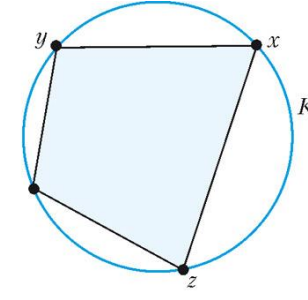
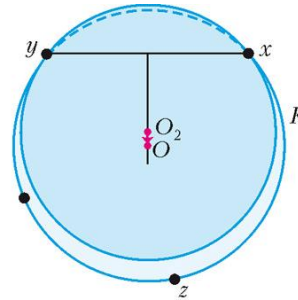
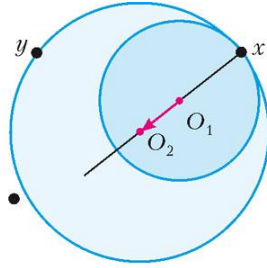
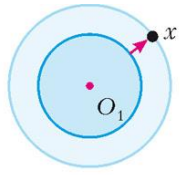
Геометр, лидер математической кристаллографии. Основные научные результаты связаны с решением неопределенных уравнений 3-ей степени, геометрией положительных квадратичных форм, теориями покрытий и разбиений пространств, фёдоровскими группами, правильными системами точек. Делоне по-новому осмыслил и систематизировал основы геометрической кристаллографии, ему принадлежит алгоритм правильной установки кристалла. Отметим, что Борис Николаевич был и известным альпинистом. Он совершил 125 восхождений в Доломитах, Альпах, на Западном и Центральном Кавказе, Алтае, Тянь-Шане. Делоне разработал существующую ныне классификацию маршрутов на вершины по пяти категориям трудности (1935 г.). Имя Б.Н. Делоне носят пик "4300" и хребет в районе Белухи (на Алтае).



# Разбиение Делоне. Метод пустой сферы



Делоне Борис Николаевич

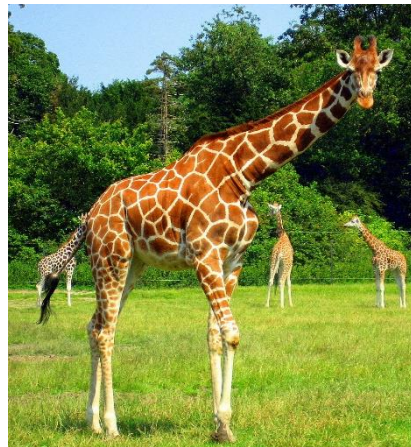


Возьмем на плоскости со множеством произвольных точек  $X$  маленький кружок радиуса меньше  $r$ , который ни внутри, ни на границе не содержит узлов из  $X$ . Оставляя центр  $O_1$  круга неподвижным, увеличиваем его радиус до тех пор, пока граница раздуваемого круга не наткнется на какой-нибудь узел  $x$ .

Теперь, не снимая круг с узла  $x$ , отодвигаем от узла  $x$  по прямой  $xO_1$  центр расширяющегося круга до тех пор, пока он не наткнется еще на один узел  $y$ .

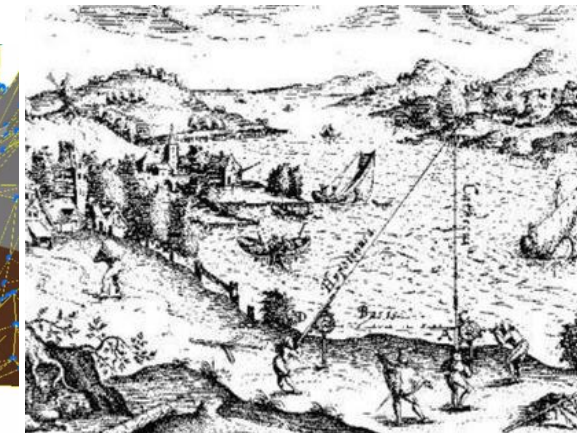
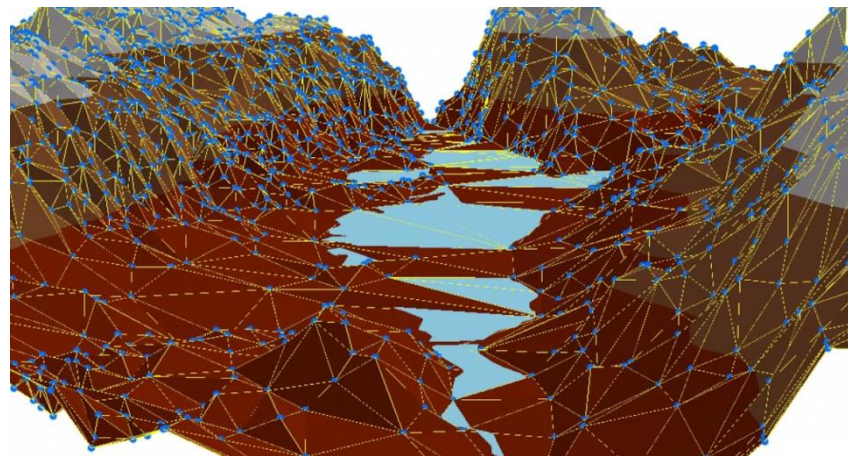
Не снимая круг с узлов  $x$  и  $y$ , удаляем его центр от узлов  $x$  и  $y$  по срединному перпендикуляру к отрезку  $xy$ , пока расширяющийся круг не наткнется еще на один узел  $z$ .

Построим  $k$ -угольник с вершинами в данных  $k$  узлах. При этом на описанной вокруг этого многоугольника может оказаться некоторое число  $k$  узлов ( $k \geq 3$ ). Помимо этих узлов данный круг не содержит других узлов из  $X$  ни внутри, ни на границе.<sup>6</sup>

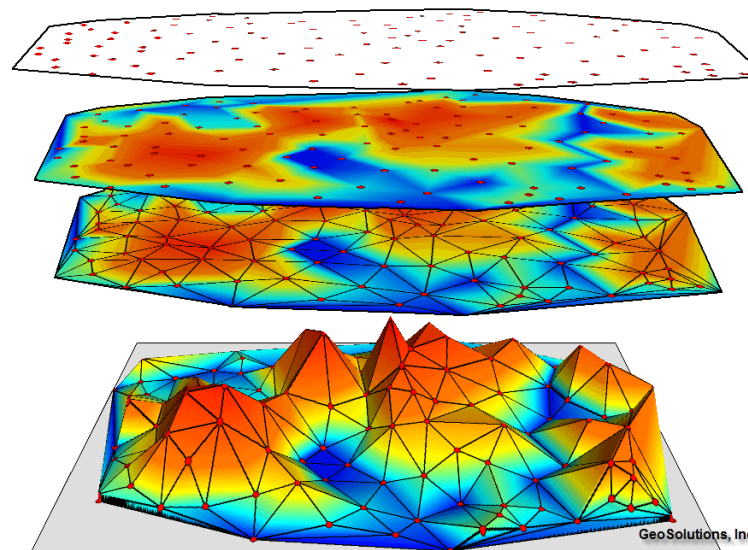
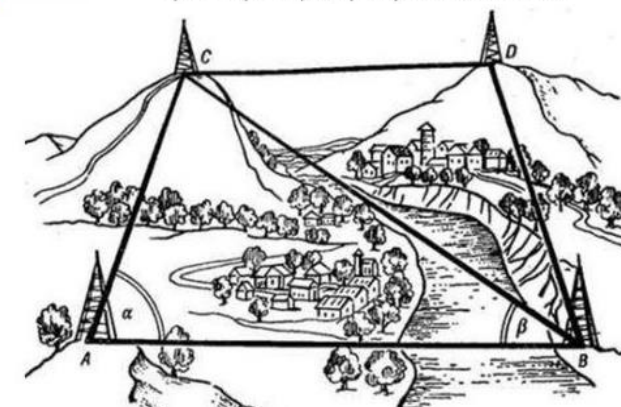


# Триангуляция

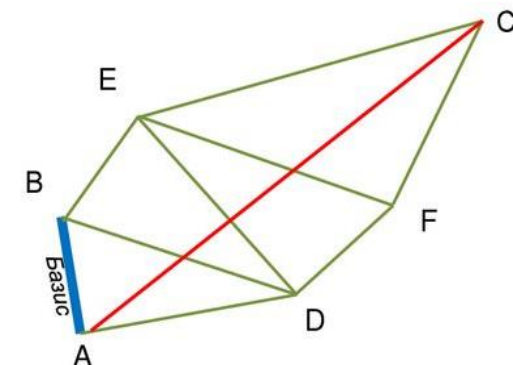
В 1616 голландский ученый Снеллиус произвел первые градусные измерения на основе изобретенного им способа триангуляции, который позволял также с высокой точностью определять значительные расстояния на местности



Триангуляция, рисунок XVI века



Триангуляционная модель рельефа

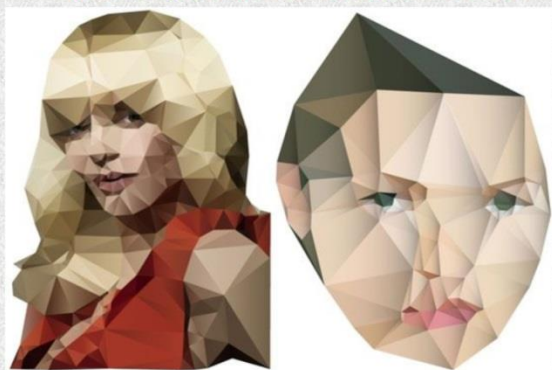


Еще триангуляция – один из методов вычисления места нахождения абонента мобильной связи путем наложения координат абонента на карту местности

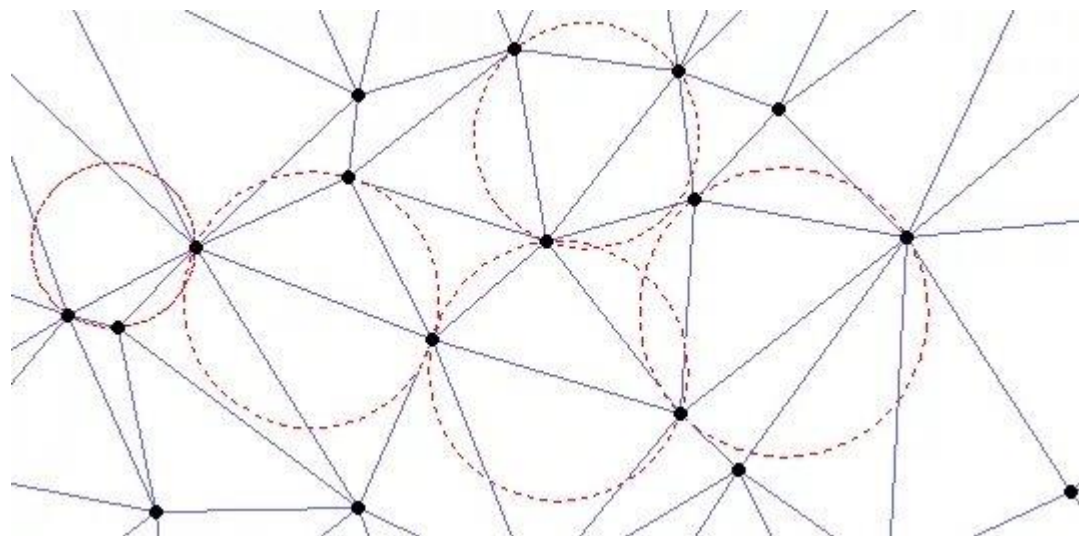


СНЕЛЛИУС Виллеброрд (1580-1626)

Триангуляция изображения

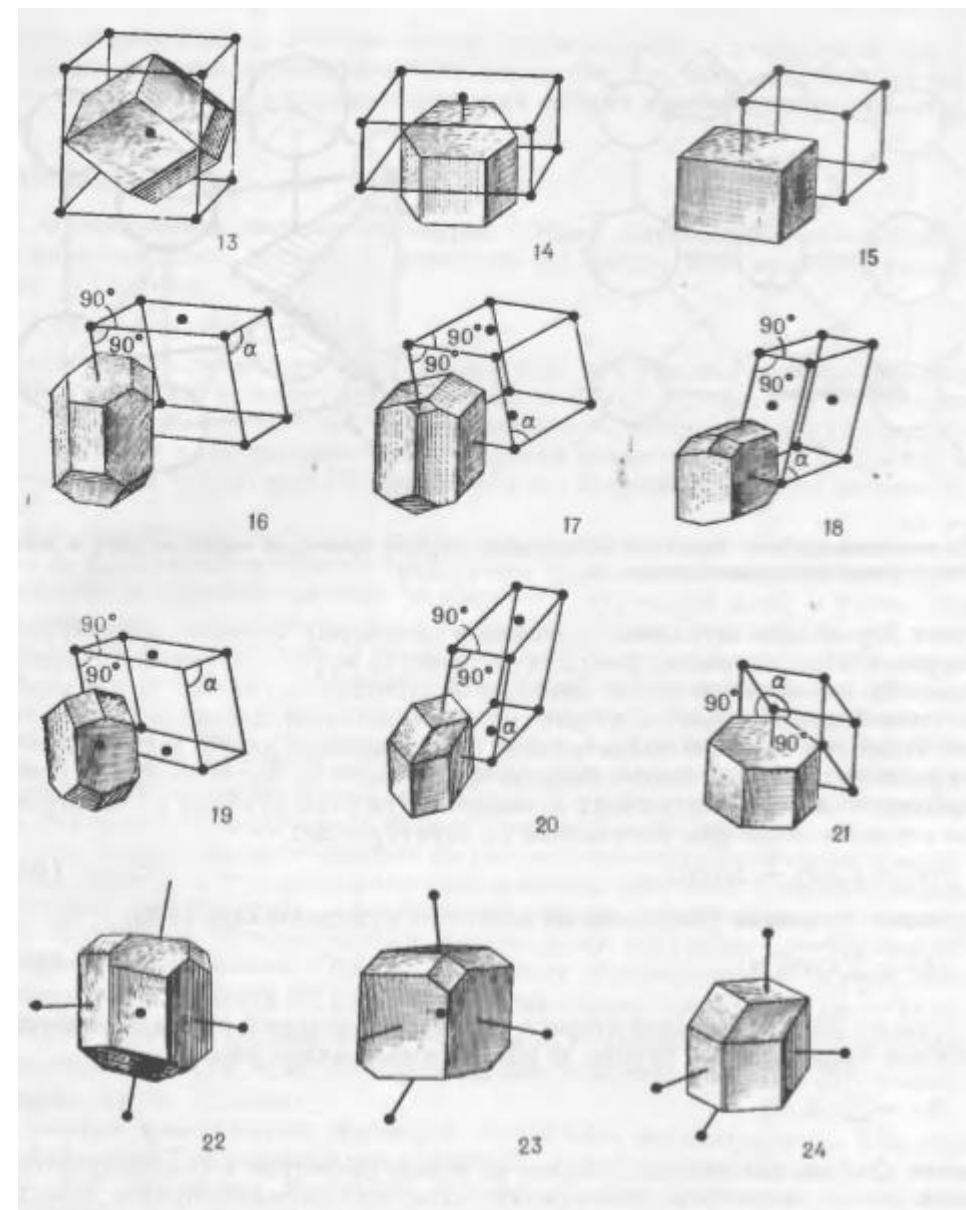
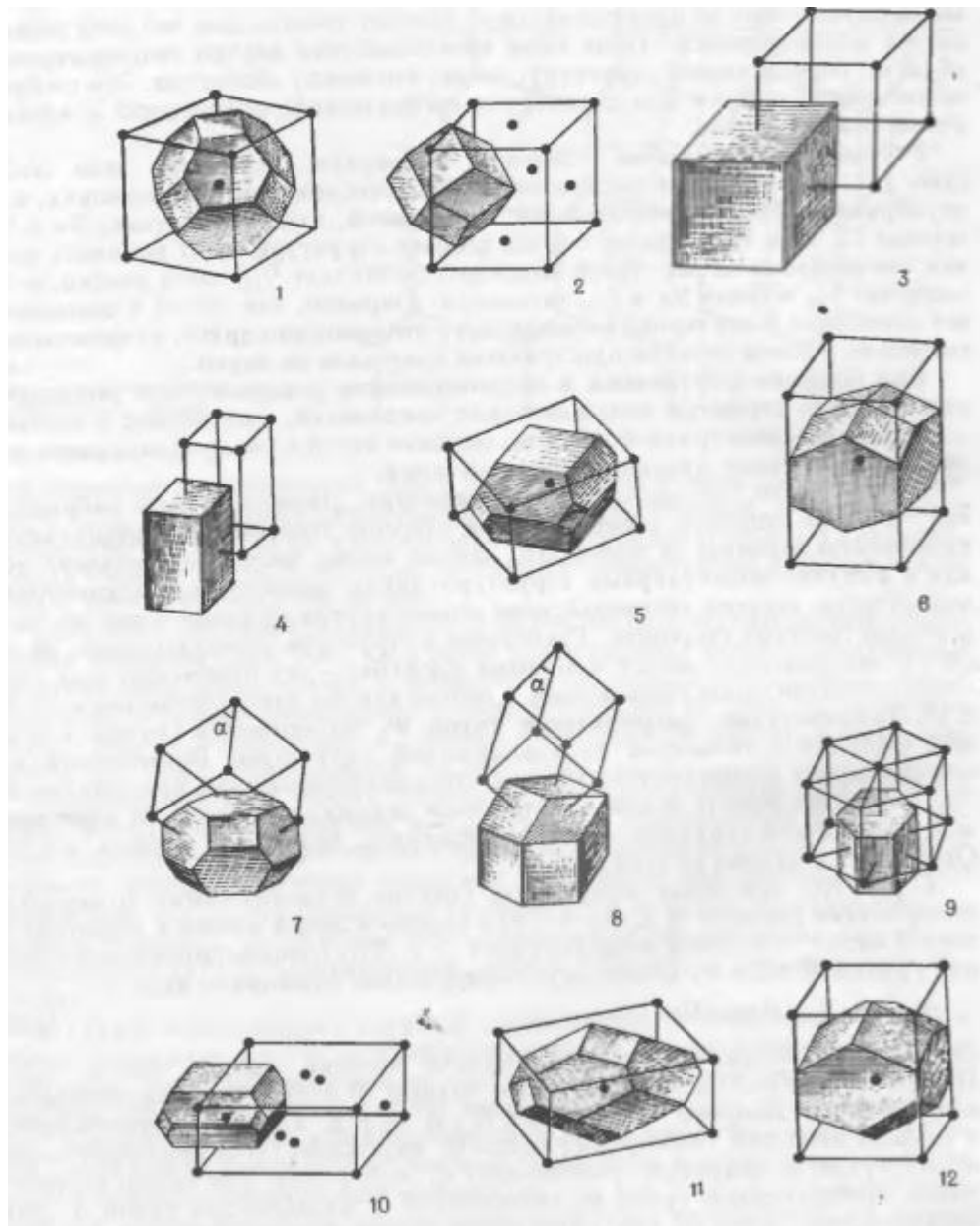



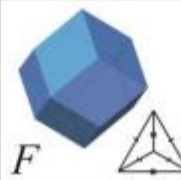
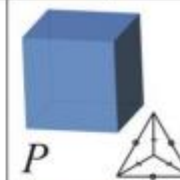
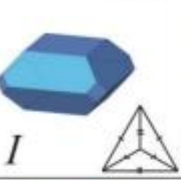
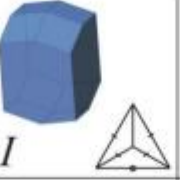
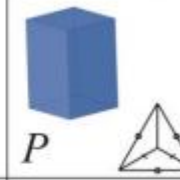
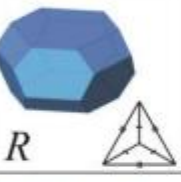
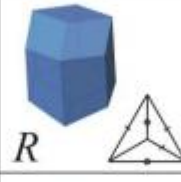
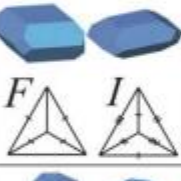
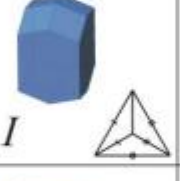
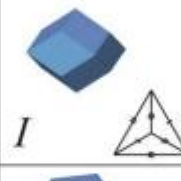
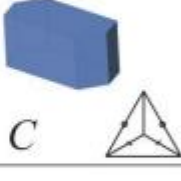
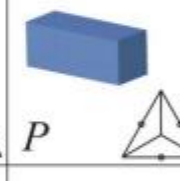
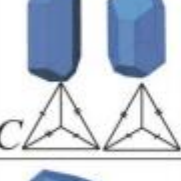
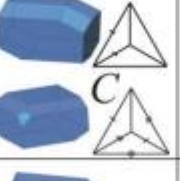
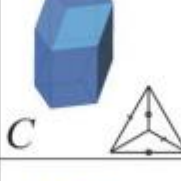
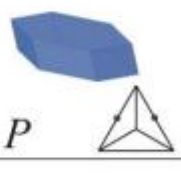
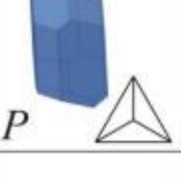
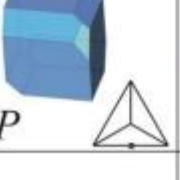
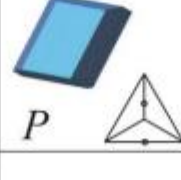
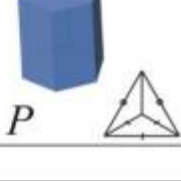
# Триангуляция Делоне



Триангуляция Делонé — триангуляция для заданного множества точек  $S$  на плоскости, при которой для любого треугольника все точки из  $S$  за исключением точек, являющихся его вершинами, лежат вне окружности, описанной вокруг треугольника. Обозначается  $DT(S)$ . Впервые описана в 1934 г. советским математиком Борисом Николаевичем Делоне.

# 24 сорта вида ячеек Делоне и соответствующие им решетки Браве.



	I	II	III	IV	V
K	 <i>I</i>		 <i>F</i>		 <i>P</i>
Q	 <i>I</i>	 <i>I</i>			 <i>P</i>
R	 <i>R</i>		 <i>R</i>		
O	 <i>F I</i>	 <i>I</i>	 <i>I</i>	 <i>C</i>	 <i>P</i>
M	 <i>C</i>	 <i>C</i>	 <i>C</i>	 <i>P</i>	
T	 <i>P</i>	 <i>P</i>	 <i>P</i>		
H				 <i>P</i>	

- Классификация на основе совокупностей точек, каждая из которых ближе к данному узлу решетки, чем к любому другому её узлу.
- Топологической характеристикой является МВД
- Построены на однородных параметрах

24 сорта вида ячеек Делоне и соответствующие им решетки Браве. Каждая решетка Делоне описывается символом Делоне в виде тетраэдра с обозначением равных ребер.

# Классификация кристаллических решёток

По Браве

По Делоне

Минимальный набор трансляций

На основе областей Дирихле  
(дуальны многогранникам Делоне)

Симметрия и центрирование элементарных ячеек

Симметрия и топологическая характеристика – МВД

6 неоднородных метрических параметров

6 однородных параметров Зеллинга

14 типов

24 сорта

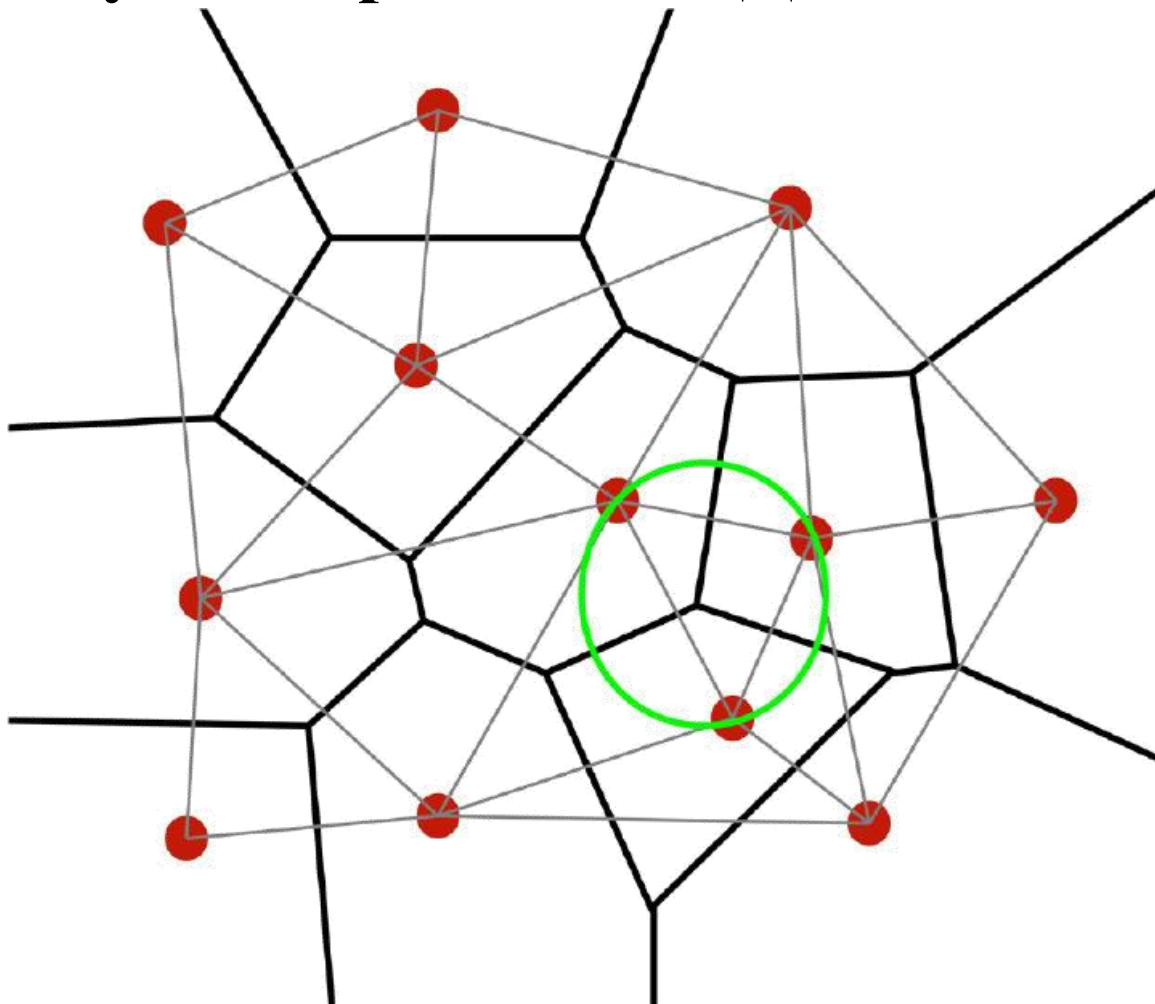
# Разбиение Вороного-Дирихле дуально разбиению Делоне



Г.Ф.Вороной



П.Г.Дирихле



Разбиение Вороного-Дирихле - геометрическая конструкция, образованная относительно исходных точек таким образом, что границы многоугольников являются отрезками средних перпендикуляров к сторонам треугольников разбиения Делоне

Разбиение Делоне является по существу областями Вороного-Дирихле ячеек Браве.



# Принцип Дирихле



Петер Густав Дирихле немецкий математик (1805-1859)

**Принцип Дирихле** – Этот принцип утверждает, что если множество из  $N$  элементов разбито на  $n$  непересекающихся частей, не имеющих общих элементов, где  $N > n$  то, по крайней мере, в одной части будет более одного элемента.

**Принцип Дирихле** очень часто формулируется на примере кроликов и клеток:

*если имеется  $n$  кроликов и  $t$  клеток, то при  $n > t$  хотя бы в одной клетке сидит больше 2 кроликов.*





В Москве более 10 млн. жителей, на голове у каждого не больше 100 000 волос. Докажите, что имеются, по крайней мере, 100 человек с одинаковым числом волос на голове.



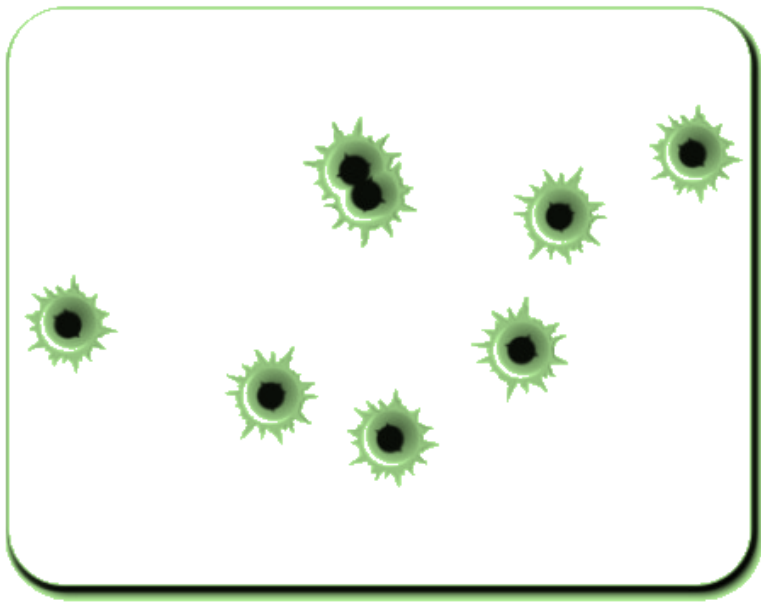
«Клетки» – число волос (у каждого может быть от 0 до 100 000, «кролики» - количество людей – 10 000 000. «Кроликов» больше, чем «клеток», значит существует «клетка» в которой сидит не менее двух «кроликов». Другими словами существуют хотя бы два человека с одинаковым числом волос

## Задачи, решаемые с помощью принципа Дирихле.

В коробке лежат шарики 4-х разных цветов (много белых, много черных, много синих, много красных). Какое наименьшее количество шариков надо наощупь вынуть из мешка, чтобы среди них заведомо оказались два одного цвета?

Возьмем за «кроликов» – шары, а за «клетки» - цвета шариков. «Клеток» 4. Поэтому «кроликов» должно быть хотя бы 5, тогда какие-то 2 попадут в одну клетку





## Задачи, решаемые с помощью принципа Дирихле.

В ковре, размеры которого  $5 \cdot 5$  м моль проела 24 дырки. Докажите, что из него всегда можно вырезать коврик квадратной формы, сторона которого равна 1 м и в нем не будет дыр. (Здесь под словами «дыра в ковре» будем понимать то же, что «точка на плоскости»).

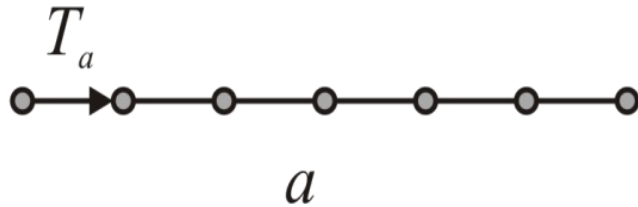
### *Решение.*

Разделим ковер на квадраты со стороной 1 м. Таких квадратов 25. По условию дыр 24.  $25 > 24$ . **Следовательно, существует квадрат, внутри которого дыр нет.** Принцип Дирихле сработал.

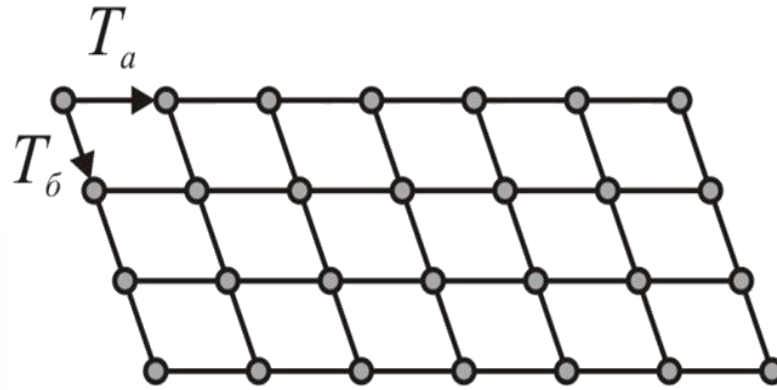
Интересен случай, когда дыра окажется на границе двух квадратов. Тогда, по логике вещей, она принадлежит двум квадратам сразу. Одна дыра «выступает за двоих» и получается дыр 25. Формально, принцип Дирихле не срабатывает. Но такие дыры мы можем вообще игнорировать. Ведь при разрезании они исчезнут.

Теперь задача решена для любого расположения точек.

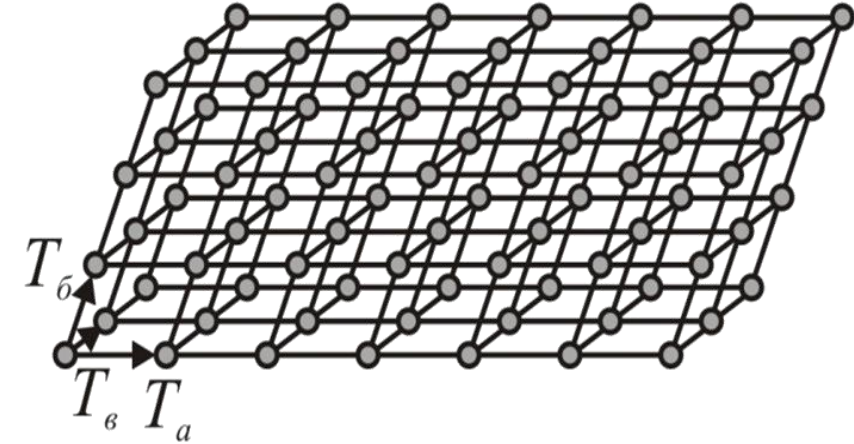
# Элементарные ячейки и ячейки Браве



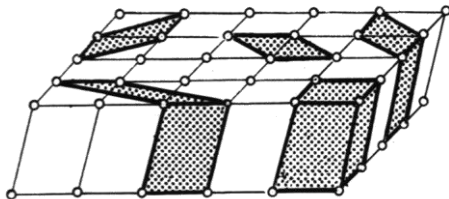
*Узловой ряд*, задаваемый одной трансляцией  $\vec{T}_a$



*Узловая сетка*, задаваемая двумя трансляциями  $\vec{T}_a$  и  $\vec{T}_b$ , а также одним углом  $\alpha$  между ними.



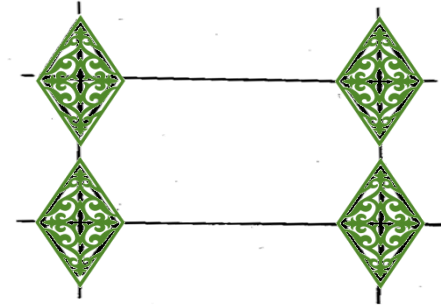
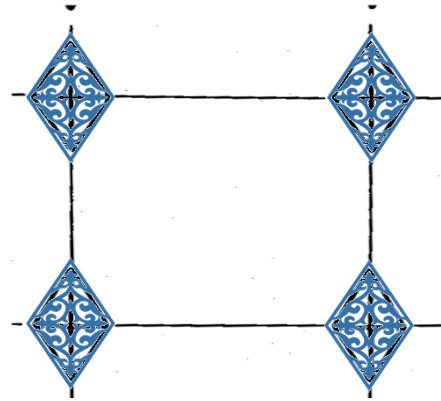
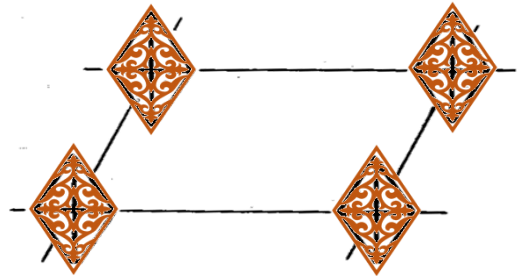
*Узловая решетка (пространственная решетка)*, задаваемая тремя трансляциями  $\vec{T}_a$ ,  $\vec{T}_b$  и  $\vec{T}_c$ , а также тремя углами  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  между ними.



Выбор минимального параллелепипеда повторяемости неоднозначен. Правила такого выбора придумал Браве

# Немного о соответствии симметрии решетки и симметрии узора.

## Принцип Кюри



а) – группа симметрии решетки  $2$  не содержит всех элементов симметрии фигуры  $mm2$  – **узор** наследует лишь общий для решетки и фигуры элемент симметрии - ось  $2$



б) - симметрия фигуры  $mm2$ , и, хотя симметрия решетки выше –  $4mm$ , **узор** наследует лишь симметрию фигуры –  $mm2$

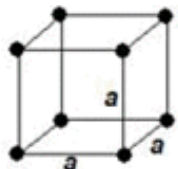
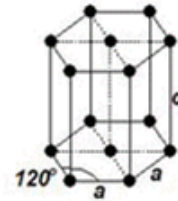
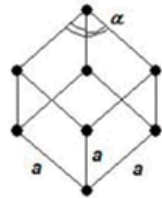
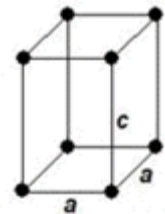
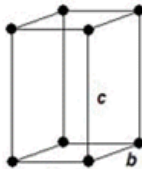
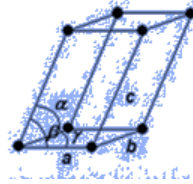
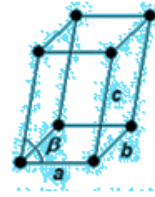


в) – симметрия фигуры  $mm2$  и решетки  $mm2$  совпадают – **узор приобретает ту же симметрию**



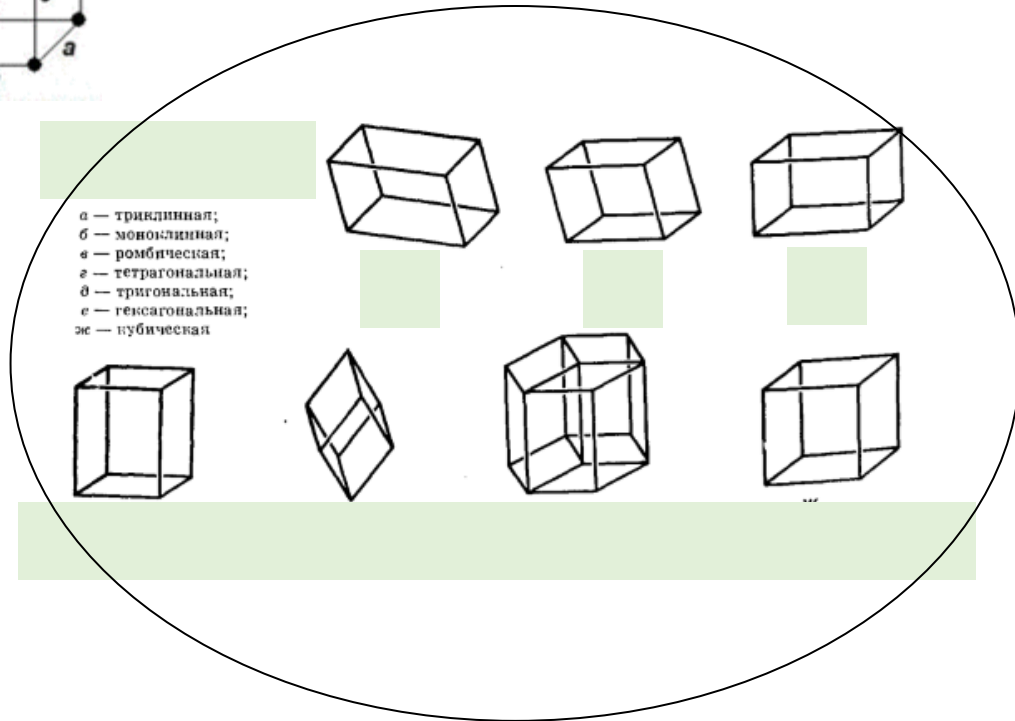
# Элементарные ячейки и ячейки Браве

	Симметрия фигуры	Симметрия решетки*	Симметрия узора	Сингония	Симметрия ячейки Браве
1	1	$\bar{1}$	1	триклинная	$\bar{1}$
2	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$		
3	2	2/m	2	моноклинная	2/m
4	<i>m</i>	2/m	<i>m</i>		
5	2/m	2/m	2/m		
6	<i>mm</i> 2	<i>mmm</i>	<i>mm</i> 2	ромбическая	<i>mmm</i>
7	222	<i>mmm</i>	222		
8	<i>mmm</i>	<i>mmm</i>	<i>mmm</i>		
9	4	4/mmm	4	тетрагональная	4/mmm
10	$\bar{4}$	4/mmm	$\bar{4}$		
11	4/m	4/mmm	4/m		
12	4mm	4/mmm	4mm		
13	$\bar{4}m2$	4/mmm	$\bar{4}m2$		
14	422	4/mmm	422		
15	4/mmm	4/mmm	4/mmm		
16	3	$\bar{3}m$	3	Гексагональная сингония	$\bar{3}m$
17	$\bar{3}$	$\bar{3}m$	$\bar{3}$		
18	3m	$\bar{3}m$	3m		
19	32	$\bar{3}m$	32		
20	$\bar{3}m$	$\bar{3}m$	$\bar{3}m$		
21	6	6/mmm	6	Гексагональная сингония	6/mmm
22	$\bar{6}$	6/mmm	$\bar{6}$		
23	622	6/mmm	622		
24	6mm	6/mmm	6mm		
25	$\bar{6}m2$	6/mmm	$\bar{6}m2$		
26	6/m	6/mmm	6/m		
27	6/mmm	6/mmm	6/mmm		
28	23	<i>m</i> $\bar{3}m$	23	Кубическая	<i>m</i> $\bar{3}$ <i>m</i>
29	432	<i>m</i> $\bar{3}$ <i>m</i>	432		
30	$\bar{4}m2$	<i>m</i> $\bar{3}$ <i>m</i>	$\bar{4}m2$		
31	<i>m</i> $\bar{3}$	<i>m</i> $\bar{3}$ <i>m</i>	<i>m</i> $\bar{3}$		
32	<i>m</i> $\bar{3}$ <i>m</i>	<i>m</i> $\bar{3}$ <i>m</i>	<i>m</i> $\bar{3}$ <i>m</i>		



Существует 6 геометрически разных ячеек Браве

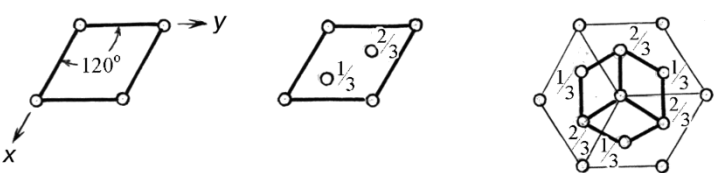
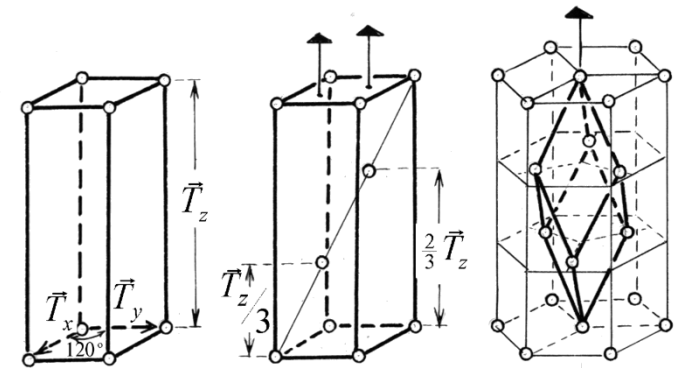
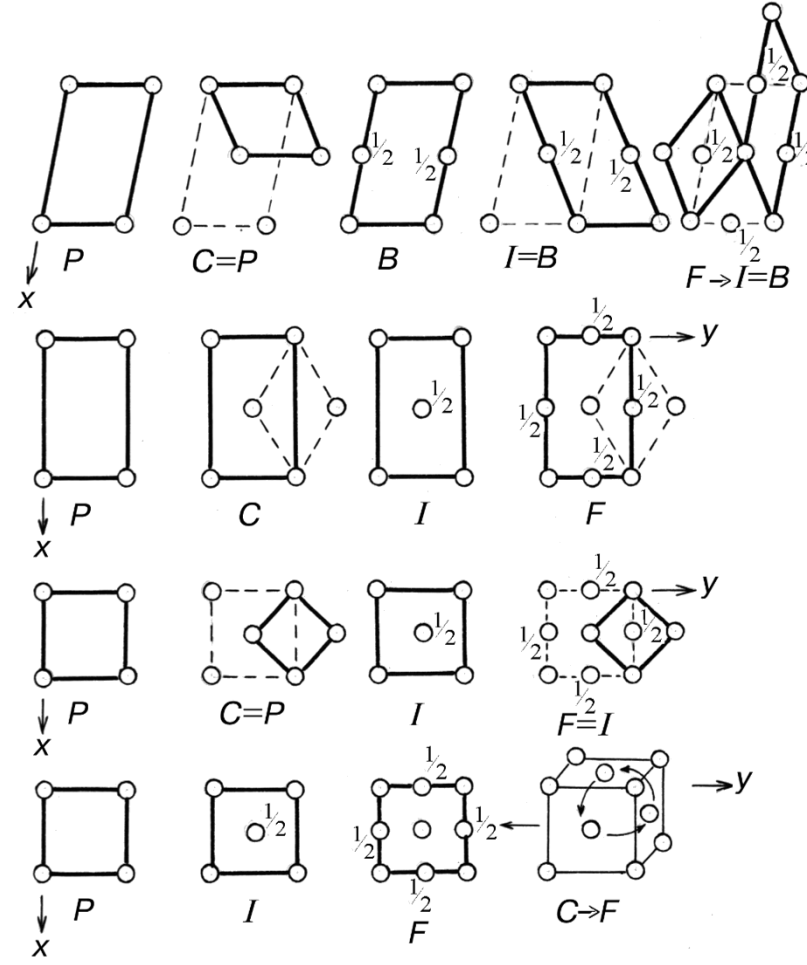
А вот основных ячеек - 7



# Основные ячейки и ячейки Браве (элементарные)

	Примитивная <i>P</i> -ячейка	База (боко- центрированная) <i>C</i> -ячейка ( <i>A</i> , <i>B</i> )	Объемно центрированная <i>I</i> -ячейка	Грание- центрированная <i>F</i> -ячейка
Триклинная сингония				
Моноклинная сингония				
Ромбическая сингония				
Тетрагональная сингония				
Гексагональная сингония				
Кубическая сингония				

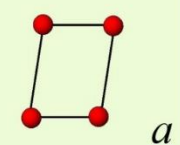
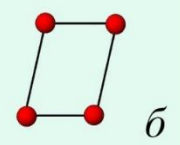
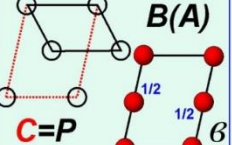
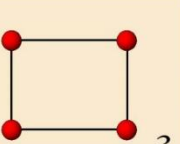
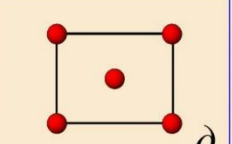
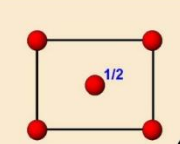
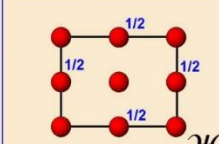
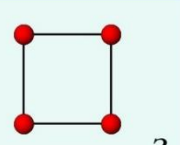
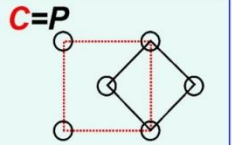
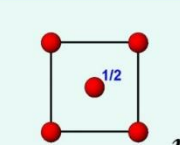
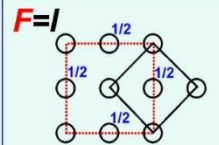
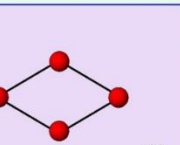

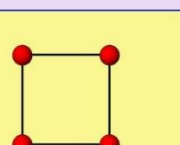
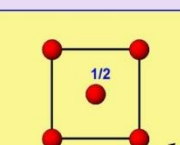
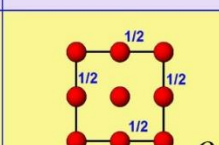
Основной принцип при центрировании решеток Браве заключается в введение узла в симметрично эквивалентную позицию хотя иногда она таковой становится в результате центрировки).



Специфика центрировки R-ячейки

Но не всегда такая центрировка приводит к оригинальной решетке Браве.

# Элементарные ячейки и ячейки Браве

	Примитивная <i>P</i> -ячейка	Базо (боко- центрированная) <i>C</i> -ячейка ( <i>A</i> , <i>B</i> )	Объемно центрированная <i>I</i> -ячейка	Грне- центрированная <i>F</i> -ячейка
Триклинная сингония				
Моноклинные сингония				
Ромбическая сингония				
Тетрагональная сингония				
Гексагональная сингония				
Кубическая сингония				

Любая пространственная группа симметрии содержит в качестве подгруппы группу трансляционных переносов, которая обозначается заглавными латинскими буквами *P*, *A* (*B*, *C*), *I*, *F*, *R*. Любой символ пространственной группы в международной символике, в общем случае состоящем из 4 позиций, начинается с типа решетки Браве (0-вая позиция).

Категория	Позиция символа			
	0	I	II	III
Трансляционная симметрия		Подрешеточные элементы симметрии, фиксирующие особые направления		
Низшая ( $a \neq b \neq c$ )	<i>P</i> , <i>A</i> ( <i>B</i> , <i>C</i> ), <i>I</i> , <i>F</i> , <i>R</i> .	X	Y	Z
Средняя ( $a = b \neq c$ )	<i>P</i> , <i>A</i> ( <i>B</i> , <i>C</i> ), <i>I</i> , <i>F</i> , <i>R</i> .	Z	X = Y (=U)	$\alpha/2$ Равнонаклонное к двум эквивалентным координатным осям (или апофемальное)
Высшая ( $a = b = c$ )	<i>P</i> , <i>A</i> ( <i>B</i> , <i>C</i> ), <i>I</i> , <i>F</i> , <i>R</i> .	X = Y = Z	Равнонаклонное к трем эквивалентным координатным осям направление 3(или $\bar{3}$ )	$\alpha/2$ Равнонаклонное к двум эквивалентным координатным осям направление