Московский Государственный университет
имени М.В. Ломоносова
ГЕОЛОГИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра кристаллографии и кристаллохимии

КУРСОВАЯ РАБОТА

Апериодическое замощение пространства: от 2D мозаик Пенроуза до 3D разбиения Аммана

Aperiodic tiling of space: from 2D Penrose tilings to 3D Amman tiling

Выполнила студентка 212 группы
Манохина Елизавета Алексеевна

Научные руководители:
Ассистент Еремина Татьяна Александровна,
н.с., к.х.н. Марченко Екатерина Игоревна

Москва, 2020

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Периодической мозаикой, или разбиением плоскости, называется такая мозаика, в которой можно выделить область, заполняющую без пробелов и наложений всю плоскость при трансляциях или параллельных переносах. Голландский художник М. К. Эшер известен тем, что его рисунки и гравюры представляют собой периодические мозаики, составленные из областей, напоминающих очертаниями живых существ. Типичная эшеровская мозаика представлена в виде примыкающих друг к другу белая и черная птицы образующих фундаментальную область, которая при трансляции заполняет («замощает») всю плоскость. Представим себе, что плоскость покрыта прозрачной пленкой, на которую нанесены контуры каждой элементарной области. Только в том случае, если мозаика периодическая, вы можете сдвинуть пленку, не поворачивая ее, при этом контуры на ней в точности совпадут с контурами областей на плоскости. Существует бесконечно много фигур из которых можно сложить только периодическую мозаику. В то же время, существует бесконечно много других фигур, из которых можно сложить и периодические и **непериодические** мозаики. Бесконечную шахматную доску нетрудно превратить в непериодическую мозаику из одинаковых равнобедренных прямоугольных треугольников или из четырехугольников: для этого достаточно разбить каждый квадрат на две части и изменить ориентацию, чтобы нарушить периодичность.

Настоящая работа посвящена рассмотрению апериодических разбиений пространства как для двумерного, так и для трехмерного случаев. Основными целями и задачами работы являлись: 1) рассмотрение допенроузовских апериодических замощений и двумерной мозаики Пенроуза, 2) создание непереодического разбиения пространства с демонстрацией принципов его построения в трехмерном варианте для пополнения коллекции учебных моделей кафедры кристаллографии и кристаллохимии Геологического факультета.

ГЛАВА I. Литературный обзор.

Допенроузовские апериодические замощения

Во всех известных случаях непериодического разбиения плоскости на конгруэнтные фигуры, эти же фигуры позволяют строить и периодические мозаики другого рода, где непериодические разбиения плоскости получаются из фигур, из которых можно составить увеличенную копию одной фигуры.

Существуют ли наборы фигур, из которых можно строить только непериодические мозаики? Под «только» мы понимаем, что ни из одной фигуры, ни из какого-то их подмножества, ни из всего набора нельзя построить периодическую мозаику, но можно построить непериодическую мозаику. Стоит отметить, что при построении мозаики разрешается поворачивать фигуры и заменять их зеркальными отражениями.

В 1961 г. Хао Ван (китайский и американский математик, годы жизни 20.05.1921-13.05.1995) заинтересовался задачей о замощении плоскости множествами единичных квадратов, стороны которых раскрашены по-разному. Такие множества получили название «домино Вана». Задачу, которую поставил Ван, можно сформулировать так: найти процедуру, позволяющую для любого набора домино решать, можно ли из него построить мозаику, если домино укладывать так, чтобы смежные ребра были одного цвета. Поворачивать домино или заменять их зеркальными отражениями не разрешается. Поставленная задача важна потому, что связана с проблемой разрешимости в математической логике. Ван предположил, что любой набор домино, которым можно замостить плоскость, позволяет построить периодическую мозаику, и показал, что если его гипотеза верна, то для задачи о построении мозаики существует решающая процедура.

В 1964 г. Робер Берджер (американский математик) в своей докторской диссертации по прикладной математике показал, что гипотеза Вана неверна. Общей решающей процедуры не существует. Это означает, что существует определенный набор домино Вана, из которых можно построить только непериодическую мозаику. Берджер построил такой набор из более чем 20 000 домино. Впоследствии ему удалось уменьшить набор до 104 домино, а Доналд Кнут (американский ученый в области информатики) обнаружил набор из 92 домино. Каждый такой набор домино Вана нетрудно превратить в многоугольные фигуры, из которых можно строить только непериодические мозаики. Для этого нужно просто снабдить соприкасающиеся стороны домино точно подогнанными друг к другу выступами («шипами») и впадинами («пазами»). Соответствие шипов и пазов заменяет прежнее условие совпадения цвета примыкающих друг к другу сторон домино.

Роберт Амманн (израильский математик) обнаружил другой набор из 6 фигур, из которых также можно сложить непериодическую мозаику. Неизвестно, можно ли сложить из фигур такого квадратного типа мозаику, если число их меньше 6. Имеются веские основания полагать, что число 6 минимально. Профессору математики Оксфордского университета Роджеру Пенроузу удалось найти меньшие наборы фигур неквадратного типа, из которых можно построить непериодическую мозаику [1].

Однако, первые модели апериодических мозаик появились еще задолго до исследований XX века. Питер Джеймс Лу (доктор философии, аспирант кафедры физики Гарвардского университета) обратил внимание на узоры, покрывающие мечети в Азии, построенные ещё в Средневековье [3]. Эти рисунки сделаны из мозаичной плитки. Они называются гирихи (от арабского "узел") и представляют собой геометрический орнамент, характерный для исламского искусства и состоящий из многоугольных фигур (Рис. 1).

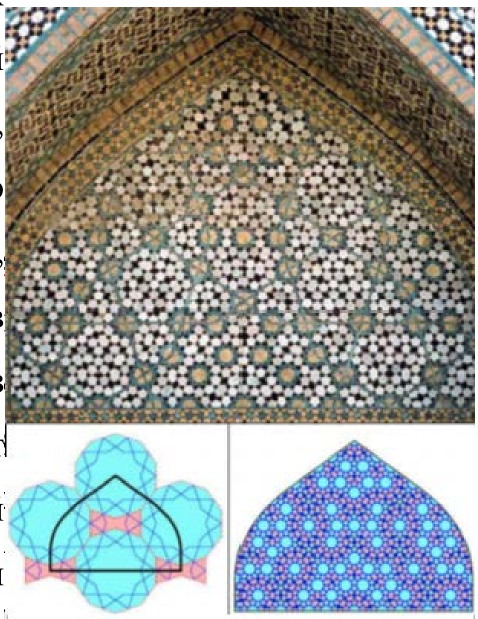

Рис. 1. Портал мечети в Иране

Роджер Пенроуз и его «невозможный» треугольник

Сэр Роджер Пенроуз родился в Колчестере (Англия) 8 августа 1931 года. Оба его родителя были высокообразованными людьми. Мать Маргарет Фит - врачом, а отец Лайонел Пенроуз - медиком-генетиком, избранным членом Королевского научного общества. В 1939 году Лайонел перевез семью в Соединенные Штаты, и в связи с началом Второй Мировой Войны решил не возвращаться в Англию. Лайонел Пенроуз принял предложение работать в больнице Лондона. Роджер, посещая здесь школу, впервые заинтересовался математикой. Но этот интерес стимулировался, скорее, не обучением в школе, а влиянием семьи [2].

В 1945 году по окончании Второй Мировой Войны семья вернулась в Англию. Лайонел Пенроуз был назначен Профессором Генетики Человека в Университетском Колледже в Лондоне. Роджер поступил учиться туда. Здесь его интерес к математике стал увеличиваться, но родители настаивали на выборе медицинской специальности, чтобы следовать по стопам отца. Однако, математика и биология были двумя взаимоисключающими предметами, а школьники, изучающие один предмет, не могли изучать другой.

Пенроуз поступил в колледж, не платя никаких взносов, благодаря заслугам отца. Роджер был удостоен степени бакалавра с наградой первого класса в математике, и принял решение поступить в Кембридж, чтобы заняться чистой математикой. Он был нацелен на изучение математики и поступил в Колледж Сент-Джон, и позже в 1957 году получил степень доктора за свои работы в области алгебры и геометрии.

В 1964 году Роджер был принят в Биркбек в качестве преподавателя, где через два года был повышен в должности до Профессора прикладной математики. В 1973 году он был принят в Оксфордский университет в должности ведущего профессора математики и оставался в этой должности вплоть до 1998 года, когда ему было присвоено звание заслуженного ведущего профессора математики. В том же году он стал Профессором Геометрии в Грешемском Колледже в Лондоне.

Направления исследований Роджера Пенроуза включают в себя многие аспекты геометрии, теорию непериодических мозаик, общую теорию относительности и основы квантовой теории. В 1954 году Роджер и Лайонел Пенроузы опубликовали в Британском журнале психологии статью о двух классических невозможных фигурах «невозможном» треугольнике и бесконечной лестнице. В этой статье невозможный треугольник был представлен в его классическом виде - в виде трех соединяющихся под прямым углом балок, изображенных с эффектом перспективы. В невозможном треугольнике каждый угол сам по себе является возможным, но парадокс возникает, когда мы рассматриваем его целиком. Стороны треугольника направлены одновременно и к зрителю, и от него, поэтому отдельные его части не могут образовать реальный трехмерный объект. Человеческое сознание сначала создает общее изображение предмета, а затем рассматривает отдельные части. Каждый угол совместим с пространственной перспективой, но, воссоединившись, они образуют пространственный парадокс. Если закрыть любой из углов треугольника, то невозможность пропадает. По такому же принципу «зрительной иллюзии» устроена бесконечная лестница.

Несомненно стоит отдельно отметить, что Роджер Пенроуз стал Нобелевскими лауреатами по физике в 2020 году за теоретическое обоснование существования черных дыр с позиции теории относительности.

Мозаики Пенроуза как математическая модель

В 1973 г. Роджер Пенроуз обнаружил набор из 6 фигур, из которых можно построить непериодическую мозаику. Вскоре ему удалось сократить число фигур до двух. Так как найденные фигуры могли стать основой коммерческих игр-головоломок, Пенроуз воздерживался от публикации своего открытия до тех пор, пока не получил на них патенты в Великобритании, США и Японии. Эти патенты действуют и поныне. Форма двух основных фигур Пенроуза может быть различной, но наиболее интересна пара фигур - «наконечник дротика» и «воздушный змей» (Рис. 2), представляющие собой ромба с углами в 72° и 108°. Для того чтобы постороить эти фигуры, разделим длинную диагональ ромба в отношении, равном хорошо известному золотому сечению (1+/5):2 = 1,61803398..., и соединим точку деления с вершинами тупых углов. Вот и все. Тогда каждый прямолинейный отрезок-сторона наконечника или змея имеет длину, равную либо 1, либо φ. Наименьший угол равен 36°. Все остальные углы кратны ему. Разумеется, ромбом с внутренними углами в 72° и 108° можно выложить периодически всю плоскость, но складывать наконечники и змеи так, чтобы они образовали ромб, не разрешается [1].

Избежать запретных вариантов соединения фигур мы можем, снабжая стороны наконечников и змеев соответствующими шипами и пазами, но той же цели можно достичь и проще. Джон Хортон Конуэй (британский математик, годы жизни 26.12.1937-11.04.2020) предложил более изящный метод-проводить на

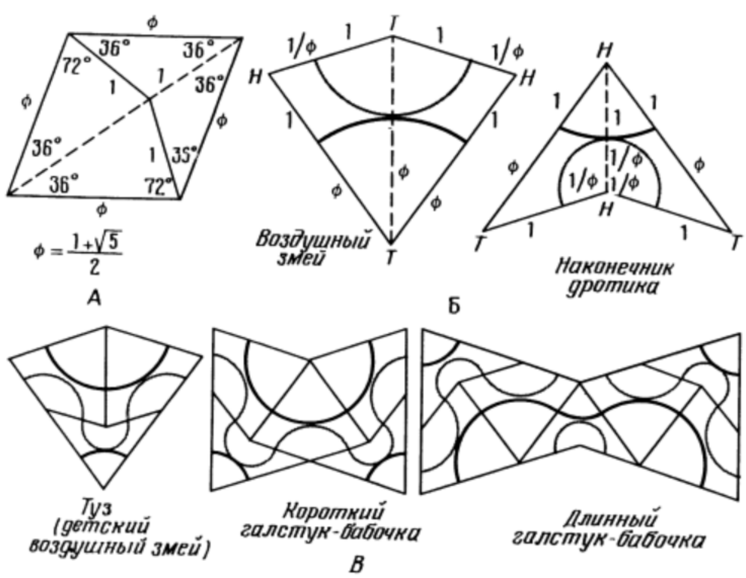

Рис. 2. Построение фигур змея, дротика, туза и галстуков-бабочки

каждой фигуре дуги окружностей двух цветов. Каждая такая дуга делит стороны фигур, а также оси симметрии на части, длины которых образуют золотое сечение. Правило построения мозаики состоит в том, что при совмещении сторон должны соединяться дуги одного цвета. Чтобы в полной мере оценить красоту и загадочность мозаики Пенроуза, необходимо изготовить набор, состоящий по меньшей мере из 100 змеев и 60 наконечников. Число змеев находится к числу наконечников (так же, как площадь змея к площади наконечника) в отношении, равном золотому сечению. Вам могло показаться, что меньших по размерам наконечников потребуется больше, чем змеев, но в действительности дело обстоит иначе: змеев в мозаике оказывается в 1,618... больше, чем наконечников. В бесконечной мозаике отношение числа змеев к числу наконечников равно золотому сечению. Пенроузом доказана непериодичность его мозаики, так как если бы мозаикабыла периодической, то отношение числа змеев к числу наконечников заведомо было бы рациональным. Если вы захотите построить мозаику Пенроуза, то лучше всего начертить тонкими линиями на листе бумаги как можно больше наконечников и змеев, выдерживая при этом пропорцию, на пять змеев - три наконечника. Затем выкройку следует многократно сфотографировать и раскрасить дуги окружностей на фигурах. Конуэй обнаружил, что построение мозаики Пенроуза можно ускорить, а фрагменты ее оказываются более устойчивыми, если змеи и наконченики изготавливать в три раза более крупных размеров. Расширяя мозаику, вы можете непрестанно заменять наконечники и змеи тузами и галстуками-бабочками. В действительности при составлении любой бесконечной мозаики можно использовать бесконечный набор сколь угодно больших пар основных фигур.

Начинается построение мозаики Пенроуза с укладки наконечников и змеев вокруг одной вершины и последующего радиального расширения узора. Каждый раз, когда вы пристраиваете к участку границы новую фигуру, вам необходимо выбирать между наконечником и змеем. Иногда выбор предрешен, иногда свободен. Бывают случаи, когда подходят обе фигуры, но впоследствии вы можете прийти к противоречию, где по правилам окажется невозможным пристроить к мозаике ни змей, ни наконечник. В этом случае не остается ничего другого, как вернуться назад и изменить выбранную вами фигуру. При построении мозаики удобно сначала обойти границу и пристроить все фигуры там, где их выбор предопределен. Такая операция не может привести к противоречию. Затем можно попробовать попытать счастья с теми фигурами, выбор которых однозначно не определен. Чем больше вы будете возиться с фигурами, тем больше вы будете открывать для себя «правил», позволяющих строить мозаику более эффективно.

Например, наконечник входит в углубление между двумя змеями, образуя вездесущий туз. Мозаики Пенроуза образуют несчетное множество также, как точки на прямой. Доказать это можно многими способами. Все доказательства основаны на использовании одного поразительного явления, открытого Пенроузом. Конуэй называет его «расширением» (Рис. 3) и «сжатием». Расширение можно продолжать до бесконечности, и каждое новое поколение фигур будет крупнее предыдущего.

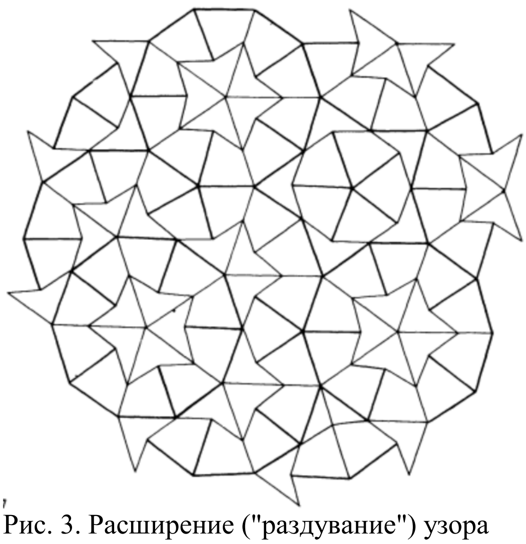

Рис. 3. Расширение ("раздувание") узора

Заметим, что змеи второго поколения, хотя они имеют такую же форму и такие же размеры, как тузы первого поколения, «устроены» иначе. Именно поэтому туз иногда называют детским змеем. Сжатие - процесс, аналогичный расширению, но проводимый в противоположном направлении. На каждой мозаике Пенроуза можно вычерчивать все более мелкие поколения наконечников и змеев. Построение мозаики при этом продолжается до бесконечности, порождая фрактальную структуру.

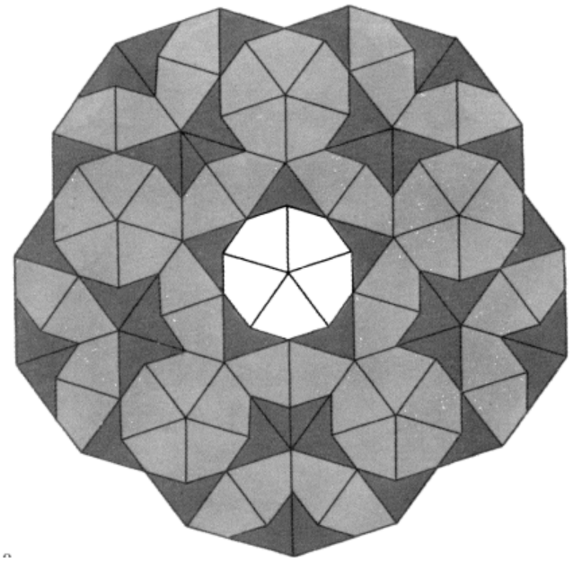
Рис. 4. Бесконечный узор - солнце

Пенроуз и Конуэй независимо доказали, что если дуги образуют замкнутую кривую, то она имеет центр симметрии пятого порядка. Любой узор может иметь самое большее две незамкнутые кривые каждого цвета. В большинстве узоров все кривые замкнуты. Хотя можно построить мозаики Пенроуза с высокой симметрией, большинство мозаик представляют собой смесь порядка и неожиданных отклонений от него. Когда мозаики расширяются, они всегда стремятся повторить себя, но это им так никогда и не удается. В мирах Пенроуза есть нечто более удивительное. В некотором смысле, точно переданном в виде теоремы о локальном изоморфизме, все мозаики Пенроуза одинаковы. Пенроузу удалось показать, что любая конечная область в любой мозаике совпадает с каким-то участком любой другой мозаики. Более того, в любой мозаике любой выбранный фрагмент другой мозаики встречается бесконечно много раз. Разумеется, для периодических разбиений плоскости такое утверждение тривиально, но миры Пенроуза не периодичны. Они отличаются друг от друга бесконечно многими деталями и в бесконечно многих отношениях, и тем не менее их можно различить только в недостижимом пределе.

Наконечники дротиков и воздушные змеи можно уложить вокруг вершины только семью различными способами. Рассмотрим некоторые из них. Солнце (Рис. 4) не налагает жестких ограничений на примыкающие к нему фигуры. Если при укладке новых фигур следить за сохранением пентагональной симметрии, то получится красивая мозаика.

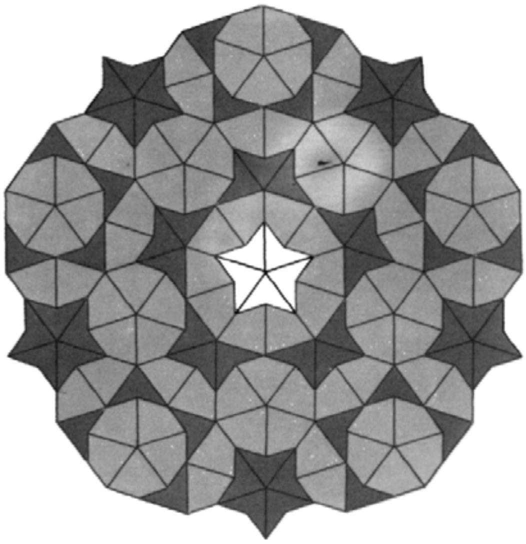

Рис. 5. Бесконечный узор - звезда

Структура такой мозаики однозначно определена на всем ее бесконечном протяжении. Звезда жестко регламентирует свое окружение, позволяя уложить в непосредственной близости от себя только 10 змееев (Рис. 5). Расширяя этот фрагмент мозаики с сохранением симметрии с центром 5-го порядка, вы получаете еще одну бесконечную и однозначно определенную мозаику, напоминающую ковер из цветов. Мозаики на основе звезды и солнца - единственные среди мозаик Пенроуза, обладающие идеальной симметрией с центром 5-го порядка. Они эквивалентны в следующем смысле: расширив или сжав одну из них, вы получите вторую мозаику.

Туз - третий способ укладки фигур вокруг вершины (Рис. 2). Ближайшее окружение туза может быть различным. Фигуры, непосредственно примыкающие к двойке, валету и даме, однозначно определены. Разрезая наконечники и змеи на меньшие части и переставляя последние, можно построить пары фигур со свойствами, аналогичными свойствам наконечников и змеев. Пенроуз обнаружил одну такую пару необычайно простых фигур: это ромбы. Все стороны имеют одинаковую длину. Больший ромб имеет углы в 72° и 108°, меньший - 36° и 144°. Как и в случае змеев и наконечников, площади и количества фигур каждого типа, необходимых для построения бесконечной мозаики, находятся в отношении, равном золотому сечению. Расширяя и сжимая мозаики такого типа, мы получаем несчетное множество непериодических разбиений плоскости. Непериодичность достигается с помощью выступов и впадин на границах фигур или раскрашиванием сторон в разные цвета, как это было предложено Пенроузом.

Разумеется, фигуры, из которых составлены мозаики Пенроуза, всегда можно раскрасить в четыре цвета так, что никакие две фигуры одного и того же цвета не будут иметь общих сторон. Достаточно ли для этих целей трех цветов? Конуэй утверждает, что, исходя из теоремы о локальном изоморфизме, можно доказать следующее утверждение: если какая-нибудь мозаика Пенроуза может быть правильно раскрашена в три цвета, то все мозаики Пенроуза также могут быть правильно раскрашены в три цвета. Однако до сих пор никому не удалось доказать, что какую-нибудь бесконечную мозаику Пенроуза можно правильно раскрасить в три цвета.

Любая теорема о змеях и наконечниках может быть переформулирована в соответствующую теорему о ромбах Пенроуза или о любой другой паре его элементарных плиток, и наоборот. Конуэй предпочитает иметь дело с наконечниками и змеями, но другим математикам нравится работать с более простыми ромбами. Роберт Амманн обнаружил поразительное разнообразие других наборов изразцов, порождающих непериодические мозаики.

Один из таких наборов состоит из двух выпуклых пятиугольников и одного выпуклого шестиугольника, однозначно определяющих непериодическую мозаику даже без маркировки сторон. Амманн нашел несколько пар элементарных фигур, в каждую из которых входит шестиугольник с пятью внутренними углами в 90° и одним углом в 270° [1].

Мозаика Пенроуза как 2D-модель квазикристалла

Гипотезы, высказанные Пенроузом относительно кристаллов, и даже его терминология оказались удивительно пророческими. В начале восьмидесятых годов некоторые физики и математики начали поговаривать о возможности существования атомной структуры кристаллов непериодической пространственной решетки. В 1984 г. Дан Шехтман и его коллеги из Национального бюро стандартов США сообщили о сенсационном открытии: они обнаружили непериодическую структуру на электронограмме быстро охлажденного сплава марганца и алюминия, который химики сразу же окрестили шехтманитом. Расположение рефлексов - светлых пятен на электронограмме обладало осью симметрии 5-го порядка, что убедительно свидетельствует о существовании непериодического разбиения пространства, аналогичного мозаике Пенроуза. В кристаллографии долгое время господствовала догма, согласно которой кристаллы могут обладать осями симметрии только 2-, 3-, 4- и 6-го, отнюдь не 5-, 7- или 8-го порядка. Согласно другой догме, твердое вещество могло существовать только в двух формах: атомы располагаются в пространстве либо регулярно, периодически, либо хаотически, как в аморфных телах, например в стекле.

Упорядоченные решетки всех известных ранее кристаллов выводились из трех Платоновых тел: тетраэдра, куба и октаэдра. Додекаэдр и икосаэдр не входили в число допустимых Платоновых тел, так как они обладают осью симметрии 5-го порядка, а это делает невозможным периодическое разбиение пространства на додекаэдрические и икосаэдрические ячейки. И физики обнаруживают вещество, структура которого обладает икосаэдрической симметрией. Подобно мозаике Пенроуза, шехтманит остается статистически неизменным при повороте на любой угол, кратный 72°, но не обладает периодичностью, если учесть дальний порядок. Шехтманит занимает промежуточное положение между стеклом и обычными (периодическими) кристаллами. Это означает, что между аморфными телами и периодическими кристаллами существует не четкая демаркационная линия, а плавный переход.

Аналогичные непериодические структуры вскоре были обнаружены и в других сплавах. В физических и кристаллографических журналах начали появляться десятки статей. Стало ясно, что твердое тело может обладать непериодическими решетками с осями симметрии некристаллографических порядков. В качестве моделей были предложены наборы из двух или более решеток, допускающих или однозначно определяющих непериодическое разбиение пространства. Была получена кристаллическая структура, состоящая из слоев, наделенных структурой двумерных ромбических мозаик Пенроуза.

В настоящее время экспериментальные и теоретические исследования квазикристаллов (как стали называть новую разновидность твердых тел, занимающую промежуточное положение между классическими идеальными кристаллами и аморфными телами) ведутся достаточно рутинным образом. Правда, по мнению некоторых исследователей, квазикристаллические решетки нельзя считать настоящими непериодическими решетками. Главным оппонентом представлений о непериодичности квазикристаллов выступал Лайнус Полинг, утверждавший, что электронограммы квазикристаллов надлежит интерпретировать как ложную форму пятиугольной симметрии, известной кристаллографам под названием множественного двойникования.

Еще одна интерпретация состоит в том, что квазикристаллы представляют собой просто-напросто необычно большие ячейки периодических мозаик, которые будут обнаружены впоследствии, когда экспериментаторам удастся изготовить образцы более крупных размеров. Были предложены и другие интерпретации. Те же исследователи, кто убежден в существовании нового класса твердотельных структур, считают, что все альтернативные интерпретации электронограмм должны быть отброшены и что простейшим объяснением пятиугольной симметрии является истинная непериодичность.

Пенроуз высказал гипотезу о том, что в формировании квазикристаллов могут играть роль нелокальные эффекты квантовых полей, поскольку трудно представить, чтобы квазикристаллы могли расти без общего плана, сохраняя тем не менее дальний непериодический порядок. Каковы упругие и электронные свойства квазикристаллов? Удастся ли геологам когда-нибудь найти природные квазикристаллы?

Конуэю принадлежит следующее простое доказательство от противного того, что никакая мозаика не может иметь более одного центра с симметрией 5-го порядка. Предположим, что какая-то мозаика имеет более чем один центр симметрии 5-го порядка. Выберем два таких центра A и B, расстояние между которыми минимально. Повернув мозаику вокруг центра B на угол 360°/5 = 72°, переведем центр A в точку A'. Вернувшись затем в исходное положение и повернув мозаику вокруг центра A на 72° по часовой стрелке, переведем центр B в точку B'. В результате приходим к следующему. Если наше предположение верно, то оба поворота переводят мозаику в себя, но два центра. Под правильной понимается такая раскраска, при которой никакие две фигуры, имеющие общую границу, не окрашены в один цвет. «Изразец» Конуэя, позволяющий построить разбиение плоскости r = 0 способами. симметрии 5-го порядка A' и B находятся на меньшем расстоянии, чем A и B. Это противоречит нашему второму предположению, согласно которому A и B расположены на минимальном расстоянии друг от друга. Существуют отдельные «изразцы», позволяющие единственным способом периодически замостить плоскость: такими свойствами обладают, например, правильный шестиугольник и пентамино в форме креста [1].

Разбиения Аммана

Открытие того, что теперь принято называть полосами, или дорожками, Амманна, и трехмерных аналогов мозаик Пенроуза привело к поразительным успехам в области кристаллографии. Роберт Амманн, блестящий молодой математик, занимавшийся рутинными расчетами на компьютерах в Массачусетсе, независимо от Пенроуза открыл его ромбические «плитки», позволяющие строить непериодические мозаики, в 1976 г., примерно за восемь месяцев до публикации его статьи о мозаиках Пенроуза в разделе «Математические игры» журнала «Scientific American». Амманн вскоре понял, что обе пары фигур, из которых можно составлять мозаики, определяются пятью семействами параллельных прямых, пересекающих плоскость в пяти различных направлениях, которые пересекаются под углом 360°/5 = 72°.

При точном построении границы полос Амманна (Рис. 6) проходят немного в стороне от вершин тупых внутренних углов наконечников. Внутри каждого правильного десятиугольника на мозаике полосы Амманна образуют правильную пентаграмму (пятиконечную звезду).

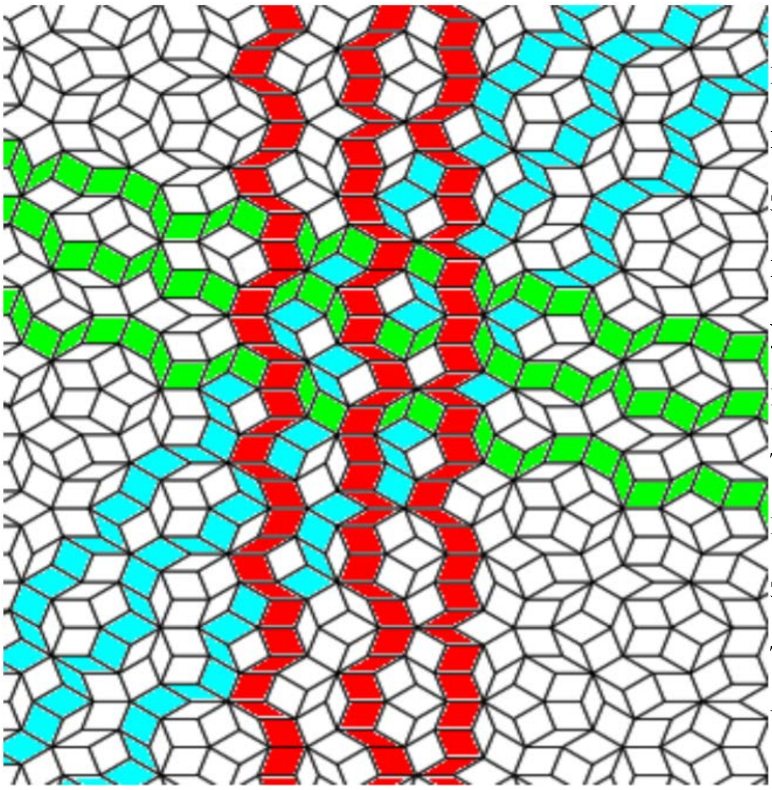

Рис. 6. Полосы Амманна

Нетрудно видеть, что ширина полос Амманна может принимать два различных значения: L (если полоса широкая) и S (если полоса узкая). Если границы полос проведены с математической точностью, то длины L и S находятся между собой в золотом отношении. Кроме того, на бесконечной плоскости число широких полос относится к числу узких полос того же разбиения, как золотое сечение. Двигаясь в направлении, перпендикулярном семейству полос, обозначим последовательность ширин полос как последовательность букв L и S. Эта последовательность непериодическая и является замечательным одномерным аналогом разбиения Пенроуза. К ней, в частности, применима теорема о локальном изоморфизме. Выбрав любой конечный отрезок последовательности, вы всегда можете найти его дубликат не очень далеко от того места, где находится выбранный вами отрезок.

Два семейства полос Амманна задают разбиение плоскости на непериодические параллелограммы, образующие решетку, в которую вписываются исходные фигуры. Полосы Амманна - нечто не поддающееся непосредственному созерцанию, подобно квантовым полям, определяющим положения и траектории частиц. Амманн был первым, кто понял, что его решетка полос приводит к теоремам о форсинге, которые говорят о том, как небольшой набор фигур вынуждает занять вполне определенные положения бесконечные множества других фигур.

В письме к Гарднеру Амманн сообщал: «Всякий раз, когда какое-нибудь множество фигур вынуждает две параллельные прямые занять определенные положения, оно вынуждает также занять вполне определенные положения бесконечное множество несмежных параллельных прямых. Всякий раз, когда три прямые пересекаются под надлежащими углами, они с необходимостью порождают элементарную фигуру мозаики». Этим же свойством конечного множества фигур однозначно определять положения других фигур, расположенных сколь угодно далеко от первых, обладают ромбы Пенроуза.

Опираясь на открытия Амманна, Конуэй сформулировал и доказал много замечательных теорем о форсинге. Еще одним выдающимся открытием Амманна был набор из двух ромбоэдров (параллелепипедов с шестью конгруэнтными ромбическими гранями), которые порождают непериодическое разбиение пространства. Правый ромбоэдр можно представить себе как куб, сжатый вдоль пространственной диагонали, а левый ромбоэдр - как куб, вытянутый вдоль пространственной диагонали.

Все двенадцать граней обоих ромбоэдров конгруэнтны, а длины их пространственных диагоналей образуют золотое сечение. Существуют золотые ромбоэдры только двух типов (Рис. 7), оба из которых были изучены еще Кеплером. У остроугольного ромбоэдра в двух противоположных вершинах сходятся три равных острых угла граней. У тупоугольного золотого ромбоэдра в двух противоположных вершинах сходятся равные тупые углы граней. В остальных вершинах как остроугольного, так и тупоугольного ромбоэдра сходятся острые и тупые углы граней. Два ромбоэдра, открытых Амманом, являются двумя ромбоэдрами золотого типа. Грани остроугольного ромбоэдра пересекаются вдоль ребер под углами 73 ° и 108 °. Грани тупоугольного ромбоэдра пересекаются под углами 36° и 144°. (Четыре двугранных угла кратны 360°/10 = 36°.) Плоские углы при вершинах граней близки к 64° и 116° [1].

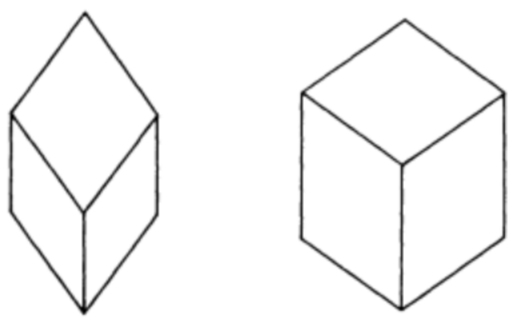

Рис. 7. Ромбоэдры Ковалевского

ГЛАВА II. Практическая часть.

Создание апериодической мозаики на основе разбиений Пенроуза и Аммана.

Для создание непереодического разбиения пространства в трехмерном варианте использовался 3-д принтер. При построении мозаики используются два вида ромбоэдров Ковалевского, а также комбинация из двух плоских ромбоэдров и двух вытянутых ромбоэдров.

Ход работы: 1. Сборка центральной «пятиконечной звезды» и ее обрамления (Рис 8).

2. Постепенное дополнение узора «пятиконечными звездами», построение непериодической мозаики (Рис. 9, 10).

3. Выделение полос Амманна (Рис. 11, 12 13).

Рис. 8. «Пятиконечная звезда»

Рис. 9. Непериодическая мозаика

Рис. 10. Непериодическая мозаика

Рис. 11. Полосы Амманна

Рис. 12. Полосы Амманна


Рис. 13. Полосы Амманна

Заключение

Подводя итог, апериодические замощения находят применение в различных сферах жизни. Непериодические мозаики использовались еще в Средневековье при создании узоров в мечетях. Также замощения с осями 5-го, 7-го, 8-го стали первым шагом к открытию квазикристаллов. Объемным аналогом мозаик Пенроуза являются разбиения Амманна, создание которых было выполнено в ходе курсовой работы, а модель апериодической мозаики дополнит коллекцию учебно-методического кабинета кафедры кристаллографии и кристаллохимии.

Список литературы

1. М. Гарднер. От мозаик Пенроуза к надежным шифрам/ М. Гарднер – Москва: Изд-во «Мир», 1993г. - 416 с. – URL: https://yadi.sk/i/kCmgLeOL-wNtGQ

2. im-possible.info: сайт – URL: https://im-possible.info/russian/articles/penrose-bio/penrose-bio.html

3. liveinternet.ru: сайт – URL: https://www.liveinternet.ru/users/3308239/post449812485/